

**К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЕЕ НАГРЕВЕ**

Определены критические значения температуры составной упругой пластины в постоянном температурном поле с двумя противоположными сторонами, находящимися в условиях скользящего контакта, и свободными на двух других. Для частного случая однородной пластины исследована зависимость критических сил, приложенных к скользящим сторонам, от ширины свободных сторон и коэффициента Пуассона и выведены приближенные формулы расчета критической температуры для широких и узких пластин. Рассчитана критическая температура составной пластины, состоящей из медной и алюминиевой пластинок.

В настоящей статье рассмотрена задача устойчивости, свободной от внешних нагрузок, составной пластины при ее равномерном нагреве. Прямоугольная составная пластина состоит из двух пластинок, боковые грани которых жестко скреплены в плоскости  $y = 0$ , перпендикулярные к этой плоскости боковые грани пластины находятся в условиях скользящего контакта, а две другие грани ее свободны (рис. 1). Геометрические размеры пластины находятся в пределах, допускающих использования теории плоского напряжённого состояния для определения напряженно-деформированного состояния пластины при температурах, ниже критических, и теории Кирхгофа для решения задачи выпучивания пластины при потере устойчивости. Таким образом, решение задачи термоупругости для пластин постоянной, но достаточно малой, толщины требует решения уравнения для сил срединной плоскости и уравнения для прогибов и соответствующих моментов. Первая задача относится к теории обобщённого плоского напряженного состояния, а вторая – к решению задачи устойчивости пластин [2, 4]. Термоупругие напряжения на контактной поверхности и в окрестности её краёв были исследованы в работах [1, 6].

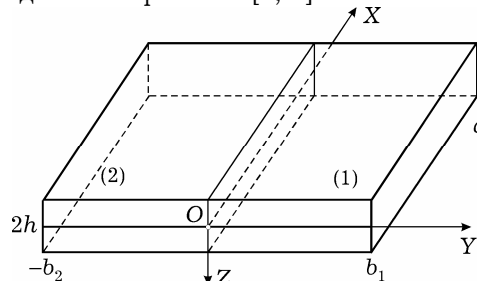


Рис.1

1. Для тонких равномерно нагретых пластин при отсутствии поверхностных сил можно принять, что напряжения  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ . Три оставшиеся напряжения и перемещения  $u_i$  и  $v_i$  для каждой из составляющих пластинки, находящейся в постоянном температурном поле  $\theta$ , должны удовлетворять следующим трём соотношениям:

$$\begin{aligned}\sigma_{xi} &= \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) - \frac{\gamma_i \theta}{1 - \nu_i}, \\ \sigma_{yi} &= \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y} + \nu_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - \frac{\gamma_i \theta}{1 - \nu_i}, \\ \tau_{xyi} &= \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\gamma_i = E_i(1 - 2\nu_i)^{-1}\alpha_{ti}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$E_i$  – модули Юнга,  $\nu_i$  – коэффициенты Пуассона,  $\alpha_{ti}$  – линейные коэффициенты температурного расширения, и двум уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta u_i + k_i \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) &= 0, \\ \Delta v_i + k_i \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$k_i = (1 + \nu_i)(1 - \nu_i)^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

В сечении пластины  $y = 0$  должны быть удовлетворены условия жесткого контакта:

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y2}, \quad \tau_{yx1} = \tau_{yx2} \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (4)$$

На кромках пластины  $x = 0$ ,  $x = a$  выполняются условия скользящего контакта, а две другие кромки свободны от напряжений:

$$\begin{aligned} u_i &= 0, \quad \tau_{xyi} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \\ \sigma_{yi} &= \tau_{yxi} = 0 \quad \text{при} \quad y = b_1, \\ \sigma_{y2} &= \tau_{yx2} = 0 \quad \text{при} \quad y = -b_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Для этих граничных условий решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (4), (5), для каждой из составляющих пластинок можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1 + \nu_1}{E_1} \gamma_1 \theta y + C, & u_1 &= 0, \\ \sigma_{x1} &= -\gamma_1 \theta, & \sigma_{y1} &= 0, & \tau_{yx1} &= 0, \\ v_2 &= \frac{1 + \nu_2}{E_2} \gamma_2 \theta y + C, & u_2 &= 0, \\ \sigma_{x2} &= -\gamma_2 \theta, & \sigma_{y2} &= 0, & \sigma_{yx2} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Произвольную постоянную  $C$ , которая равна общему смещению пластины, можно приравнять нулю. Полученное решение показывает, что пластина расширяется в направлении оси  $OY$ , а в срединной плоскости каждой пластинки появляются направленные вдоль оси  $OX$  сжимающие силы  $N_i$ , пропорциональные  $\sigma_{xi}$ .

**2.** Для определения критических значений сил или критической температуры, при которых плоская форма равновесия становится неустойчивой, применим метод интегрирования дифференциального уравнения для изогнутой пластинки [5]. Дифференциальные уравнения прогибов пластинок, равномерно сжатых в направлении оси  $OX$  силами  $N_i$ , можно представить в виде

$$D_i \Delta^2 w_i + N_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 0, \quad (7)$$

где  $D_i$  – жесткость пластинок при изгибе,

$$D_i = \frac{2E_i h^3}{3(1 - \nu_i^2)}, \quad N_i = -2h\sigma_{xi}. \quad (8)$$

В плоскости контакта двух пластинок уравнения (7) должны удовлетворять следующим условиям жёсткого контакта: равенство прогибов и производных, нормальных к плоскости сечения  $y = 0$ , а также необходимо обеспечить равенство изгибающих моментов  $M_{yi}$  и обобщённых перерезывающих сил  $Q_{yi}$ :

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2, & \frac{\partial w_1}{\partial y} &= \frac{\partial w_2}{\partial y}, \\ D_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) &= D_2 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right), \\ D_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + (2 - \nu_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) &= D_2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + (2 - \nu_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия скользящего контакта для уравнений (7) состоят в равенстве нулю нормальных производных и перерезывающих сил при  $x = 0$ ,  $x = a$ :

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} = 0. \quad (10)$$

На свободных кромках пластины должны быть равны нулю моменты сил  $M_{yi}$  и обобщённые перерезывающие силы  $Q_{yi}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + (2 - \nu_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) &= 0 \quad \text{при} \quad y = b_1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + (2 - \nu_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) &= 0 \quad \text{при} \quad y = -b_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Принимая, что при повышении температуры пластинка выпучивается в  $m$  косинусоидальных полуволн, решение уравнения (7) будем искать в виде

$$\begin{aligned} w_i(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_{in} \operatorname{ch} \mu_n \rho_{i1} y + B_{in} \operatorname{sh} \mu_n \rho_{i1} y + \\ &\quad + C_{in} \operatorname{ch} \mu_n \rho_{i2} y + D_{in} \operatorname{sh} \mu_n \rho_{i2} y) \cos \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{a}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\rho_{i1} = \sqrt{1 + \eta_{in}}, \quad \rho_{i2} = \sqrt{1 - \eta_{in}}, \quad (14)$$

$$\eta_{in}^2 = D_i^{-1} \mu_n^{-2} N_n. \quad (15)$$

Эти решения удовлетворяют бигармоническим уравнениям (7) и тождественно удовлетворяют граничным условиям скользящего контакта (10). Величины  $\eta_{in}^2$ , определенные соотношением (15), пропорциональны сжимающим силам, действующим на срединные плоскости каждой из пластинок, и связаны с температурой пластины соотношением

$$\theta_{cr} = \eta_{in}^2 \frac{(1 - 2\nu) h^2 \kappa_n^2}{3(1 - \nu^2) \alpha_{ti}}. \quad (16)$$

3. Подстановка (13) в граничные условия контакта (9) и в граничные условия свободных кромок (11), (12) с учётом (16) приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных  $A_{in}$ ,  $B_{in}$ ,  $C_{in}$ ,  $D_{in}$ :

$$\begin{aligned} A_{1n} + C_{1n} &= A_{2n} + C_{2n}, \\ \rho_{11}B_{1n} + \rho_{12}D_{1n} &= \rho_{21}B_{2n} + \rho_{22}D_{2n}, \\ (\rho_{11}^2 - \nu_1)A_{1n} + (\rho_{12}^2 - \nu_1)C_{1n} &= \alpha[(\rho_{21}^2 - \nu_2)A_{2n} + (\rho_{22}^2 - \nu_2)C_{2n}], \\ \rho_{11}(\rho_{11}^2 - 2 + \nu_1)B_{1n} + \rho_{12}(\rho_{12}^2 - 2 + \nu_1)D_{1n} &= \\ &= \alpha[\rho_{21}(\rho_{21}^2 - 2 + \nu_2)B_{2n} + \rho_{22}(\rho_{22}^2 - 2 + \nu_2)D_{2n}], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (\rho_{11}^2 - \nu_1)(A_{1n} \operatorname{ch} \rho_{11}\xi_{1n} + B_{1n} \operatorname{sh} \rho_{11}\xi_{1n}) + \\ + (\rho_{12}^2 - \nu_1)(C_{1n} \operatorname{ch} \rho_{12}\xi_{1n} + D_{1n} \operatorname{sh} \rho_{12}\xi_{1n}) &= 0, \\ \rho_{11}(\rho_{11}^2 - 2 + \nu_1)(A_{1n} \operatorname{sh} \rho_{11}\xi_{1n} + B_{1n} \operatorname{ch} \rho_{11}\xi_{1n}) + \\ + \rho_{12}(\rho_{12}^2 - 2 + \nu_1)(C_{1n} \operatorname{sh} \rho_{12}\xi_{1n} + D_{1n} \operatorname{ch} \rho_{12}\xi_{1n}) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (\rho_{21}^2 - \nu_2)(A_{2n} \operatorname{ch} \rho_{21}\xi_{2n} - B_{2n} \operatorname{sh} \rho_{21}\xi_{2n}) + \\ + (\rho_{22}^2 - \nu_2)(C_{2n} \operatorname{ch} \rho_{22}\xi_{2n} - D_{2n} \operatorname{sh} \rho_{22}\xi_{2n}) &= 0, \\ \rho_{21}(\rho_{21}^2 - 2 + \nu_2)(A_{2n} \operatorname{sh} \rho_{21}\xi_{2n} - B_{2n} \operatorname{ch} \rho_{21}\xi_{2n}) + \\ + \rho_{22}(\rho_{22}^2 - 2 + \nu_2)(C_{2n} \operatorname{sh} \rho_{22}\xi_{2n} - D_{2n} \operatorname{ch} \rho_{22}\xi_{2n}) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В (17)–(19) приняты обозначения

$$\alpha = D_2/D_1, \quad \xi_{in} = \mu_n b_i. \quad (20)$$

Эти условия могут быть удовлетворены, если все неизвестные будут равны нулю, что соответствует плоской форме (6) равновесия пластинок. Для получения решений с выпученным видом равновесия необходимо найти критические температуры (или усилия  $N_i$ ), при которых детерминант системы (17)–(19) равен нулю. Решение (13) имеет симметричную и несимметричную формы относительно оси  $OX$  в зависимости от  $n$ : при нечётном  $n$  края скользящего контакта смещаются в разные стороны от срединной плоскости пластины (несимметричная форма), при чётном  $n$  края смещаются в одну сторону (симметричная форма). Наименьшей энергии соответствует несимметричная форма при  $n = 1$ .

В частном случае однородной пластины имеем

$$\nu_i = \nu, \quad \alpha = 1, \quad \alpha_{ti} = \alpha_t, \quad \eta_{in} = \eta, \quad \rho_{11} = \rho_{21}, \quad \rho_{12} = \rho_{22}. \quad (21)$$

Из (17), (21), а также учитывая, что функция  $w_i(x, y)$  чётна относительно оси  $OX$ , следует, что

$$A_{in} = A, \quad C_{in} = C, \quad B_{in} = 0, \quad D_{in} = 0. \quad (22)$$

Если (22) и (21) подставить в (18) и (19), тогда условие равенства нулю детерминанта системы (18), (19) сводится к определению критического значения  $\eta_{cr}$ , при котором имеет место равенство

$$\rho_{11}(\rho_{12}^2 - \nu)(\rho_{11}^2 - 2 + \nu) \operatorname{th} \rho_{11}\xi_n = \rho_{12}(\rho_{11}^2 - \nu)(\rho_{12}^2 - 2 + \nu) \operatorname{th} \rho_{12}\xi_n. \quad (23)$$

Аналогичное уравнение получено в [3] для задачи устойчивости прямоугольной пластины, шарнирно закреплённой и равномерно сжатой на двух противоположных сторонах и свободной на двух других. Уравнение (23) связывает величину  $\eta_{cr}$ , квадрат которой пропорционален сжимающим силам  $N_i$ , приложенным к срединной плоскости, с относительной шириной пластины, которая входит в  $\xi_n$  (20). Корни этого уравнения имеют только действительные значения, меньше единицы. Графики сжимающей критической силы  $\eta_{crn}^2$  при  $n = 1$  (т.е.  $\eta_{cr1}^2$ ) от относительной ширины пластины  $2b/a$  при значениях коэффициентов Пуассона  $\nu = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  представлены на рис. 2.

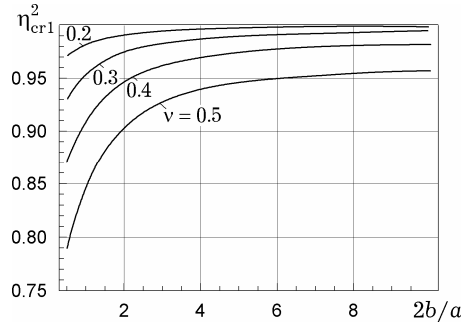


Рис. 2

Для достаточно широких пластин ( $2b/a > 1$ ), принимая, что

$$\text{th } \rho_{11}\xi_n \approx 1, \quad \text{th } \rho_{12}\xi_n \approx 1,$$

уравнение (23) можно преобразовать к виду

$$\rho_{11}^2 \rho_{12}^2 + 2(1 - \nu)\rho_{11}\rho_{12} - \nu^2 = 0. \quad (24)$$

Отсюда нетрудно найти приближённое выражение для минимальной критической температуры, при которой пластина теряет устойчивость:

$$\theta_* = \frac{(1 - 2\nu)\pi^2 h^2}{3(1 - \nu)a^2 \alpha_t} \left[ 2\sqrt{(1 - \nu)^2 + \nu^2} + 3\nu - 1 \right].$$

В табл. 1 приведены значения  $\theta_{cr}$  и  $\theta_*$ , рассчитанные соответственно из уравнений (23) и (24), при  $h/a = 0.1$ ,  $\alpha_t = 2 \cdot 10^{-6}$ ,  $2a/b = 5$ ,  $n = 1$  для различных значений коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Таблица 1

$\nu$	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$\theta_{cr}$	164.493	132.791	102.341	71.429	38.119
$\theta_*$	164.493	132.920	102.746	72.031	38.591

Для узких пластин ( $2b/a < 1$ ), принимая в уравнении (23)

$$\text{th } \rho_{11}\xi_1 \approx \rho_{11}\xi_1, \quad \text{th } \rho_{12}\xi_1 \approx \rho_{12}\xi_1,$$

получаем такую величину критической температуры:

$$\theta_{cr} = \eta_{cr} \frac{(1 - 2\nu)h^2 \chi_n^2}{3(1 - \nu^2)\alpha_t}.$$

Найденные критические значения температуры позволяют рассчитать перемещения пластины (13) для устойчивого состояния при  $n = 1$ . Поскольку детерминант системы уравнений равен нулю, то из двух неизвестных  $A$  и  $B$  можем найти только  $B$  из первого граничного условия (11) и, подставив его в (13), получим

$$w(x, y) = A \left( \operatorname{ch}(\rho_{11}\mu_n y) + \frac{\operatorname{ch}(\rho_{11}\mu_n b)(\rho_{11}^2 - \nu)}{(-\rho_{12}^2 + \nu) \operatorname{ch}(\rho_{12}\mu_n b)} \operatorname{ch}(\rho_{12}\mu_n y) \right) \cos(\mu_n x).$$

Для вычислений выбрали квадратную пластину с относительной толщиной  $2h = 0.01/a$ , изготовленную из прокатанной меди с модулем Юнга  $E = 10800 \text{ Кг/мм}^2$ , коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.32$  и линейным коэффициентом теплового расширения  $\alpha_t = 22 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . На рис. 3 показаны рассчитанные относительные перемещения  $w^* = w(x, y)/A$  исследуемой квадратной пластины при  $n = 2$ .

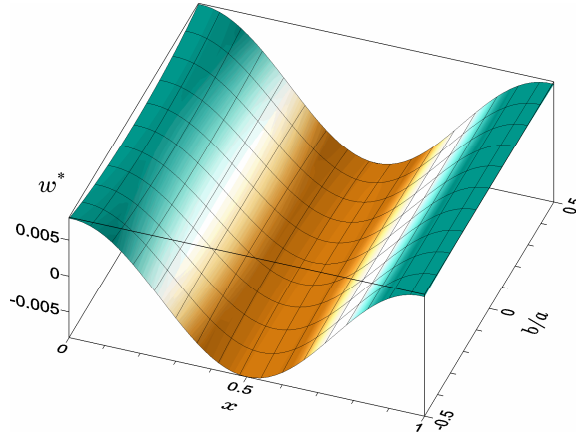


Рис. 3

Для  $n = 1$  медная пластина выпучивается при температуре  $\theta_{cr1} = 54 \text{ }^\circ\text{C}$ , для  $n = 2$  достигается при температуре  $\theta_{cr2} = 22.3 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Значения прогибов пластины  $w(x, y)$  при  $n = 1$ ,  $y = 0$  и  $y = 0.5$  приведены в табл. 2 для различных значений  $x$ .

Таблица 2

$x$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$w(x, 0.0) \times 10^3$	7.76	7.38	6.28	4.56	2.40	0.0
$w(x, 0.5) \times 10^3$	7.12	6.76	5.76	4.18	2.20	0.0

4. В общем случае критическое значение температуры составной пластинки, которая входит в соотношение для  $\eta_{1n}$ , зависит от механических, тепловых и геометрических параметров пластины. Поскольку температура пластины одинакова по всей поверхности, то значение  $\eta_{2n}$  можно выразить с помощью (16) через  $\eta_{1n}$  следующей формулой:

$$\eta_{2n}^2 = \eta_{1n}^2 \frac{(1 - \nu_2^2)(1 - 2\nu_1) \alpha_{t2}}{(1 - \nu_1^2)(1 - 2\nu_2) \alpha_{t1}}. \quad (25)$$

Тогда детерминант системы (17)–(19) после подстановки в него (25) будет зависеть только от величины  $\eta_{1n}$ , которая, в свою очередь, зависит от отношения жесткостей пластинок на изгиб, отношения коэффициентов линейного расширения и не зависит от толщины пластинок.

В табл. 3 приведены расчетные значения критических температур  $\theta_{cr}$  и приведенных сил  $\eta_{crn}^2$  при  $n = 1$  и  $n = 2$  для квадратных пластин из меди и алюминия, каждая толщиной  $2h = 0.01/a$ . В третьей строке приведены эти же расчетные данные для составной квадратной пластины, состоящей из одинаковых медной и алюминиевой пластинок. Механические па-

параметры алюминиевой пластинки:  $E = 6600 \text{ Кг/мм}^2$ ,  $\nu = 0.34$ , линейный коэффициент теплового расширения  $\alpha_t = 16 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Параметры для медной пластинки приведены выше.

Таблица 3

	$\theta_{cr1}$	$\theta_{cr2}$	$\eta_{cr1}^2$	$\eta_{cr2}^2$
Cu	5.4	22.3	0.9450	0.9687
Al	6.7	27.5	0.9370	0.9818
Cu-Al	5.8	23.0	0.8084	0.8083

Однако зависимость поведения критических значений температур, сжимающих сил и пространственных форм выпучивания составных пластинок от механических характеристик носит довольно сложный характер и связана с большим объемом вычислений. Поэтому подробные исследования этих вопросов будут опубликованы во второй части этой работы. На актуальность таких исследований обращают внимание авторы статьи [7].

1. Алексанян Р. К., Мкртчян А. М. Температурные напряжения в составном прямоугольнике // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1970. – 23, № 4. – С. 3–11.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 547 с.
3. Ишлинский А. Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. – 1954. – 95, № 3. – С. 477–479.
4. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. – Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1946. – 532 с.
6. Чобанян К. С., Алексанян Р. К. Термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1971. – 24, № 3. – С. 22–32.
7. Akhras G., Li W. C. Three-dimensional thermal buckling analysis of piezoelectric antisymmetric angle-ply laminates using finite layer method // Compos. Struct. – 2010. – 92, No. 1. – P. 31–38.

#### ДО ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ СКЛАДЕНОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ ЇЇ НАГРІВІ

Визначено критичні значення температури складеної пружної пластини в постійному температурному полі, дві протилежні сторони якої перебувають в умовах ковзного контакту, а дві інші сторони є вільними. Для часткового випадку однорідної пластини досліджено залежність критичних сил, прикладених до ковзних сторін, від ширини вільних сторін і коефіцієнта Пуассона і виведено наближені формули розрахунку критичної температури для широких і вузьких пластин. Обчислено критичну температуру пластини, складеної з мідної та алюмінієвої пластинок.

#### TO STABILITY PROBLEM OF COMPOSITE PLATES UNDER ITS HEATING

The critical temperatures for an elastic composite plate in a constant temperature field are determined, with two opposite sides that are in sliding contact conditions, and free on the other two. For a particular case of a homogeneous plate, the dependences of the critical forces applied to the sliding sides on the width of the free sides and Poisson's ratio are investigated, and approximate formulas for calculating the critical temperature for wide and narrow plates are derived. The critical temperature of the composite plate consisting of copper and aluminum plate is calculated.

Ин-т механики НАН Респ. Армении, Ереван

Получено  
14.10.11