

ЗАДАЧА ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Методом малого параметра с использованием обобщенных комплексных потенциалов задача термовязкоупругости для кусочно-однородной пластинки сведена к рекуррентной последовательности задач термоупругости. В полученном решении все величины зависят от степеней малого параметра, замена которых операторными выражениями позволяет находить напряжения в любой момент времени. Приведено аналитическое решение задачи для пластинки с одним включением, описаны результаты численных исследований.

Во многих отраслях современной промышленности широко применяются конструкции с элементами в виде пластин из вязкоупругих материалов, содержащих включения из других материалов. Под действием температурных полей вблизи таких включений могут возникать значительные концентрации напряжений, существенно меняющиеся с течением времени, что необходимо учитывать при расчете конструкций на прочность. В связи с этим возникает необходимость разработки методов определения термовязкоупругого состояния кусочно-однородных пластин. Этот вопрос в определенной мере решен для изотропных пластин [4, 6, 11]. Для анизотропных же кусочно-однородных пластин частично проведены исследования лишь для случая силовых воздействий [3], а температурные воздействия в силу определенных трудностей оставались неисследованными. В статье [5] разработан подход решения таких задач термовязкоупругости для анизотропной пластинки с жесткими включениями. В данной статье указанный подход распространен на случай пластинки с упругими включениями, исследовано влияние времени, упругих характеристик пластинки и включения на значения напряжений. Заметим, что аналогичные задачи для пластинки с упругими включениями без учета вязкоупругих свойств материалов ранее были решены в работах [8, 12] для изотропных пластин, а в [13, 14] – для анизотропных.

Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат Oxy кусочно-однородную многосвязную анизотропную пластинку с отверстиями, тонкими абсолютно жесткими кольцами, абсолютно жесткими теплопроводящими включениями, находящимися с пластинкой в условиях идеального теплового контакта, и многосвязными упругими включениями, находящимися с пластинкой в условиях идеального теплового и механического контактов. Пластинка занимает область S , ограничена внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_ℓ , $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$. Включения занимают многосвязные области S^ℓ . На внешнем контуре пластинки, контурах отверстий, жестких колец пластинки и включений заданы значения температуры T_ℓ или плотности потока тепла $q_{n\ell}$. Во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$, $r = 1, \dots, R$, действуют сосредоточенные источники тепла мощности q_r^0 . В частном случае, когда контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем рассматривать бесконечную кусочно-однородную многосвязную пластинку. В последнем случае будем предполагать, что на бесконечности температура ограничена или задан однородный поток тепла интенсивности q под углом α к оси Ox . Материалы пластинки и включений обладают свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости.

Определение термовязкоупругого состояния рассматриваемой пластинки сводится к решению сначала задачи теплопроводности, затем задачи термовязкоупругости. Эти решения будем строить с использованием обобщенных комплексных потенциалов.

Решение задачи теплопроводности. Решение задачи теплопроводности для рассматриваемой кусочно-однородной среды сводится к нахождению комплексных потенциалов задачи теплопроводности $F_3(z_3)$ для пластинки-матрицы и $F_3^\ell(z_3^\ell)$ для каждого из включений, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям. Если потенциалы определены, то температура и поток тепла через площадку с нормалью \mathbf{n} в пластинке-матрице вычисляются по формулам [1, 2, 9]

$$T(x, y) = T_0 + T^* + 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad (1)$$

$$q_n = q_n^* - 2 \operatorname{Re} [i\alpha \partial_{3s} F_3'(z_3)], \quad (2)$$

где T_0 – начальная температура; $T^*(x, y)$, q_n^* – температура и плотность потока тепла, возникающие в бесконечной сплошной пластинке под действием однородного потока тепла и представимые в виде

$$T^*(x, y) = q(r_x x + r_y y), \quad q_n^* = -q(\cos \alpha \cos nx + \sin \alpha \cos ny), \quad (3)$$

$$r_x = (k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha) \frac{1}{\alpha^2}, \quad r_y = (k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha) \frac{1}{\alpha^2},$$

$$\alpha^2 = k_{11} k_{22} - k_{12}^2,$$

$F_3(z_3)$ – произвольная функция, аналитическая в области изменения обобщенного комплексного переменного $z_3 = x + \mu_3 y$; $\mu_3 = (-k_{12} + i\alpha)/k_{22}$ – корень характеристического уравнения теплопроводности

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0, \quad (4)$$

k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала; $\partial_{3s} = \mp dz_3/ds$, верхние знаки относятся к внешнему контуру области, нижние – к внутренним.

Аналогичные формулы имеют место для каждого из включений:

$$T^\ell(x, y) = T_0 + 2 \operatorname{Re} F_3^\ell(z_3^\ell), \quad q_n^\ell = -2 \operatorname{Re} [i\alpha^\ell \delta_3^\ell F_3^{\ell'}(z_3^\ell)], \quad z_3^\ell = x + \mu_3^\ell y,$$

$$\mu_3^\ell = (-k_{12}^\ell + i\alpha^\ell) \frac{1}{k_{22}^\ell}, \quad (\alpha^\ell)^2 = k_{11}^\ell k_{22}^\ell - (k_{12}^\ell)^2, \quad \delta_3^\ell = \mp \frac{dz_3^\ell}{ds}.$$

Здесь и далее величины с верхним индексом ℓ относятся к ℓ -му включению с областью S^ℓ , без такого индекса – к пластинке-матрице.

Для внешнего контура пластинки-матрицы и контуров ее отверстий или жестких колец граничные условия имеют вид [1, 2, 9]

$$2 \operatorname{Re} F_3(t_3) = T_\ell - T^* - T_0 \quad (5)$$

в случае задания на контуре температуры T_ℓ и

$$2 \operatorname{Re} [i\alpha F_3(t_3)] = \pm \int_0^s [q_{n\ell} - q_n^*(t)] ds + c \quad (6)$$

при задании на контуре плотности потока тепла $q_{n\ell}$, где c – постоянная.

На контурах контактов пластинки-матрицы и теплопроводящих жестких или упругих включений граничные условия записываются так:

$$2 \operatorname{Re} [F_3(t_3) - F_3^\ell(t_3^\ell)] = -T^*(t),$$

$$2 \operatorname{Re} [i\alpha F_3(t_3) - \alpha^\ell F_3^\ell(t_3^\ell)] = \int_0^s q_n^*(t) ds + c. \quad (7)$$

Комплексный потенциал задачи теплопроводности $F_3(z_3)$ для пластинки-матрицы определен в области S_3 , получаемой из заданной области S указанным выше аффинным преобразованием и ограниченной контурами $L_{3\ell}$, соответствующими контурам L_ℓ области S . При этом в общем случае функция $F_3(z_3)$ имеет вид [1, 9]

$$F_3(z_3) = gc_0 + \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}-g} D_{3\ell} [\ln(z_3 - z_{3\ell}) - g \ln(z_3 - z_{3\mathcal{L}})] + \sum_{j=1}^R \delta_{3r}^0 [\ln(z_3 - z_{3r}^0) - g \ln(z_3 - z_{3\mathcal{L}})] + F_{30}(z_3), \quad (8)$$

где $g = 0$ для конечной области; $g = 1$ в случае бесконечной области; c_0 – вещественная константа, равная нулю для конечной области и определяемая из граничных условий для бесконечной области;

$$D_{3\ell} = -\frac{q_\ell}{4\pi\alpha}, \quad \delta_{3r}^0 = -\frac{q_r^0}{4\pi\alpha}, \quad (9)$$

$z_{3\ell}$ – точки, соответствующие при аффинном преобразовании произвольной точке z_ℓ внутри контура L_ℓ ; $z_{3r}^0 = x_r^0 + \mu_3 y_r^0$; $F_{30}(z_3)$ – функция, голоморфная в многосвязной области S_3 . При этом учтено, что для бесконечной области S из условий ограниченности температуры на бесконечности следует, что

$$T_\infty = 2c_0, \quad \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} D_{3\ell} + \sum_{r=1}^R \delta_{3r}^0 = 0.$$

Комплексные потенциалы $F_3^\ell(z_3^\ell)$ для включений определены в областях S_3^ℓ , получаемых из заданных областей S^ℓ аффинными преобразованиями $z_3^\ell = x + \mu_3 y$ и ограниченных контурами $L_{3\ell}^\ell$, соответствующими контурам L_ℓ^ℓ области S^ℓ . Для комплексных потенциалов включений по аналогии с (8) получаем выражения

$$F_3^\ell(z_3^\ell) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}^\ell} D_{3\ell}^\ell \ln(z_3^\ell - z_{3\ell}^\ell) + \sum_{r=1}^{R^\ell} \delta_{3r}^{0\ell} \ln(z_3^\ell - z_{3r}^{0\ell}) + F_{30}^\ell(z_3^\ell), \quad (10)$$

где $D_{3\ell}^\ell$, $\delta_{3r}^{0\ell}$ – величины, определяемые формулами (9), в которых нужно заменять q_ℓ , q_r^0 и α на q_ℓ^ℓ , $q_r^{0\ell}$ и α^ℓ .

Решение задачи термовязкоупругости. При использовании комплексных потенциалов определение термовязкоупругого состояния рассматриваемой пластинки-матрицы сводится к нахождению функций [5]

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j \geq 0} \lambda^j \Psi_{jk}(z_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где

$$\Psi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + N_{jk}(z_k) + \Phi_{jk}(z_k),$$

$$N_{jk}(z_k) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} (A_{jk\ell} z_k + B_{jk\ell}) \ln(z_k - z_{k\ell}) + \sum_{r=1}^R A_{jkr}^0 (z_k - z_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0).$$

Здесь λ – малый параметр, связанный с изменением коэффициента Пуассона ν_{12} ; $\Phi_{jk}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями

$$z_k = x + \mu_k y \quad (12)$$

и ограниченных контурами $L_{k\ell}$, соответствующими L_ℓ при аффинных преобразованиях; μ_k – корни характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \quad (13)$$

a_{ij} – коэффициенты деформации:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad (14)$$

E_i , ν_{ij} – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для соответствующих направлений, причем функция $\Phi_{j3}(z_3)$ является известной и представляется выражением

$$\Phi_{j3}(z_3) = d^j r_3^0 \int F_3(z_3) dz_3, \quad (15)$$

в котором

$$d = \frac{2a_{11}\mu_3^2}{a_{11}\mu_3^4 - 2a_{16}\mu_3^3 + (2a_{12}^0 + a_{66})\mu_3^2 - 2a_{26}\mu_3 + a_{22}},$$

$$r_3^0 = -\frac{\alpha_1\mu_3^2 - \alpha_6\mu_3 + \alpha_2}{a_{11}\mu_3^4 - 2a_{16}\mu_3^3 + (2a_{12}^0 + a_{66})\mu_3^2 - 2a_{26}\mu_3 + a_{22}}, \quad (16)$$

Γ_{jk} , $A_{jk\ell}$, $B_{jk\ell}$, A_{jkr}^0 , $k = 1, 2$, – постоянные, определяемые при $j = 0$ и $j = 1$ из решения систем уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{a_{22} - a_{11}\mu_k^4}{\mu_k} \right) \Gamma_{0k} = \left(0, 0, 0, 2 \operatorname{Re} \frac{\alpha_1\mu_3^2 - \alpha_2}{r_3^0 \mu_3} \Gamma_{03} \right),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{0k\ell} = \left(0, 0, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 A_{03\ell}}{a_{11} r_3^0}, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 A_{03\ell}}{a_{22} r_3^0 \mu_3} \right),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{0k\ell} = \left(0, 0, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 B_{03\ell}}{a_{11} r_3^0}, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 B_{03\ell}}{a_{22} r_3^0 \mu_3} \right),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{0kr}^0 = \left(0, 0, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_1 A_{03r}^0}{a_{11} r_3^0}, -2 \operatorname{Re} i \frac{\alpha_2 A_{03r}^0}{a_{22} r_3^0 \mu_3} \right), \quad (17)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{a_{22} - a_{11}\mu_k^4}{\mu_k} \right) \Gamma_{1k} = \left(0, 0, 0, -2 \operatorname{Re} \frac{\delta_{k3}(\alpha_1\mu_k^2 - \alpha_2)d}{\mu_k r_3^0} \Gamma_{13} \right),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\mu_k, 1, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{1k\ell} = \left(0, 0, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_1 d A_{13\ell}}{a_{11} r_3^0}, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_2 d A_{13\ell}}{a_{22} \mu_3 r_3^0} \right),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\mu_k, 1, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{1k\ell} = \left(0, 0, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_1 d B_{13\ell}}{a_{11} r_3^0}, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_2 d B_{13\ell}}{a_{22} \mu_3 r_3^0} \right),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\mu_k, 1, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{1kr}^0 = \left(0, 0, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_1 d A_{13r}^0}{a_{11} r_3^0}, 2 \operatorname{Re} i \frac{\delta_{k3} \alpha_2 d A_{13r}^0}{a_{22} \mu_3 r_3^0} \right), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{j3} &= r_3^0 c_{30} d^j, & A_{j3\ell} &= r_3^0 D_{3\ell} d^j, \\ A_{j3r}^0 &= r_3^0 \delta_{3r}^0 d^j, & B_{j3\ell} &= r_3^0 (b_{3\ell} - z_{3\ell} D_{3\ell}) d^j. \end{aligned}$$

Для определения же остальных Γ_{jk} , $A_{jk\ell}$, $B_{jk\ell}$, A_{jkr}^0 (при $j \geq 2$) получаются системы, аналогичные (18). Эти системы следуют из (18), если правые части в последних положить равными нулю и в левых частях величины Γ_{1k} , $A_{1k\ell}$, $B_{1k\ell}$, A_{1kr}^0 заменить на Γ_{jk} , $A_{jk\ell}$, $B_{jk\ell}$, A_{jkr}^0 .

При определении общего вида комплексных потенциалов для включений нужно исходить из того, что материалы включений могут обладать вязкоупругими свойствами или быть упругими со свойствами, не меняющимися с течением времени. В случае упругих включений комплексные потенциалы для включений от малого параметра λ не зависят и их можно получить по приведенным формулам, формально полагая в них $\lambda^j = 1$, т.е. сохраняя их только в нулевом приближении. Если же включения вязкоупругие, то для их материалов нужно вводить свои малые параметры. Будем принимать для всех включений малый параметр одинаковым, равным малому параметру λ для пластинки-матрицы, и тогда для их комплексных потенциалов получатся выражения, аналогичные (11). Таким образом, в общем случае для комплексных потенциалов включений будем иметь

$$\Phi_k^\ell(z_k^\ell) = \sum_{j \geq 0} \lambda^j \gamma_j \Psi_{jk}^\ell(z_k^\ell), \quad (19)$$

где $\gamma_j = 1$ в случае вязкоупругого включения и $\gamma_j = \delta_{j0}$ (δ_{j0} – символ Кронекера) в случае упругого включения;

$$\Psi_{jk}^\ell(z_k^\ell) = N_{jk}^\ell(z_k^\ell) + \Phi_{jk}^\ell(z_k^\ell),$$

$$N_{jk}^\ell(z_k^\ell) = \sum_{\ell=1}^{\ell} (A_{jk\ell}^\ell z_k^\ell + B_{jk\ell}^\ell) \ln(z_k^\ell - z_{k\ell}^\ell) + \sum_{r=1}^{R^\ell} A_{jkr}^{\ell 0} (z_k^\ell - z_{kr}^{\ell 0}) \ln(z_k^\ell - z_{kr}^{\ell 0}),$$

$A_{jk\ell}^\ell$, $B_{jk\ell}^\ell$, $A_{jkr}^{\ell 0}$ – постоянные, вычисляемые по аналогии с постоянными $A_{jk\ell}$, $B_{jk\ell}$, A_{jkr}^0 для пластинки-матрицы с той разницей, что все величины в соответствующих формулах заменяются величинами с верхним индексом ℓ ; $\Phi_{jk}^\ell(z_k^\ell)$ – функции, голоморфные в конечных многосвязных областях S_k^ℓ , получаемых из заданной области S^ℓ аффинными преобразованиями

$$z_k^\ell = x + \mu_k^\ell y \quad (20)$$

и ограниченных контурами $L_{k\ell}^\ell$, соответствующими L^ℓ при аффинных преобразованиях; μ_k^ℓ – корни характеристического уравнения термоупругости

$$a_{11}^\ell \mu^4 - 2a_{16}^\ell \mu^3 + (2a_{12}^\ell + a_{66}^\ell) \mu^2 - 2a_{26}^\ell \mu + a_{22}^\ell = 0,$$

a_{ij}^ℓ – коэффициенты деформации для материала ℓ -го включения, причем

$$a_{11}^\ell = \frac{1}{E_1^\ell}, \quad a_{22}^\ell = \frac{1}{E_2^\ell}, \quad a_{12}^\ell = -\frac{\nu_{12}^\ell}{E_1^\ell} = -\frac{\nu_{21}^\ell}{E_2^\ell},$$

$$\Phi_{j3}^\ell(z_3^\ell) = \gamma_j (d^\ell)^j r_3^{\ell 0} \int F_3^\ell(z_3^\ell) dz_3^\ell,$$

$$r_3^{\ell 0} = -\frac{\alpha_1^\ell \mu_3^{\ell 2} - \alpha_6^\ell \mu_3^\ell + \alpha_2^\ell}{a_{11}^\ell \mu_3^{\ell 4} - 2a_{16}^\ell \mu_3^{\ell 3} + (2a_{12}^{\ell 0} + a_{66}^\ell) \mu_3^{\ell 2} - 2a_{26}^\ell \mu_3^\ell + a_{22}^\ell},$$

$$d^\ell = \frac{2a_{11}^\ell \mu_3^{\ell 2}}{a_{11}^\ell \mu_3^{\ell 4} - 2a_{16}^\ell \mu_3^{\ell 3} + (2a_{12}^{\ell 0} + a_{66}^\ell) \mu_3^{\ell 2} - 2a_{26}^\ell \mu_3^\ell + a_{22}^\ell}.$$

На контурах пластинки-матрицы комплексные потенциалы удовлетворяют граничным условиям [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) \Psi_{jk}(t_k) = \delta_{j0} (c_{1\ell}, c_{2\ell}) \quad (21)$$

в случае неподкрепленного контура и

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_{k0}, q_{k0}) \Psi_{jk}(t_k) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) (p_{k1}, q_{k1}) \Psi_{j-1,k}(t_k) +$$

$$+ \delta_{j0} (u_* - u^* - u_0, v_* - v^* - v_0) + (\omega_{j3} y, -\omega_{j3} x), \quad (22)$$

если на контуре заданы перемещения $u = u_*$, $v = v_*$. Здесь $\lambda_{1k} = \mu_k^2$, $\lambda_{2k} = 1$, $\lambda_{6k} = -\mu_k$; $c_{1\ell}$, $c_{2\ell}$ – произвольные постоянные,

$$p_{k0} = (\mu_k^2 - \nu_{12}^0) a_{11} - a_{16} \mu_k + \frac{\delta_{k3} \alpha_1}{r_3^0}, \quad p_{k1} = -a_{11} - \frac{\delta_{k3} \alpha_1 d}{r_3^0},$$

$$q_{k0} = -\mu_k \nu_{12}^0 a_{11} + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} + \frac{\delta_{k3} \alpha_2}{r_3^0 \mu_k}, \quad q_{k1} = -a_{11} \mu_k - \frac{\delta_{k3} \alpha_2 d}{\mu_k r_3^0}.$$

Аналогичные граничные условия имеют место для контуров отверстий каждого из включений.

Для контуров же контактов пластинки-матрицы и включений S^ℓ , где равны друг другу перемещения и противоположны усилия действия одного на другое, граничные условия записываются в виде

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) \Psi_{jk}(t_k) - \gamma_j (\lambda_{6k}^\ell, \lambda_{2k}^\ell) \Psi_{jk}^\ell(t_k^\ell)] = \delta_{j0} (c_{1\ell}, c_{2\ell}),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(p_{k0}, q_{k0}) \Psi_{jk}(t_k) - \gamma_j (p_{k0}^\ell, q_{k0}^\ell) \Psi_{jk}^\ell(t_k^\ell)] =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) [(p_{k1}, q_{k1}) \Psi_{j-1,k}(t_k) -$$

$$- \gamma_j (p_{k1}^\ell, q_{k1}^\ell) \Psi_{j-1,k}^\ell(t_k^\ell)] + \delta_{j0} (-u^* + u_0^\ell - u_0, -v^* +$$

$$+ v_0^\ell - v_0) + ((\omega_{j3} - \omega_{j3}^\ell) y, -(\omega_{j3} - \omega_{j3}^\ell) x). \quad (23)$$

После нахождения из граничных условий функций $\Psi_{jk}(z_k)$ и $\Psi_{jk}^\ell(z_k^\ell)$ для пластинки-матрицы комплексные потенциалы (11) находим, заменяя степени малого параметра λ^j временными операторами [5]

$$\lambda^j = \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathfrak{A}_\alpha^{*k}(-\beta_2) - \mathfrak{A}_\alpha^{*j-k}(-\beta_1 - \delta_1)}{-\beta_2 + \beta_1 + \delta_1}, \quad (24)$$

где $\mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_*)$ – оператор Работнова [10], воздействие которого на единицу имеет вид

$$\mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_*) \cdot 1 = \frac{1}{\beta_*} \left[1 - e^{-\beta_* [(1-\alpha_*)t]^{1-\alpha_*}} \right], \quad (25)$$

α_* , β_* , δ_* – реологические постоянные материала, связанные с изменением ν_{12} во времени,

$$D_1 = \frac{\delta_1}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2}{\beta_1 - \beta_2 + \delta_1} + 1 - 4\nu_{12}^0 \right], \quad D_2 = \frac{\delta_2}{4} \frac{E_1^0}{E_2^0} \left(1 - \frac{\delta_1}{\beta_1 - \beta_2 + \delta_1} \right), \quad (26)$$

α , δ_1 , β_1 , δ_2 , β_2 – реологические постоянные, связанные с изменениями модулей Юнга E_1 , E_2 ; E_1^0 , E_2^0 – мгновенные значения модулей Юнга, операторные выражения которых представляются в виде

$$E_1^* = E_1^0 [1 - \delta_1 \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_1 - \delta_1)], \quad \frac{1}{E_2^*} = \frac{1}{E_2^0} [1 + \delta_2 \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_2)]. \quad (27)$$

Формулы (24)–(27) имеют место и для каждого включения. Для включений они получаются из указанных заменой в них постоянных на соответствующие постоянные включений.

Вычислив степени λ^j по формуле (24) и подставив их в функции (11) и (19), найдем комплексные потенциалы и их производные, что позволит вычислять напряжения в любой момент времени по формулам

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2, 1, \mu_k) \Phi_k'(z_k), \quad (28)$$

$$(\sigma_x^\ell, \sigma_y^\ell, \tau_{xy}^\ell) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}^\ell, \lambda_{2k}^\ell, \lambda_{6k}^\ell) \Phi_k^{\prime\ell}(z_k^\ell). \quad (29)$$

Решение задачи для пластинки с теплопроводящим включением.

Рассмотрим бесконечную анизотропную пластинку с эллиптическим отверстием, в которое вставлено термоупругое включение (рис. 1), находящееся с пластинкой в условиях идеального механического и теплового контактов. Обозначим полуоси и контур отверстия через a_1 , b_1 , L_1 . На бесконечности действует однородный поток тепла плотности q , составляющий с осью Ox угол α .

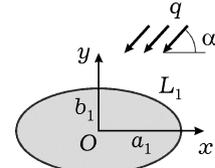


Рис. 1

В этом случае комплексные потенциалы (8) и (10) примут вид

$$F_3(z_3) = c_{30} + F_{30}(z_3), \quad F_3^1(z_3^1) = F_{30}^1(z_3^1), \quad (30)$$

где c_{30} – вещественная постоянная, определяемая из граничных условий; $F_{30}(z_3)$ – функция, голоморфная вне эллипса L_{31} , получаемого из L_1 аффинным преобразованием (12) и исчезающая на бесконечности; $F_{30}^1(z_3^1)$ – функция, голоморфная в эллипсе L_{31}^1 , получаемом из L_1 аффинным преобразованием (20). Для построения этих функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_k| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k1} и L_{k1}^1 :

$$z_k = R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right), \quad z_k^1 = R_k^1 \left(\zeta_k^1 + \frac{m_k^1}{\zeta_k^1} \right). \quad (31)$$

Здесь

$$R_k = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_k = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{2R_k},$$

$$R_k^1 = \frac{a_1 - i\mu_k^1 b_1}{2}, \quad m_k^1 = \frac{a_1 + i\mu_k^1 b_1}{2R_k^1}.$$

В конформно отображенной (при $k = 3$) области функция $F_{30}(z(\zeta_3))$ голоморфна вне круга $|\zeta_3| \geq 1$ и ее можно разложить в ряд Лорана по отрицательным степеням ζ_3 , а функция $F_{30}^1(z(\zeta_3^1))$ голоморфна в эллипсе L_{31}^1 и может быть представлена рядом по полиномам Фабера [9]. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} F_3(z_3) &= c_{30} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{3n}}{\zeta_3^n}, \\ F_3^1(z_3) &= c_{30}^1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n}^1 \left((\zeta_3^1)^n + \frac{(m_3^1)^n}{(\zeta_3^1)^n} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где c_{3n} , c_{3n}^1 — неизвестные постоянные.

Подставив функции (32) в граничные условия (7) и используя метод рядов, найдем, что $c_{30}^1 = c_{3n} = c_{3n}^1 = 0$ ($n \geq 2$), а для c_{31} и c_{31}^1 получим систему

$$\begin{aligned} c_{31} - c_{31}^1 m_3^1 - \bar{c}_{31}^1 &= -\frac{q}{2} (r_x a_1 + i r_y b_1), \\ \alpha c_{31} - \alpha^1 c_{31}^1 m_3^1 + \alpha^1 \bar{c}_{31}^1 &= i \frac{q}{2} (a_1 \sin \alpha - i b_1 \cos \alpha), \end{aligned} \quad (33)$$

решением которой будут

$$\begin{aligned} c_{31} &= \frac{q}{2} \left[\frac{(\alpha + \alpha^1)(m_3^1 \bar{\varepsilon} + \varepsilon) - \bar{m}_3^1 (\alpha - \alpha^1)(m_3^1 \varepsilon + \bar{\varepsilon})}{(\alpha + \alpha^1)^2 - |m_3^1|^2 (\alpha - \alpha^1)^2} - (r_x a_1 + i r_y b_1) \right], \\ c_{31}^1 &= \frac{q}{2} \frac{(\alpha + \alpha^1) \bar{\varepsilon} - \bar{m}_3^1 (\alpha - \alpha^1) \varepsilon}{(\alpha + \alpha^1)^2 - |m_3^1|^2 (\alpha - \alpha^1)^2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\varepsilon = \alpha r_x a_1 + b_1 \cos \alpha + i(\alpha r_y b_1 + a_1 \sin \alpha)$.

Окончательно для функций $F_3(z_3)$, $F_3^1(z_3^1)$ будем иметь выражения

$$F_3(z_3) = \frac{c_{31}}{\zeta_3}, \quad F_3^1(z_3^1) = c_{31}^1 \left(\zeta_3^1 + \frac{m_3^1}{\zeta_3^1} \right) = c_{31}^1 \frac{z_3^1}{R_3^1}. \quad (35)$$

Интегрируя функции (35), найдем

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_3) &= r_3 \int F_3(z_3) dz_3 = B_{31} \ln \zeta_3 + \frac{a_{32}}{\zeta_3^2}, \\ \Phi_3^1(z_3^1) &= r_3^1 \int F_3^1(z_3^1) dz_3^1 = a_{32}^1 \left((\zeta_3^1)^2 + \frac{(m_3^1)^2}{(\zeta_3^1)^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь $B_{31} = r_3 R_3 c_{31}$; $a_{32} = \frac{1}{2} r_3 c_{31} R_3 m_3$; $a_{32}^1 = \frac{1}{2} r_3^1 c_{31}^1 R_3^1$.

Для функций $\Phi_k(z_k)$ и $\Phi_k^1(z_k^1)$ получаем выражения

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= \sum_{j \geq 0} \lambda^j \left[B_{jk1} \ln \zeta_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jkn}}{\zeta_k^n} \right], \\ \Phi_k^1(z_k^1) &= \sum_{j \geq 0} \lambda^j \gamma_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkn}^1 \left((\zeta_k^1)^n + \frac{(m_k^1)^n}{(\zeta_k^1)^n} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

причем

$$B_{j31} = d^j r_3^0 R_3 c_{31}, \quad a_{j32} = \frac{1}{2} d^j r_3^0 c_{31} R_3 m_3, \quad a_{j32}^1 = \frac{1}{2} d^j r_3^{01} c_{31}^1 R_3^1, \\ a_{j31} = a_{j31}^1 = a_{j3n} = a_{j3n}^1 = 0, \quad n \geq 3.$$

Подставляя функции (36) в граничные условия (23) и используя метод рядов, находим $a_{jkn} = a_{jkn}^1 = 0$ ($n \neq 2$), а для определения a_{jk2} и a_{jk2}^1 получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^3 [(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) a_{jk2} - \gamma_j(\lambda_{6k}^1, \lambda_{2k}^1) a_{jk2}^1 (m_k^1)^2 - \gamma_j(\bar{\lambda}_{6k}^1, \bar{\lambda}_{2k}^1) \bar{a}_{jk2}^1] = \\ = - \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) [(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}) a_{j-1,k2} - \\ - \gamma_j(\lambda_{6k}^1, \lambda_{2k}^1) a_{j-1,k2}^1 (m_k^1)^2 - \gamma_j(\bar{\lambda}_{6k}^1, \bar{\lambda}_{2k}^1) \bar{a}_{j-1,k2}^1], \\ \sum_{k=1}^3 [(p_{k0}, q_{k0}) a_{jk2} - \gamma_j(p_{k0}^1, q_{k0}^1) a_{jk2}^1 (m_k^1)^2 - \gamma_j(\bar{p}_{k0}^1, \bar{q}_{k0}^1) \bar{a}_{jk2}^1] = \\ = - \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) [(p_{k1}, q_{k1}) a_{j-1,k2} - \gamma_j(p_{k1}^1, q_{k1}^1) a_{j-1,k2}^1 (m_k^1)^2 - \\ - \gamma_j(\bar{p}_{k1}^1, \bar{q}_{k1}^1) \bar{a}_{j-1,k2}^1] - \delta_{j0}(u^*, v^*). \quad (37)$$

Следовательно, комплексные потенциалы термоупругости для пластинки и включения будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j \geq 0} \lambda^j \left[B_{jk1} \ln \zeta_k + \frac{a_{jk2}}{\zeta_k^2} \right], \\ \Phi_k^1(z_k^1) = \sum_{j \geq 0} \lambda^j \gamma_j a_{jk2}^1 \left(\frac{z_k^1}{R_k^1} \right)^2. \quad (38)$$

Заменяя степени λ^j их выражениями (24), найдем значения функций и их производных, а по ним – значения напряжений (28), (29) в любой момент времени.

Приведенное аналитическое решение несколько упрощается, если постоянные материалов включения и пластинки пропорциональны. Пусть постоянные материала включения и пластинки связаны соотношениями

$$k_{ij}^1 = \lambda_T^1 k_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \\ a_{ij}^1 = \lambda_a^1 a_{ij}, \quad \alpha_i^1 = \lambda_\alpha^1 \alpha_i, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

где λ_T^1 , λ_a^1 и λ_α^1 – коэффициенты, которые будем называть соответственно параметрами относительной теплопроводности, относительной деформируемости и относительной тепловой расширяемости включения. В этом случае

$$\mu_k^1 = \mu_k, \quad m_k^1 = m_k, \quad \alpha^\ell = \lambda_T^1 \alpha, \\ p_k^1 = \lambda_a^1 p_k, \quad q_k^1 = \lambda_a^1 q_k, \quad r_3^1 = \frac{\lambda_\alpha^1}{\lambda_a^1} r_3, \\ c_{31} = \frac{q}{2} \left[\frac{e}{\alpha} (\alpha(r_x a_1 + i r_y b_1)) + i(a_1 \sin \alpha + i b_1 \cos \alpha) - r_x a_1 - i r_y b_1 \right],$$

$$\begin{aligned}
c_{31}^1 &= \frac{\bar{\varepsilon}(1 + \lambda_T^1) - \varepsilon \bar{m}_3(1 - \lambda_T^1)}{\alpha[(1 + \lambda_T^1)^2 - |m_3|^2(1 - \lambda_T^1)^2]}, \\
e &= \frac{1 - |m_3|^2 + \lambda_T^1(1 + |m_3|^2) + 2m_3\bar{\varepsilon}/\varepsilon}{1 - |m_3|^2 + 2\lambda_T^1(1 + |m_3|^2) + (\lambda_T^1)^2(1 - |m_3|^2)}, \\
\sum_{k=1}^2 [(\lambda_{6k}, \lambda_{2k})a_{jk2} - \gamma_j(\lambda_{6k}^1, \lambda_{2k}^1)a_{jk2}^1 m_k^2 - \gamma_j(\bar{\lambda}_{6k}^1, \bar{\lambda}_{2k}^1)\bar{a}_{jk2}^1] &= \\
&= - \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0})[(\lambda_{6k}, \lambda_{2k})a_{j-1,k2} - \gamma_j(\lambda_{6k}^1, \lambda_{2k}^1)a_{j-1,k2}^1 (m_k^1)^2 - \\
&\quad - \gamma_j(\bar{\lambda}_{6k}^1, \bar{\lambda}_{2k}^1)\bar{a}_{j-1,k2}^1] - (\lambda_{63}, \lambda_{23})a_{j32} + \\
&\quad + \lambda_\alpha^1(\lambda_{63}, \lambda_{23})d^j r_3 c_{31}^1 R_3 m_3^2 \frac{1}{2\lambda_\alpha^1} + \\
&\quad + \lambda_\alpha^1(\bar{\lambda}_{63}, \bar{\lambda}_{23})d^j \bar{r}_3 \bar{c}_{31}^1 \bar{R}_3 \frac{1}{2\lambda_\alpha^1}, \\
\sum_{k=1}^2 [(p_{k0}, q_{k0})a_{jk2} - \gamma_j \lambda_\alpha^1(p_{k0}, q_{k0})a_{jk2}^1 m_k^2 - \gamma_j \lambda_\alpha^1(\bar{p}_{k0}, \bar{q}_{k0})\bar{a}_{jk2}^1] &= \\
&= - \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0})[(p_{k1}, q_{k1})a_{j-1,k2} - \gamma_j(p_{k1}^1, q_{k1}^1)a_{j-1,k2}^1 (m_k^1)^2 - \\
&\quad - \gamma_j(\bar{p}_{k1}^1, \bar{q}_{k1}^1)\bar{a}_{j-1,k2}^1] - \delta_{j0}(u^*, v^*) - (p_{30}, q_{30})a_{j32} + \\
&\quad + \lambda_\alpha^1(p_{30}, q_{30})d^j \frac{r_3 c_{31}^1 R_3 m_3^2}{2} + \lambda_\alpha^1(\bar{p}_{30}, \bar{q}_{30})\frac{d^j \bar{r}_3 \bar{c}_{31}^1 \bar{R}_3}{2}. \quad (39)
\end{aligned}$$

Если в приведенном решении принять $\lambda_\alpha^1 = \lambda_\alpha^1 = 0$, то из него получим решение для пластинки с абсолютно жестким ядром [5].

Были проведены численные исследования распределения напряжений и их изменений в зависимости от времени для пластинки, изготовленной из композитного материала на основе эпоксидного связующего [7]:

$$\begin{aligned}
E_1 &= 23.0 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & E_2 &= 16.0 \cdot 10^3 \text{ МПа}, & G_{12} &= 3.08 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \\
\nu_2 &= 0.11, & \alpha &= 0.846, & \beta_2 &= 0.2745 c^{\alpha-1}, & \delta_2 &= 0.1295 c^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Исследованиями установлено, что параметр тепловой расширяемости включения λ_α^1 незначительно влияет на значения напряжений. Причем из физических соображений он также должен согласовываться с параметром деформируемости λ_α^1 . Во-первых, для абсолютно жесткого включения $\lambda_\alpha^1 = \lambda_\alpha^1 = 0$, т.к. абсолютно жесткое включение не может расширяться от действия температуры; во-вторых, если λ_α^1 велико (имеет место абсолютно мягкое включение), то он должен быть значительно меньше λ_α^1 ($\lambda_\alpha^1 \ll \lambda_\alpha^1$), чтобы, как следует из уравнений закона Гука, напряжения в абсолютно мягком включении обращались в ноль. Исходя из вышесказанного, нужно принимать $\lambda_\alpha^1 \ll \lambda_\alpha^1$. В дальнейшем при проведении расчетов полагали, что $\lambda_\alpha^1 = 10^{-4} \lambda_\alpha^1$.

При проведении расчетов в разложениях (38) количество членов рядов (приближений j) по степеням малого параметра λ увеличивали до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения максимальных напря-

жений в предыдущем приближении более чем на 0.01%. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях необходимо было оставлять степени малого параметра λ от 4 до 10. Установлено, что с течением времени значения напряжений в пластинке изменяются и через 25 ÷ 30 час. в ней устанавливается стационарное состояние, когда со временем значения напряжений не изменяются. При этом значительные изменения напряжений происходят лишь в начальный период загрузки, в первые 10 ÷ 15 час.

Ниже описаны некоторые из полученных результатов для пластинки с круговым включением при действии потока тепла вдоль оси Oy (т. е. когда угол $\alpha = \pi/2$). Все величины приведены с точностью до интенсивности плотности потока тепла q как множителя.

На рис. 2 для значений параметра относительной теплопроводности $\lambda_T = 0, 0.5, 2.0, \infty$ изображены графики распределения нормальных напряжений σ_n в пластинке на площадках, касательных к контуру включения. Принимали, что параметр деформируемости $\lambda_a = 0.5$; θ – центральный угол, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки. Сплошные и штриховые линии здесь и далее относятся к начальному и стационарному состояниям. Кривые для значений $\lambda_T = 0$ и $\lambda_T = \infty$ соответствуют случаям «теплопроводящего» и «абсолютно теплопроводящего» включений. Видно, что с течением времени напряжения претерпевают существенные изменения. Эти изменения оказываются наибольшими в точке, соответствующей углу $\theta = \pi/2$, причем они возрастают с уменьшением параметра λ_T и достигают максимального значения при $\lambda_T = 0$, равного 18%.

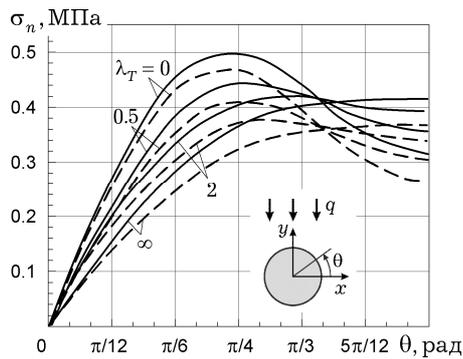


Рис. 2

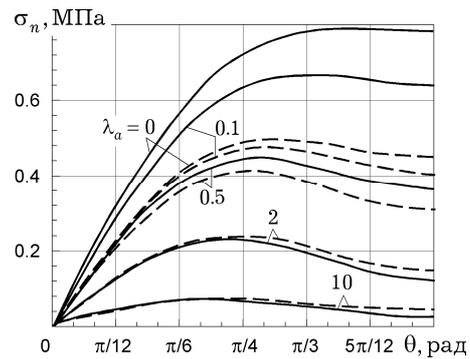


Рис. 3

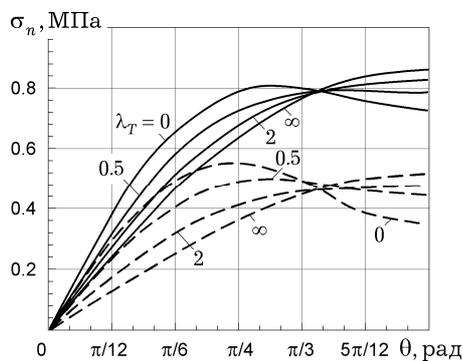


Рис. 4

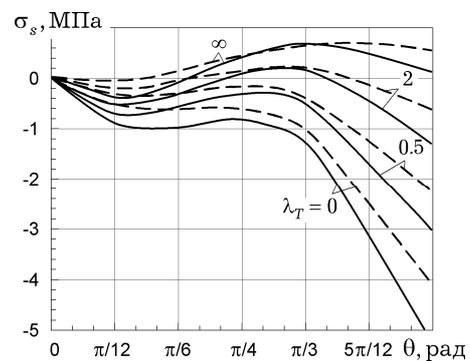


Рис. 5

На рис. 3 изображены графики распределения тех же напряжений σ_n для значений параметра деформируемости $\lambda_a = 0, 0.1, 0.5, 2.0, 10$ при постоянном значении параметра теплопроводности $\lambda_T = 0.5$. Кривые для значений $\lambda_a = 0$ и $\lambda_a = \infty$ соответствуют случаям абсолютно жесткого и абсолютно мягкого включения. Как видно, наибольшие изменения напряжений во времени происходят при $\lambda_a = 0$, т. е. для абсолютно жесткого включения. Эти изменения составляют 44%.

Для последнего случая (для $\lambda_a = 0$) на рис. 4, рис. 5 приведены графики распределения в пластинке напряжений σ_n , а также нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру включения, для значений параметра $\lambda_T = 0, 0.5, 2.0, \infty$. Видно, что с уменьшением λ_T концентрация напряжений и их изменения при переходе в стационарное состояние увеличиваются. Так, в точке, соответствующей углу $\theta = \pi/2$, значения σ_n изменяются на 44%, значения σ_s – на 19%.

1. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 9. – С. 127–136.
То же: Kaloerov S. A., Antonov Yu. S. Thermostressed state of an anisotropic plate with holes and cracks // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 9. – P. 1066–1075.
2. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
3. Калоеров С. А., Коломиец М. А. Задача вязкоупругости для анизотропной пластики с жесткими включениями // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 2 (48). – С. 71–86.
4. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого и термовязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 88–98.
То же: Kaloerov S. A., Mironenko A. B. Analyzing the viscoelastic state of a plate with elliptic or linear elastic inclusions // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 2. – P. 198–208.
5. Калоеров С. А., Паршикова О. А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 2 (48). – С. 51–70.
6. Калоеров С. А., Сенченко Ю. С. Задачи вязкоупругости для многосвязных плит // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – **19**, № 5. – Вип. 15, т. 2. – С. 91–102.
7. Каминский А. А., Гаврилов Д. А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
8. Кім Г. С., Мартиняк Р. М. Термопружність структур з теплопровідними тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 11–20.
9. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
10. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикл. математика и механика. – 1948. – **12**, № 1. – С. 53–62.
11. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 384 с.
12. Chao C. K., Chen F. M. Contact stresses in an infinite plate containing a smooth circular insert under thermal load // Acta Mech. – 2004. – **168**. – P. 195–212.
13. Chao C. K., Shen M. H. Thermal stresses in a generally anisotropic body with an elliptic inclusion subject to uniform heat flow // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1998. – **65**, No. 1. – P. 51–58.
14. Hwu Chyanbin, Wen J. Yen. On anisotropic elastic inclusions in plane elastostatics // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1993. – **60**, No. 3. – P. 626–632.

ЗАДАЧА ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

Методом малого параметра з використанням узагальнених комплексних потенціалів задача термов'язкопружності для кусково-однорідної пластинки зведена до рекурентної послідовності задач термопружності. В отриманому розв'язку всі величини залежать від степенів малого параметра, заміна яких операторними виразами дозволяє знаходити напруження в довільний момент часу. Наведено аналітичний розв'язок задачі для пластинки з одним включенням, описано результати чисельних досліджень.

THERMOVISCOELASTICITY PROBLEM FOR PIECEWISE HOMOGENEOUS ANISOTROPIC PLATE

Thermoviscoelasticity problem for piecewise homogeneous plate is reduced to a recurrent sequence of thermoelasticity problems by method of small parameter using generalized complex potentials. In the resulting solution all quantities depend on the powers of a small parameter, whose change by operator expressions allows to find the stresses at any given time. The analytical solution of the problem for a plate with inclusion are given. Numerical results are presented.

Донецк. нац. ун-т, Донецк

Получено
24.02.12