

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Разработан программный комплекс определения геометрических характеристик и анализа касательных напряжений призматических стержней произвольного поперечного сечения на этапе препроцессорной и постпроцессорной обработки данных при конечно-элементном анализе. На основе принципа возможных перемещений получены вариационные функционалы для задачи Сен-Венана о кручении призматического стержня и об изгибе поперечной силой, не вызывающей закручивания, которые непосредственно используются для получения разрешающих соотношений метода конечных элементов. На основе теоремы Бетти о взаимности работ определяются координаты центра изгиба. Все соотношения сформулированы относительно функции коробления, что позволяет избежать проблем, связанных с неоднозначностью при использовании функции напряжений Прандтля в случае многосвязной области.

Введение. При расчете сложных стержневых систем методом конечных элементов, как правило, используется модель Бернулли стержня или (гораздо реже) – сдвиговая модель С. П. Тимошенко. При этом касательные напряжения при изгибе описываются в рамках упрощенных инженерных подходов. На тех участках изгибаемого стержня, где изгибающие моменты близки к нулю, нормальные напряжения также будут малы, и достоверность решения прочностной задачи главным образом зависит от того, насколько точно определены касательные напряжения. Обычно это участки разрезных балок при опорах или специфические элементы конструкций, интенсивно работающие на кручение. При анализе напряженно-деформированного состояния таких конструктивных элементов может оказаться, что точность определения касательных напряжений на основе элементарной теории изгиба и кручения стержней недостаточна.

Расчетную модель для всей стержневой системы назовем глобальной расчетной моделью, а расчетную модель для каждого отдельного стержня – локальной. Тогда из анализа глобальной расчетной модели, в рамках которой используются упомянутые выше приближенные модели стержней, для каждого стержня определяем изгибающие и крутящий моменты, продольную и поперечные силы. Затем, зная внутренние усилия, находим уточненные величины касательных напряжений из решения задачи Сен-Венана.

Анализ глобальной расчетной модели относится к этапу процессорной обработки данных. Для его выполнения нужно знать геометрические характеристики сечений, такие как площадь поперечного сечения, положение главных осей, моменты инерции сечения относительно главных осей, момент инерции при кручении, центр изгиба (центр кручения) и коэффициенты коррекции сдвиговых площадей (shear correction factor) [8, 9]. Определение последних трех характеристик связано с решением задачи Сен-Венана о кручении призматического стержня и задачи об изгибе поперечной силой. Таким образом, до выполнения анализа глобальной расчетной модели необходимо выполнить препроцессорную обработку данных – решить для каждого стержня отдельно задачу Сен-Венана и определить требуемые геометрические характеристики. Для сечений простой формы и для стандартных профилей эти величины приведены в таблицах соответствующих норм. Однако для сложных и составных сечений их приходится определять.

После выполнения анализа глобальной расчетной модели на основе полученных усилий выполняется постпроцессорная обработка данных – производится определение нормальных и касательных напряжений при использовании упрощенных моделей, а также уточнение значений касательных напряжений на основе решения задачи Сен-Венана о кручении и об изгибе призматического стержня поперечной силой для тех участков стержней, которые интенсивно работают на сдвиг и кручение.

Целью данной работы является разработка компьютерной программы определения геометрических характеристик сечений призматических стержней произвольной формы, а также анализа касательных напряжений, возникающих при их кручении и при изгибе поперечной силой, приложенной на торце. Рассматривается задача Сен-Венана.

Задача Сен-Венана о кручении (будем называть эту задачу первой) и задача об изгибе без кручения призматических стержней поперечной силой (будем называть эту задачу второй) являются классическими задачами, описанными во многих фундаментальных работах по теории упругости [3–7]. Однако классические решения часто оказываются малоприспособленными для компьютерной реализации, поскольку компьютерная система должна уметь анализировать стержни произвольного поперечного сечения.

Подавляющее большинство авторов при решении как первой, так и второй задачи строят разрешающие соотношения, используя функцию напряжений Прандтля [3, с. 379, с. 412, с. 437], [4, с. 407, с. 452], [5, с. 243, с. 278], [7, с. 302, с. 360]. При таком подходе в случае многосвязной области (сечение с отверстиями) возникают проблемы с формулированием граничных условий, для преодоления которых для каждого внутреннего контура применяется теорема Бредта о циркуляции касательных напряжений [5, с. 254], [6, с. 294] и др. Хотя в теоретическом плане задача является разрешимой, ее численная реализация сопряжена с рядом трудностей, поскольку традиционные уравнения метода конечных элементов следует дополнять специальными условиями на контурах.

С точки зрения создания компьютерных методов, более заманчивым является решение с использованием функции коробления [9], поскольку при этом задача для многосвязной области решается на основе тех же соотношений, что и для односвязной, а решение второй задачи алгоритмически так же просто, как и первой. Для кручения и изгиба сформулированы соответствующие краевые задачи, к которым затем применяется метод конечных элементов в виде метода Галеркина в форме метода взвешенных невязок [12, с. 39–51].

Изложенный в [10] подход приемлем для компьютерной реализации, однако, по мнению авторов, является слишком громоздким и сложным, поскольку основан на разделении второй задачи на ряд вспомогательных подзадач.

Для задачи кручения при использовании функции коробления применение вариационных принципов достаточно очевидно [6]. А вот задача изгиба при отсутствии кручения обычно решается исходя из постановки краевой задачи. Даже в тех малочисленных работах, например в [3, с. 437], где для рассмотренных задач сформулированы вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно, вторая задача решается в терминах функции напряжений Прандтля, что порождает отмеченные ранее значительные неудобства при компьютерной реализации.

В данной работе авторы получают все разрешающие соотношения, исходя из вариационной постановки как первой, так и второй задач, причем разрешающие соотношения сформулированы относительно функции коробления. В этом случае автоматически обеспечивается наиболее низкий порядок старших производных («слабая» формулировка [12, с. 42]), выполнение естественных краевых условий, а для получения уравнений, описывающих поведение дискретной модели, достаточно выполнить формальные математические процедуры. Кроме того, при получении выражений для координат центра изгиба применяется теорема Бетти о взаимности работ, что делает вывод данных соотношений физически наглядным и естественным.

1. Задача о кручении призматического стержня. Рассмотрим сначала задачу о кручении призматического стержня произвольного поперечного сечения (рис. 1). Здесь $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ – правосторонняя система координат, причем ось $O\bar{X}$ направлена вдоль оси стержня. Оси $O\bar{Y}$, $O\bar{Z}$ являются центральными (точка O совпадает с центром тяжести сечения), но не главными.

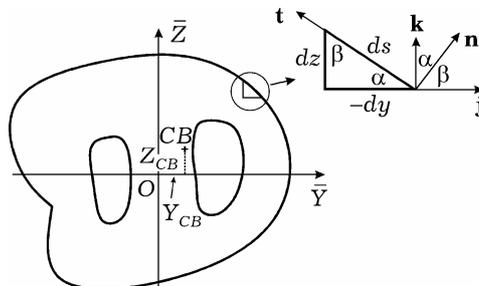


Рис. 1

Поперечное сечение может иметь отверстия. Длина стержня равна ℓ . Центр изгиба (координаты Y_{CB}, Z_{CB}) обозначен через CB . Напряжения на боковых поверхностях стержня и объемные силы отсутствуют. На торцах заданы касательные напряжения τ_{yx}, τ_{zx} так, что поперечные силы $Q_y = Q_z = 0$, а крутящий момент $M_x = M_{\text{тор}}$. Здесь

$$Q_y = \iint_{\Omega} \tau_{yx} d\Omega, \quad Q_z = \iint_{\Omega} \tau_{zx} d\Omega, \quad M_x = \iint_{\Omega} (\tau_{zx}y - \tau_{yx}z) d\Omega.$$

Напряжения $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0$. Из уравнений равновесия следует, что напряжения τ_{yx}, τ_{zx} не зависят от координаты x . Следуя [6, с. 288–289], приведем только конечный результат:

$$I_{\text{тор}} = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right)^2 \right] d\Omega, \quad (1)$$

$$M_{\text{тор}} = G \cdot I_{\text{тор}} \cdot \Theta', \quad (2)$$

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) \delta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) \delta \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] d\Omega = 0. \quad (3)$$

Здесь $I_{\text{тор}}$ – момент инерции при кручении; $M_{\text{тор}}$ – крутящий момент; G – модуль сдвига; $\Theta' = d\Theta/dx = \text{const}$; Θ – угол закручивания; $\varphi = \varphi(y, z)$ – функция коробления Сен-Венана,

$$\tau_{yx} = G\Theta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right), \quad \tau_{zx} = G\Theta' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right). \quad (4)$$

Из функционала (3), который будет непосредственно использован для построения соотношений метода конечных элементов задачи кручения, следует краевая задача Неймана

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 && \text{на} && \Omega, \\ \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= 0 && \text{на} && \Gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

где $n_y = \cos \beta = \frac{dz}{ds}$, $n_z = \cos \alpha = -\frac{dy}{ds}$ – направляющие косинусы нормали к контуру (рис. 1).

2. Задача об изгибе призматического стержня поперечной силой. Рассмотрим изгиб призматического стержня от действия поперечной силы, приложенной на торце $x = \ell$, при отсутствии кручения. Как и в случае кручения, будем считать, что нагрузка на боковые поверхности и объемные силы отсутствуют. Левый торец стержня жестко защемлен, а на свободном правом торце $x = \ell$ приложены касательные напряжения так, что $Q_y = \bar{Q}_y$, $Q_z = \bar{Q}_z$, $M_x = 0$, где \bar{Q}_y, \bar{Q}_z – заданные значения нагрузок, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{yz} = 0$. Из уравнений равновесия следует, что напряжения τ_{yx}, τ_{zx} не зависят от координаты x . Отличные от нуля напряжения представляются в виде [9]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -(a_1 y + a_2 z)(\ell - x), \\ \tau_{yx} &= \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_1 (z - z_0)^2, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_2 (y - y_0)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\bar{\psi} = \bar{\psi}(y, z)$ – функция коробления при изгибе,

$$a_1 = \frac{Q_y A_{zz} - Q_z A_{yz}}{A_{yy} A_{zz} - A_{yz}^2}, \quad a_2 = \frac{Q_z A_{yy} - Q_y A_{zy}}{A_{yy} A_{zz} - A_{yz}^2}, \quad A_{pq} = \iint_{\Omega} pq d\Omega,$$

$$Q_y = \iint_{\Omega} \tau_{yx} d\Omega, \quad Q_z = \iint_{\Omega} \tau_{zx} d\Omega, \quad M_x = \iint_{\Omega} (\tau_{zx}y - \tau_{yx}z) d\Omega,$$

σ_{xx} – нормальное напряжение. Параметры y_0, z_0 определяют координаты

центра изгиба – точки, приложение в которой сил \bar{Q}_y, \bar{Q}_z не вызывает закручивания. Параметры y_0, z_0 следует подобрать так, чтобы $M_x = 0$.

Применим принцип возможных перемещений

$$\delta E = \int_0^\ell \iiint (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{yx} \delta \gamma_{yx} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) d\Omega dx - \bar{Q}_y \delta V - \bar{Q}_z \delta W = 0, \quad (7)$$

где $\varepsilon_{xx}, \gamma_{yx}, \gamma_{zx}$ – компоненты тензора деформаций,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = -\frac{1}{E}(a_1 y + a_2 z)(\ell - x),$$

u – перемещение в направлении оси стержня; V, W – перемещения нагруженного торца стержня при $x = \ell$ вдоль осей OY, OZ , на которых совершают работу заданные поперечные силы \bar{Q}_y, \bar{Q}_z соответственно.

Проинтегрируем по частям первое слагаемое в (7) с учетом первого из выражений (6):

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \iiint \sigma_{xx} \delta \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega dx &= \iiint (\sigma_{xx} \delta u|_{x=\ell} - \sigma_{xx} \delta u|_{x=0}) d\Omega - \\ &- \int_0^\ell \iiint \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta u d\Omega dx = \\ &= \underbrace{\int_0^\ell \left(-(a_1 y + a_2 z)(\ell - \ell) \delta u|_{x=\ell} + (a_1 y + a_2 z)(\ell - 0) \frac{\delta u}{=0}|_{x=0} \right) d\Omega}_{=0} - \\ &- \int_0^\ell \iiint (a_1 y + a_2 z) \delta u d\Omega dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{G} \bar{\psi}(y, z) + C_1 = -\int \frac{a_1 y + a_2 z}{E} (\ell - x) dx + \frac{1}{G} \bar{\psi}(y, z) + C_1 = \\ &= \frac{a_1 y + a_2 z}{2E} (\ell - x)^2 + \frac{1}{G} \bar{\psi}(y, z) + C_1, \end{aligned}$$

где C_1 – постоянная интегрирования, получаем $\delta u = \delta \bar{\psi}$, поскольку остальные слагаемые этого выражения не варьируются. Подставляя этот результат в (8), а полученное выражение – в (7), запишем

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_0^\ell \iiint \left[-\frac{(a_1 y + a_2 z)}{G} \delta \bar{\psi} + \tau_{yx} \delta \gamma_{yx} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \right] d\Omega dx - \bar{Q}_y \delta V - \bar{Q}_z \delta W = \\ &= \delta \left\{ \int_0^\ell \iiint \left[-\frac{(a_1 y + a_2 z)}{G} \bar{\psi} + \frac{\tau_{yx}^2}{2G} + \frac{\tau_{zx}^2}{2G} \right] d\Omega dx - \bar{Q}_y V - \bar{Q}_z W \right\} - \\ &- \int_0^\ell \iiint \left[-\frac{(a_1 y + a_2 z)}{G} \delta \bar{\psi} + \gamma_{yx} \delta \tau_{yx} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} \right] d\Omega dx = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Первый интеграл в правой части (9) представляет собой функционал полной потенциальной энергии системы, поэтому на основании вариационного принципа Лагранжа его вариация равна нулю. Второй интеграл представляет собой формулировку вариационного принципа Кастильяно для рассматриваемой задачи, поэтому он тоже равен нулю. Таким образом, на основании вариационного принципа Кастильяно получаем

$$\delta K = \int_0^\ell \iiint \left[-\frac{(a_1 y + a_2 z)}{G} \delta \bar{\psi} + \gamma_{yx} \delta \tau_{yx} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx} \right] d\Omega dx = 0. \quad (10)$$

Используя закон Гука и учитывая тот факт, что подынтегральное выражение не зависит от x , приходим к выражению

$$\iint_{\Omega} \left\{ -(a_1 y + a_2 z) \delta \bar{\Psi} + \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_1 (z - z_0)^2 \right] \delta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} + \left[\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_2 (y - y_0)^2 \right] \delta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} \right\} d\Omega = 0. \quad (11)$$

Интегрируя функционал (11) по частям, получаем краевую задачу Неймана:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\Psi} &= -(a_1 y + a_2 z) & \text{на} & \quad \Omega, \\ \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= 0 & \text{на} & \quad \Gamma. \end{aligned} \quad (12)$$

Вариационный функционал (11) будем непосредственно использовать для получения конечно-элементных соотношений при решении задачи изгиба.

3. Определение центра изгиба. Для определения параметров y_0, z_0 воспользуемся теоремой Бетти о взаимности работ (в качестве первого грузового состояния рассмотрим кручение стержня «(tor)», а в качестве второго – изгиб «(b)» под действием поперечных сил \bar{Q}_y, \bar{Q}_z ; полагаем, что решение задачи о кручении нам известно):

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \iint_{\Omega} \left(\underbrace{\sigma_{xx}^{\text{tor}}}_{=0} \varepsilon_{xx}^b + \tau_{yx}^{\text{tor}} \gamma_{yx}^b + \tau_{zx}^{\text{tor}} \gamma_{zx}^b \right) d\Omega dx &= \\ = \int_0^{\ell} \iint_{\Omega} \left(\sigma_{xx}^b \underbrace{\varepsilon_{xx}^{\text{tor}}}_{=0} + \tau_{yx}^b \gamma_{yx}^{\text{tor}} + \tau_{zx}^b \gamma_{zx}^{\text{tor}} \right) d\Omega dx. \end{aligned}$$

Поскольку при кручении нормальные напряжения и продольные деформации равны нулю, $\sigma_{xx}^{\text{tor}} = \varepsilon_{xx}^{\text{tor}} = 0$, а подынтегральные выражения не зависят от x , то теорема о взаимности работ для рассматриваемой задачи с учетом закона Гука формулируется так:

$$\iint_{\Omega} (\tau_{yx}^{\text{tor}} \tau_{yx}^b + \tau_{zx}^{\text{tor}} \tau_{zx}^b) d\Omega = \iint_{\Omega} (\tau_{yx}^b \tau_{yx}^{\text{tor}} + \tau_{zx}^b \tau_{zx}^{\text{tor}}) d\Omega. \quad (13)$$

Левая часть (13) с учетом (4) преобразовывается к виду

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\tau_{yx}^b \tau_{yx}^{\text{tor}} + \tau_{zx}^b \tau_{zx}^{\text{tor}}) d\Omega &= G\Theta' \iint_{\Omega} \left[\tau_{yx}^b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \tau_{zx}^b \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] d\Omega + \\ &+ G\Theta' \underbrace{\iint_{\Omega} (\tau_{zx}^b y - \tau_{yx}^b z) d\Omega}_{M_x^b} = -G\Theta' \int_{\Gamma} \underbrace{\left(\tau_{yx}^b n_y + \tau_{zx}^b n_z \right)}_{=0} \varphi d\Gamma - \\ &- G\Theta' \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{yx}^b}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^b}{\partial z} \right)}_{=-\frac{\partial \sigma_{xx}^b}{\partial x} = -(a_1 y + a_2 z)} \varphi d\Omega + G\Theta' M_x^b = \\ &= G\Theta' \iint_{\Omega} (a_1 y + a_2 z) \varphi d\Omega + G\Theta' M_x^b. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь M_x^b – крутящий момент во втором состоянии, возникающий тогда, когда линии действия поперечных сил не проходят через центр изгиба. При этом учтено, что первое уравнение равновесия для задачи изгиба имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^b}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}^b}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^b}{\partial z} = 0.$$

$= a_1 y + a_2 z$

Подставим второе и третье выражения из (6) в правую часть (13) и снова проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} (\tau_{yx}^b \tau_{yx}^{\text{tor}} + \tau_{zx}^b \tau_{zx}^{\text{tor}}) d\Omega &= \iint_{\Omega} \left(\tau_{yx}^{\text{tor}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} + \tau_{zx}^{\text{tor}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} \right) d\Omega + \\
&+ \iint_{\Omega} \left[\frac{\nu}{2(1+\nu)} a_1 (z - z_0)^2 \tau_{yx}^{\text{tor}} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_2 (y - y_0)^2 \tau_{zx}^{\text{tor}} \right] d\Omega = \\
&- \int_{\Gamma} \underbrace{(\tau_{yx}^{\text{tor}} n_y + \tau_{zx}^{\text{tor}} n_z) \bar{\Psi}}_{=0} d\Gamma - \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{yx}^{\text{tor}}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^{\text{tor}}}{\partial z} \right) \bar{\Psi}}_{=0} d\Omega + \\
&+ \iint_{\Omega} \left[\frac{\nu}{2(1+\nu)} a_1 (z - z_0)^2 \tau_{yx}^{\text{tor}} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_2 (y - y_0)^2 \tau_{zx}^{\text{tor}} \right] d\Omega. \quad (15)
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что первое уравнение равновесия для задачи кручения имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{yx}^{\text{tor}}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^{\text{tor}}}{\partial z} = 0.$$

Приравнявая (14) и (15) и учитывая, что $M_x^b = Q_z y_{CB} - Q_y z_{CB}$, приходим к выражению

$$\begin{aligned}
Q_z y_{CB} - Q_y z_{CB} &= - \iint_{\Omega} (a_1 y + a_2 z) \varphi d\Omega + \frac{1}{G\Theta'} \iint_{\Omega} \left[\frac{\nu}{2(1+\nu)} a_1 (z - z_0)^2 \tau_{yx}^{\text{tor}} + \right. \\
&\left. + \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_2 (y - y_0)^2 \tau_{zx}^{\text{tor}} \right] d\Omega. \quad (16)
\end{aligned}$$

Подберем параметры y_0, z_0 так, чтобы последний интеграл был равен нулю:

$$\begin{aligned}
y_0^2 &= \frac{B_{yy}}{2B_y}, \quad z_0^2 = \frac{B_{zz}}{2B_z}, \\
B_{yy} &= \iint_{\Omega} y^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) d\Omega, \quad B_y = \iint_{\Omega} y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y \right) d\Omega, \\
B_{zz} &= \iint_{\Omega} z^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) d\Omega, \quad B_z = \iint_{\Omega} z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) d\Omega \quad (17)
\end{aligned}$$

и

$$Q_z y_{CB} - Q_y z_{CB} = - \iint_{\Omega} (a_1 y + a_2 z) \varphi d\Omega = -a_1 \iint_{\Omega} y \varphi d\Omega - a_2 \iint_{\Omega} z \varphi d\Omega.$$

Рассматривая поочередно $Q_y = 1, Q_z = 0$ и $Q_y = 0, Q_z = 1$, приходим к выражениям

$$z_{CB} = a_1^0 A_{y\varphi} + a_2^0 A_{z\varphi} = \frac{A_{zz} A_{y\varphi} - A_{zy} A_{z\varphi}}{A_{yy} A_{zz} - A_{yz}^2}, \quad (18)$$

$$y_{CB} = -a_1^1 A_{y\varphi} - a_2^1 A_{z\varphi} = -\frac{A_{yy} A_{z\varphi} - A_{yz} A_{y\varphi}}{A_{yy} A_{zz} - A_{yz}^2}. \quad (19)$$

Здесь a_1^0, a_2^0 и a_1^1, a_2^1 — значения a_1, a_2 соответственно при $Q_y = 1, Q_z = 0$ и при $Q_y = 0, Q_z = 1$; $A_{y\varphi} = \iint_{\Omega} y \varphi d\Omega, A_{z\varphi} = \iint_{\Omega} z \varphi d\Omega$.

Выражения (17)–(19) полностью совпадают с аналогичными выражениями, приведенными в [9, 10]. Однако в этой работе они получены на основании теоремы о взаимности работ, поэтому совершенно ясно, почему для определения параметров y_0, z_0, y_{CB}, z_{CB} , фигурирующих в задаче изгиба призматического стержня под действием поперечной силы, достаточно решить только задачу о кручении, не решая самой задачи об изгибе.

4. Конечно-элементная дискретизация. Применим треугольные конечные элементы, функции формы которых представляются как [12, с. 145]

$$N_i(y, z) = \alpha_i + \beta_i y + \gamma_i z, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\alpha_1 = \frac{y_2 z_3 - y_3 z_2}{2\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{y_3 z_1 - y_1 z_3}{2\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{2\Delta},$$

$$\beta_1 = \frac{z_2 - z_3}{2\Delta}, \quad \beta_2 = \frac{z_3 - z_1}{2\Delta}, \quad \beta_3 = \frac{z_1 - z_2}{2\Delta},$$

$$\gamma_1 = \frac{y_3 - y_2}{2\Delta}, \quad \gamma_2 = \frac{y_1 - y_3}{2\Delta}, \quad \gamma_3 = \frac{y_2 - y_1}{2\Delta}, \quad 2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Здесь y_i, z_i – координаты i -й вершины, причем для каждого треугольника обход вершин осуществляется против часовой стрелки.

В случае кручения аппроксимация искомой функции коробления в области конечного элемента e представляется как

$$\varphi_e(y, z) = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}_e, \quad (20)$$

где $\mathbf{\Phi} = (N_1(y, z) \ N_2(y, z) \ N_3(y, z))$; $\mathbf{q}_e = (F_1^{\text{tor}} \ F_2^{\text{tor}} \ F_3^{\text{tor}})^{\top}$; $F_1^{\text{tor}}, F_2^{\text{tor}}, F_3^{\text{tor}}$ – узловые значения функции коробления при кручении. Запишем производные от функции коробления:

$$\frac{\partial \varphi_e(y, z)}{\partial y} = \mathbf{\Phi}'_y \mathbf{q}_e, \quad \frac{\partial \varphi_e(y, z)}{\partial z} = \mathbf{\Phi}'_z \mathbf{q}_e, \quad (21)$$

где $\mathbf{\Phi}'_y = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3)$, $\mathbf{\Phi}'_z = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3)$. Подставим (20), (21) в (3):

$$\delta \mathbf{q}_e^{\top} \left\{ \underbrace{\iint_{\Omega_e} [(\mathbf{\Phi}'_y)^{\top} \mathbf{\Phi}'_y + (\mathbf{\Phi}'_z)^{\top} \mathbf{\Phi}'_z] d\Omega_e}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{q}_e - \underbrace{\iint_{\Omega_e} [(\mathbf{\Phi}'_y)^{\top} z - (\mathbf{\Phi}'_z)^{\top} y] d\Omega_e}_{\mathbf{R}_e^{\text{tor}}} \right\} = 0.$$

Отсюда, если ввести обозначения

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 & \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 \\ \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \gamma_1 & \beta_2^2 + \gamma_2^2 & \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 \\ \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 & \beta_3 \beta_2 + \gamma_3 \gamma_2 & \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{pmatrix}_e, \quad \mathbf{R}_e^{\text{tor}} = \begin{pmatrix} \beta_1 z_{cg}^e - \gamma_1 y_{cg}^e \\ \beta_2 z_{cg}^e - \gamma_2 y_{cg}^e \\ \beta_3 z_{cg}^e - \gamma_3 y_{cg}^e \end{pmatrix}_e,$$

следует, что $\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{R}_e^{\text{tor}}$. Здесь y_{cg}^e, z_{cg}^e – координаты центра тяжести конечного элемента e .

В случае задачи изгиба в выражениях (20), (21) функцию $\varphi_e(y, z)$ надо заменить на $\bar{\psi}_e(y, z)$, а координатами вектора $\mathbf{q}_e = (F_1^b \ F_2^b \ F_3^b)^{\top}$ будут значения функции коробления при изгибе $\bar{\psi}_e(y, z)$ в узлах элемента e . Подставляя модифицированные выражения в вариационный функционал (11), получаем

$$\delta \mathbf{q}_e^{\top} \left\{ \underbrace{\iint_{\Omega_e} [(\mathbf{\Phi}'_y)^{\top} \mathbf{\Phi}'_y + (\mathbf{\Phi}'_z)^{\top} \mathbf{\Phi}'_z] d\Omega_e}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{q}_e - \right.$$

$$\left. - \underbrace{\iint_{\Omega_e} \left[(\mathbf{\Phi})^{\top} (a_1 y + a_2 z) - \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_1 (\mathbf{\Phi}'_y)^{\top} (z - z_0)^2 - \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_2 (\mathbf{\Phi}'_z)^{\top} (y - y_0)^2 \right] d\Omega_e}_{\mathbf{R}_e^b} \right\} = 0.$$

В результате матрица жесткости конечного элемента будет такой же, как и в случае кручения, а вектор узловых реакций имеет вид

$$\mathbf{R}_e^b = \frac{a_1 y_{cg}^e + a_2 z_{cg}^e}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_1 (z_{cg}^e - z_0)^2 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_e -$$

$$- \frac{\nu}{2(1+\nu)} a_2 (y_{cg}^e - y_0)^2 \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}_e.$$

Как для задачи кручения, так и для задачи изгиба неизвестной функцией является функция коробления. Поскольку вариационные функционалы (3) и (11) приводят к краевой задаче Неймана (5) и (12) соответственно, неизвестные функции определяются с точностью до произвольной постоянной. Поэтому в одном из узлов области или контура нужно задать произвольное значение разрезающей функции. Пусть в узле $e = 1$ значение функции коробления равно нулю. Далее представим **алгоритм решения**.

1°. Выполняем сборку матрицы системы линейных алгебраических уравнений с разреженной симметричной положительно определенной матрицей

коэффициентов $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N^{ele}} \mathbf{P}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{P}_e$, где N^{ele} – количество конечных элементов, \mathbf{P}_e – матрица перестановок размерностью $3 \times N$, где N – размерность конечно-элементной задачи.

2°. Производим факторизацию $\mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$, где \mathbf{L} – нижняя треугольная матрица.

3°. Для задачи кручения собираем вектор правой части $\mathbf{b}^{tor} = \sum_{e=1}^{N^{ele}} \mathbf{P}_e^T \mathbf{R}_e^{tor}$ и,

выполняя прямую и обратную подстановки, находим узловые значения функции коробления φ .

4°. На основании (21), (1), (4), (17)–(19) определяем соответственно значения

производных $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ в центрах тяжести конечных элементов (они же являются точками Гаусса), в узлах конечных элементов, жесткость

стержня на кручение I_{tor} , y_0, z_0, y_{CB}, z_{CB} , а также напряжения τ_{yx}^{tor} , τ_{zx}^{tor}

при $\Theta' = \frac{1}{G \cdot I_{tor}}$ и значение крутящего момента M_{tor} . Поскольку $M_{tor} \neq 1$,

то полученные значения касательных напряжений пересчитываются так, чтобы обеспечить $M_{tor} = 1$.

5°. Для задачи изгиба собираем векторы правых частей для единичных

состояний $\mathbf{b}^0 = \sum_{e=1}^{N^{ele}} \mathbf{P}_e^T \mathbf{R}_e^b |_{Q_y=1, Q_z=0}$ и $\mathbf{b}^1 = \sum_{e=1}^{N^{ele}} \mathbf{P}_e^T \mathbf{R}_e^b |_{Q_y=0, Q_z=1}$, выполняем

прямую и обратную подстановки и находим узловые значения функции коробления $\bar{\psi}$.

6°. На основании соотношений, аналогичных (21), определяем производные

$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}$, $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}$ в узлах сетки и напряжения $\tau_{yx}^0, \tau_{zx}^0, \tau_{yx}^1, \tau_{zx}^1$ (6). Определяем

также коэффициенты коррекции сдвига k_y, k_z согласно [9].

Для решения системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей используется solver PARDISO [11] из библиотеки процедур высокой производительности Intel Math Kernel Library.

Изложенный подход реализован в программе TORFEM. Расчетная модель – контуры сечения и генерация конечно-элементной сетки – создается программой SCAD [2] (SCAD – конечно-элементная программа для анализа строительных конструкций (www.scadsoft.com)). TORFEM считывает файл с данными о топологии и геометрии расчетной модели и в соответствии с представленным выше алгоритмом производит вычисления, результаты которых представляются графически в виде полей напряжений и в табличной форме.

5. Численные результаты. Для тестирования задачи кручения рассмотрим стержень прямоугольного сечения с отношением сторон a/b . Плотность сетки $h/a = 0.01$, где h – шаг сетки. В табл. 1 приведено сравнение результатов расчета I_{tor} предложенным методом с решением, полученным в [1], для стержня прямоугольного поперечного сечения со стороной $a = 1$ м.

Таблица 1

a/b	$I_{\text{тор}}, \text{М}^4$	
	Результаты [1]	Предлагаемый метод
1.0	0.1409	0.1405
2.0	0.02859	0.02850

Тестирование задачи изгиба выполним на основе сравнения с результатами [9]. Для расчетов выбран стержень квадратного сечения $a = 1$, $\nu = 0.25$, $h/a = 0.0005$ при $Q_y = 0$, $Q_z = 1$. Распределение напряжений τ_{zx} , $\text{Н}/\text{м}^2$, приведено на рис. 2. Крестик с символом СВ показывает положение центра изгиба.

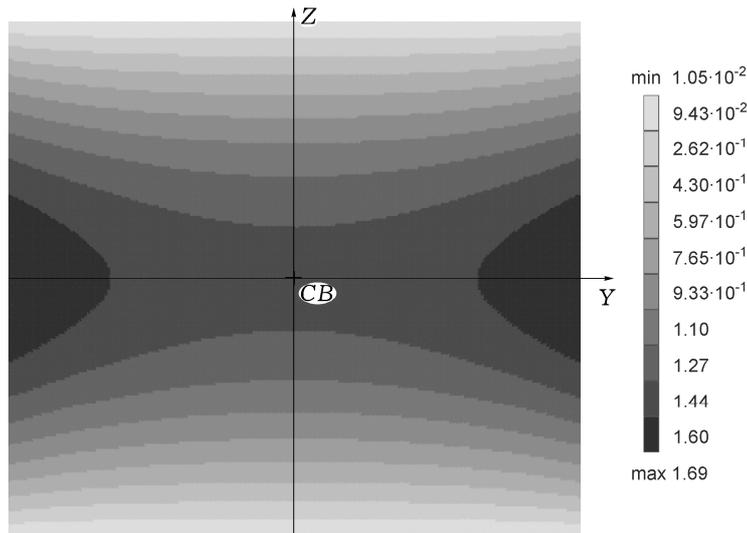


Рис. 2

В табл. 2 представлены результаты сравнения вычисленных характерных факторов с результатами работы [9]. Здесь $\max\{\tau_{zx}/(1.5Q_z/A)\}$ – наибольшее касательное напряжение, отнесенное к максимальному касательному напряжению, полученному по формуле Д. И. Журавского, k_z – коэффициент коррекции сдвиговой площади (shear correction factor), $k_y = A_{sy}/A$, $k_z = A_{sz}/A$, A_{sy} , A_{sz} – сдвиговые площади, A – площадь поперечного сечения [9]. Касательные напряжения τ_{zx} , полученные на основании элементарной теории расчета балок, не зависят от координаты y и достигают наибольшего значения $1.5Q_z/A$ при $z = 0$. Решение этой же задачи на основе теории Сен-Венана (рис. 2) показывает, что максимальные напряжения оказываются на 33 % меньше, а распределение напряжений по ширине сечения не является постоянным.

Таблица 2

Фактор	Результаты [9]	Предлагаемый метод
$\max\{\tau_{zx}/(1.5Q_z/A)\}$	1.126	1.12666
k_z	0.8295	0.8296

На рис. 3 приведены напряжения τ_{zx} , $\text{кН}/\text{мм}^2$, для железнодорожного рельса от действия поперечной силы $Q_z = 1 \text{ кН}$, $Q_y = 0$, $\nu = 0.3$. Размеры сечения представлены в [9]. Наибольшие значения напряжений достигаются в шейке рельса в местах закруглений, поэтому для этой задачи детальное описание контура сечения именно в этих зонах является существенным.

В табл. 3 представлено сравнение характерных факторов решения для этого случая с результатами работы [9], в которой численное решение получено на прямоугольной достаточно редкой сетке, а результаты рассматриваемой

работы – на треугольной сетке, содержащей 9909 узлов, многократно превосходящей количество узлов в [9]. Кроме того, в [9] не указано, какое количество узлов использовалось для аппроксимации закруглений. В этой работе каждое закругление аппроксимировалось ломаной с десятью узлами. Поэтому считаем, что расхождение результатов двух разных приближенных подходов лежит в пределах допустимого.

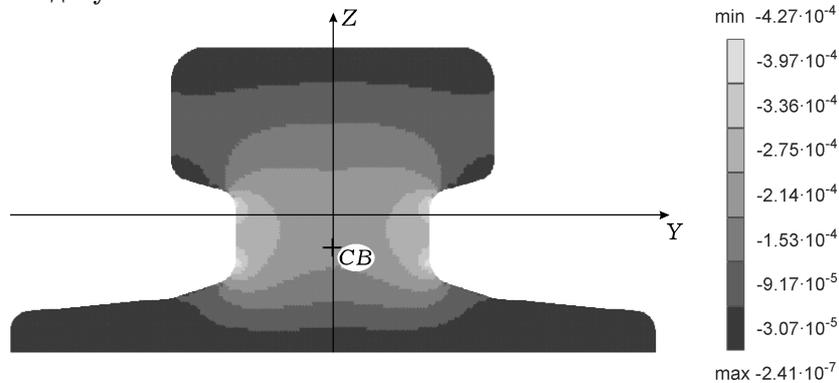


Рис. 3

Таблица 3

Фактор	Результаты [9]	Предлагаемый метод	Погрешность, %
$\min \{ \tau_{zx} \}, \text{ кН/см}^2$	$-4.056 \cdot 10^{-2}$	$-4.27 \cdot 10^{-2}$	5
$z_0, \text{ см}$	5.078	5.107	6
k_y	0.6836	0.6843	0.1
k_z	0.4468	0.4505	0.1

На рис. 4 приведены напряжения τ_{zx} , кН/м², для железобетонной балки моста от действия поперечной силы $Q_z = -1$ кН при $Q_y = 0$, $\nu = 0.2$. Область поперечного сечения является двухсвязной. Размеры сечения представлены в [9]. Наибольшие значения напряжений достигаются в наклонных стенках.

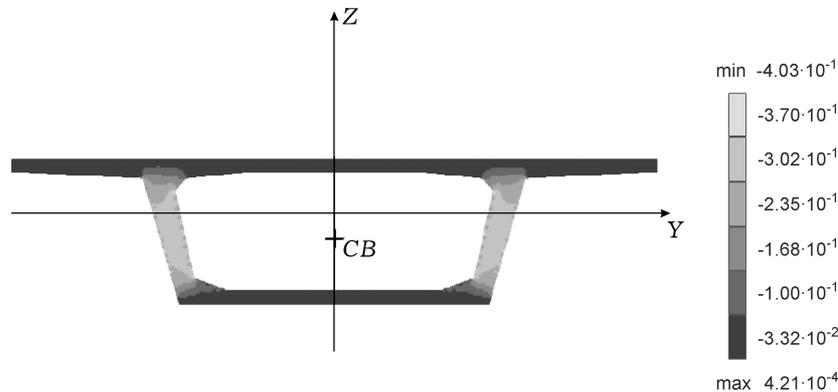


Рис. 4

В табл. 4 представлено сравнение характерных факторов этой задачи, полученных по предлагаемому подходу, с результатами работы [9].

Таблица 4

Фактор	Результаты [9]	Предлагаемый метод	Погрешность, %
$z_0, \text{ м}$	1.775	1.774	–
k_y	0.5993	0.5987	0.1
k_z	0.2311	0.2322	0.5

Результаты, полученные по предлагаемой методике, согласуются с данными других авторов, т. е. предлагаемый подход работает корректно.

На рис. 5 изображена сеточная многосвязная область поперечного сечения балки эстакады, причем показана первично выбранная сетка. Последующие сетки получены сгущением каждой из предыдущих в два раза. В табл. 5 приведены значения наибольших напряжений от действия поперечной силы $Q_z = -1$ кН и геометрических характеристик сечения в зависимости от плотности сетки. Поскольку на самой плотной сетке результаты решения практически не отличаются от соответствующих значений, полученных на предыдущей сетке, будем считать их окончательными. На рис. 6, рис. 7 приведены соответственно напряжения τ_{xz} , τ_{xy} (в кН/м²) при действии поперечной силы $Q_z = -1$ кН для $Q_y = 0$, $\nu = 0.2$, полученные на последней сетке. Наибольшие по абсолютной величине касательные напряжения τ_{xz} возникают в средней стенке, а наибольшие по абсолютной величине касательные напряжения τ_{xy} – в поясах.

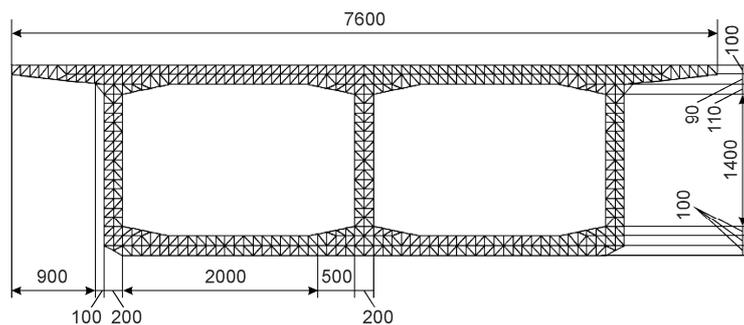


Рис. 5

Таблица 5

Фактор	539 узлов	1817 узлов	6587 узлов
$\min \{ \tau_{xz} \}, \text{ кН/м}^2$	-1.00	-1.04	-1.08
$I_{\text{тор}}, \text{ м}^4$	5.67	5.74	5.77
$z_{CB}, \text{ м}$	1.00	1.08	1.08
$z_0, \text{ м}$	1.0019	1.0023	1.0024
k_y	0.655	0.647	0.644
k_z	0.276	0.268	0.266

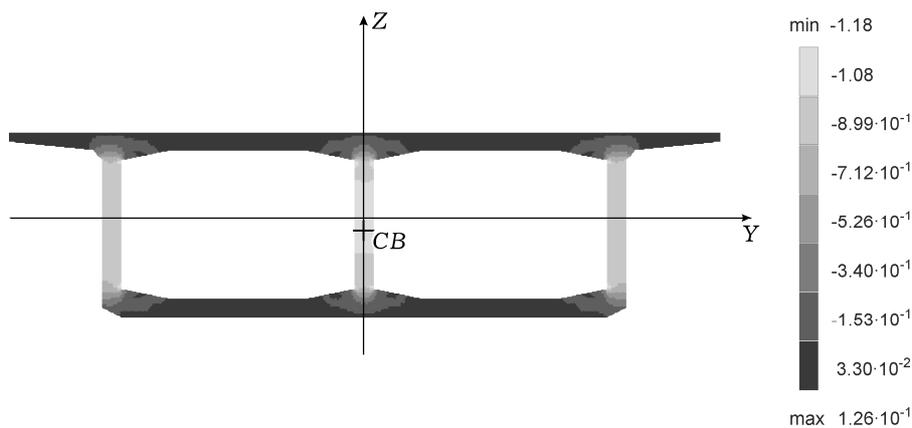


Рис. 6

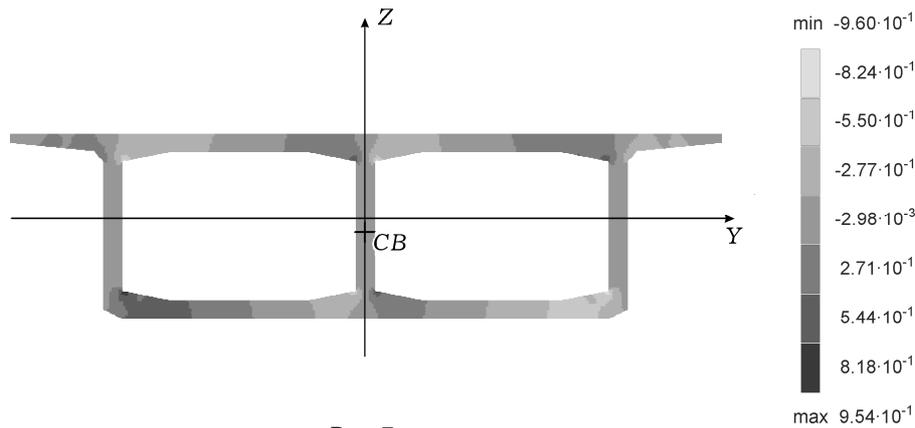


Рис. 7

До сих пор во всех решенных задачах использовалась регулярная (структурированная) сетка.

Вернемся теперь к задаче об изгибе стержня квадратного поперечного сечения поперечной силой: $a = 1$, $\nu = 0.25$, $Q_y = 0$, $Q_z = 1$. Распределение касательных напряжений τ_{zx} при использовании структурированной сетки (40 401 узел), фрагмент которой показан на рис. 8, представлено на рис. 2. На рис. 9 показан фрагмент неструктурированной сетки (21 605 узлов), а на рис. 10 – распределение напряжений τ_{zx} для этой сетки. Здесь вследствие неоднородности сетки в полях напряжений появляются флуктуации, которые искажают истинную картину.

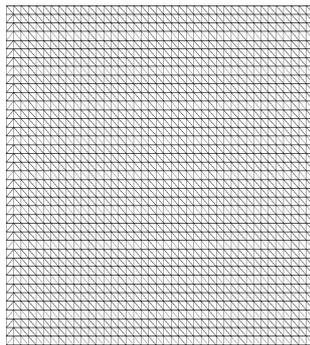


Рис. 8. Фрагмент структурированной сетки

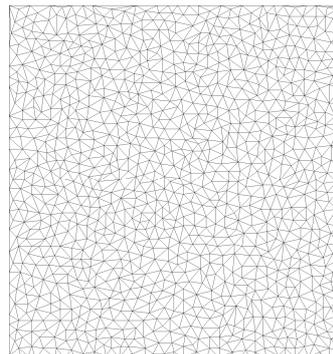


Рис. 9. Фрагмент неструктурированной сетки

Полученное решение при использовании функции коробления эквивалентно решению задачи Неймана (12). Для сравнения данная задача была решена при использовании функции напряжений Прандтля. Были получены соответствующие вариационные функционалы для задачи кручения и изгиба, выполнена конечно-элементная дискретизация и реализован вычислительный алгоритм. Вследствие ограниченности объема статьи приводятся только окончательные результаты. Данный подход эквивалентен решению задачи Дирихле, где на границе области задана разрешающая функция, а не нормальная производная. Оказалось, что вид решения мало отличается от приведенного на рис. 10. Это означает, что решение задачи Дирихле для неоднородной сетки приводит к появлению таких же флуктуаций полей напряжений, как и решение задачи Неймана, причем сгущение неструктурированной сетки практически не улучшает решения. При этом геометрические характеристики сечения получаются с достаточной для инженерных целей точностью (табл. 6).

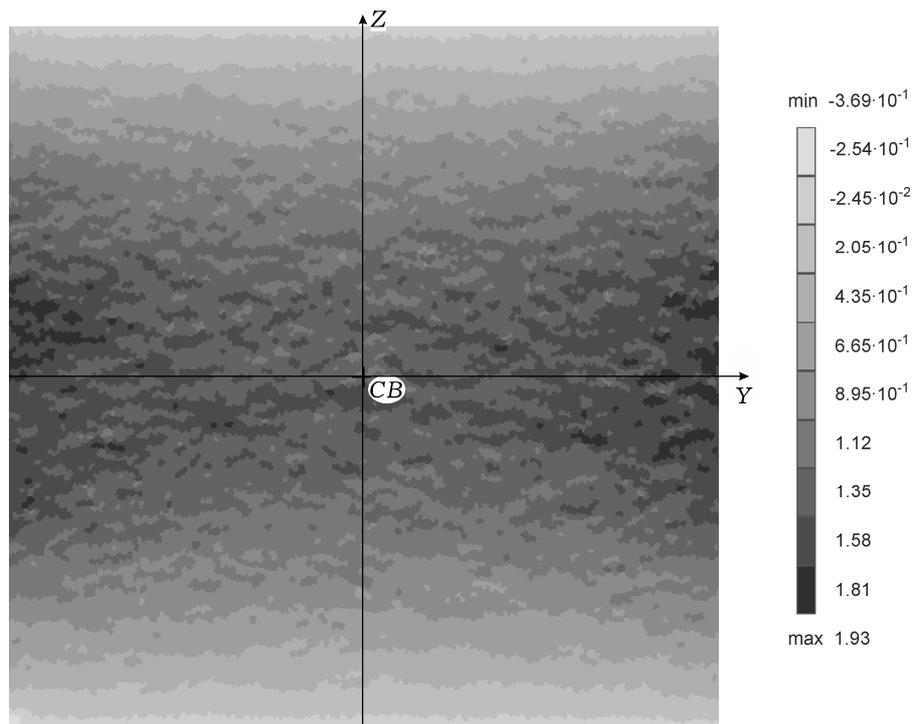


Рис. 10

Таблица 6

Фактор	Структурированная сетка		Неструктурированная сетка	
	Функция коробления	Функция Прандтля	Функция коробления	Функция Прандтля
$I_{\text{тор}}, \text{м}^4$	0.1405	0.1405	0.1384	0.1409
k_y	0.8296	0.8295	0.8184	0.8159
k_z	0.8296	0.8295	0.8211	0.8155

Для структурированной сетки результаты двух методов практически совпали. Для неструктурированной сетки результаты получены с точностью до 1.7 %, если решение на структурированной сетке принять за эталонное.

Таким образом, для корректного решения рассматриваемой задачи, по крайней мере, при использовании треугольных конечных элементов низкого порядка необходима структурированная сетка.

Заключение. На основе решения задачи Сен-Венана о кручении и изгибе призматических стержней разработан численный подход для анализа геометрических характеристик сечений произвольной формы, а также анализа касательных напряжений, реализованный в программном комплексе SCAD – TOR-FEM. Выбор функции коробления в качестве разрешающей функции позволил построить единый и достаточно простой вычислительный алгоритм для задач кручения и изгиба, а также избежать сложностей, возникающих при использовании функции Прандтля в случае многосвязной области. Разрешающие соотношения для задачи кручения получены на основе вариационного принципа Лагранжа, а для задачи изгиба – на основе вариационного принципа Кастильяно. Для нахождения координат центра изгиба использовалась теорема Бетти о взаимности работ, упрощающая понимание того, что для определения координат центра изгиба и параметров y_0, z_0 достаточно знать только решение задачи о кручении. Применяемые подходы имеют четкое механическое обоснование, а полученные вариационные функционалы непосредственно используются для конечно-элементной дискретизации.

Верификация программного обеспечения проведена на основе сравнения полученных результатов с данными работ других авторов, а также с данными, приведенными в справочной литературе.

При использовании неструктурированной конечно-элементной сетки в численном решении появляются флуктуации. Показано, что решение задачи в терминах функции напряжений Прандтля не снимает этой проблемы. Отсюда следует вывод, что для анализа касательных напряжений необходима структурированная сетка. Приближенное вычисление геометрических характеристик сечений может быть выполнено и при использовании неструктурированной сетки.

В качестве направления дальнейших исследований предполагается реализовать шестиузловые треугольные конечные элементы, имеющие более высокий порядок аппроксимации.

1. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания. Т. 1. – Москва: Машиностроение, 1968. – 831 с.
2. Карпиловский В. С., Криксунов Э. З., Маляренко А. А., Микитаренко М. А., Перельмутер А. В., Перельмутер М. А. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD. – Москва: Изд-во АСВ, 2004. – 590 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 939 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
5. Новожилов В. В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 371 с.
6. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. – Москва: АСВ, 2005. – 708 с.
7. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
8. Dong S. B., Alpdogan C., Tacioglu E. Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory // Int. J. Solids Struct. – 2010. – **47**, No. 13. – P. 1651–1665.
9. Gruttmann F., Wagner W. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections // Comput. Mech. – 2001. – **27**, No. 3. – P. 199–207.
10. Gruttmann F., Sauer R., Wagner W. Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-sections // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1999. – **45**, No. 7. – P. 865–889.
11. Schenk O., Gärtner K. Two-level dynamic scheduling in PARDISO: Improved scalability on shared memory multiprocessing systems // Parallel Comput. – 2002. – **28**, No. 2. – P. 187–197.
12. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. Volume 1: The basis. – Elsevier, 2000. – 689 p.

ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КРУЧЕННЯ І ЗГИНУ ПРИЗМАТИЧНИХ СТЕРЖНІВ ДОВІЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Розроблено програмний комплекс визначення геометричних характеристик і аналізу дотичних напружень призматичних стержнів довільного поперечного перерізу на етапі препроцесорної і постпроцесорної обробки даних при скінченно-елементному аналізі. На основі принципу можливих переміщень отримано варіаційні функціонали для задачі Сен-Венана про кручення призматичного стержня і про згин поперечною силою, що не викликає закручування, які безпосередньо використано для отримання розв'язувальних співвідношень методу скінченних елементів. На основі теореми Бетті про взаємність робіт визначено координати центру згину. Всі співвідношення сформульовано стосовно функції короблення, що дозволяє уникнути проблем, пов'язаних з неоднозначністю при використанні функцій напружень Прандтля у випадку багатозв'язної області.

ON NUMERICAL REALIZATION OF TORSION AND BENDING PROBLEMS FOR PRISMATIC BARS WITH ARBITRARY CROSS-SECTIONS

The software for computing of geometrical characteristics and analysis of shear stresses of prismatic bars with arbitrary cross-sections for application on pre-processor and post-processor stages of FEA software is developed. The variation functionals for Saint-Venant's problem on torsion of prismatic bar and its bending by transversal force without torsion are obtained on the base of principle of virtual displacements. These functionals are used directly for finite element discretization. The coordinates of centre of bending are evaluated on the base of the Maxwell – Betti reciprocal work theorem. All relations are formulated with respect to warping function, which avoids the problems associated with the non-uniqueness by using the Prandtl stress function in the case of a multiply connected domain.

¹ Tadeusz Kościuszko Cracow
Univ. of Technology, Краков, Польша,
² Inst. of Fundamental Technological
Research PAS, Варшава, Польша

Получено
23.06.11