УДК 539.4

А. П. Янковский

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК СЛОИСТО-ВОЛОКНИСТОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК ВЗРЫВНОГО ТИПА. I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Сформулирована задача вязкопластического динамического деформирования металлокомпозитных оболочек слоисто-волокнистой структуры. Разработан оригинальный численный метод интегрирования поставленной начально-краевой задачи, базирующийся на последовательной дискретизации области определения решения сначала по времени, а затем по пространственным переменным.

Введение. Тонкостенные оболочечные конструкции составляют основу многих защитных ограждений и ответственных элементов оборонной, судостроительной, машиностроительной и авиационной техники. При воздействии динамических нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость во многом определяет возможность дальнейшего функционирования указанных объектов, поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела.

В последние десятилетия в инженерной практике в качестве эффективных силовых элементов используются металлокомпозитные слоистые тонкостенные конструкции [16, 32]. Дальнейшее повышение эффективности таких элементов возможно за счет армирования всех или некоторых слоев высокопрочными металлическим проволоками. Так, в [21] было показано, что помимо армирования разнесение несущих слоев (т.е. переход от квазиоднородного по толщине армирования к сэндвич-панелям с армированными несущими слоями) в тонкостенных элементах конструкций типа пластин позволяет дополнительно повысить их динамическую сопротивляемость нагрузкам взрывного типа. Существующие на сегодняшний день публикации посвящены в основном исследованию линейно-упругого или линейно-вязкоупругого динамического деформирования оболочечных конструкций слоисто-волокнистой структуры [1, 3 и др.]. Изучение неупругого динамического деформирования таких тонкостенных конструкций находится пока в зачаточном состоянии.

С одной стороны, это связано с отсутствием адекватных моделей механического упругопластического поведения перекрестно армированных композитов, как правило, используемых в тонкостенных элементах конструкций. Существующие модели построены главным образом для однонаправленно армированных сред [12], но такие структуры армирования на практике встречаются редко, разве что в стержневых системах. Единственная известная автору модель упругопластического деформирования перекрестно-армированного металлокомпозитного слоя – это модель с одномерным напряженным состоянием в арматуре [20], в рамках которой напряжения в поперечных направлениях волокон не учитываются, т.е. такая модель описывает поведение металлокомпозита с нарушенной адгезией между арматурой и связующим.

С другой стороны, даже при наличии соответствующих структурных теорий упругопластического деформирования полиармированных сред (например, из [20]) решение динамических задач для них наталкивается на значительные технические трудности, связанные с тем, что в представительном элементе такого композита одни фазовые материалы могут находиться в состоянии активного нагружения, другие – в состоянии разгрузки, третьи – в состоянии вторичной знакопеременной пластичности и т.д. Необходимость отслеживания областей этих состояний для всех компонентов композиции и порождает эти трудности. С подобными проблемами приходится сталкиваться и в более простых случаях неупругой динамики изотропных конструкций [1 и др.] и тонкостенных элементов, усиленных ребрами жесткости [13 и др.], особенно при изучении их поведения с учетом разгрузки после вторичной пластичности, а также при учете третичной (знакопеременной) пластичности и т.д., что приводит к значительному усложнению вычислительных процедур и алгоритмов уже в простейшем случае динамики изгибаемых стержней [24]. Поэтому механическое поведение даже изотропных конструкций при упругопластическом динамическом деформировании изучается в основном на начальном интервале времени (равном $1 \div 3$ периодам колебаний тонкостенной конструкции) до появления вторичной пластичности [1].

Однако реальные потребности в настоящее время таковы, что выдвигают на первый план необходимость изучения неупругой динамики армированных металлокомпозитных конструкций слоисто-волокнистой структуры, которые находят все более широкое применение в инженерной практике. В связи с этим и с учетом указанных выше проблем, возникающих в рамках упругопластической постановки задачи динамического деформирования металлокомпозитов, можно предложить следующий выход из сложившейся на сегодняшний день ситуации.

Известно, что при интенсивных силовых воздействиях упругие деформации пренебрежимо малы по сравнению с накопленными пластическими деформациями [10]. Следовательно, в этих случаях первые можно не учитывать, особенно, если изучению подлежат не сами колебательные движения конструкции, которые в реальности со временем затухают, а остаточные деформации и перемещения точек армированной конструкции, возникающие в ней после приложения интенсивных динамических нагрузок. С одной стороны, это позволяет использовать вместо модели упругопластического деформирования более простую модель вязкопластического тела, не учитывающую упругих деформаций. (Так как определяющие соотношения вязкопластического деформирования сплошной среды формально совпадают с определяющими уравнениями установившейся ползучести, полученными в рамках теории течения [15, 30], то в качестве структурной модели вязкопластического деформирования металлокомпозитных тонкостенных элементов конструкций слоисто-волокнистой структуры можно использовать модель, предложенную в [27].) С другой стороны, пренебрежение упругими деформациями при интенсивных динамических нагрузках позволяет не учитывать такие состояния компонентов композиции, как их разгрузка, вторичная пластичность, разгрузка после вторичной пластичности и т.д., что существенно упрощает алгоритм решения задачи динамики.

Исследования, проведенные в [24], показывают, что вторичная пластичность, как правило, незначительно влияет на величину остаточных прогибов. Результаты же, полученные в [4], демонстрируют, что остаточные прогибы, определенные по упругопластической и жесткопластической моделям деформирования тонкостенных изотропных конструкций, различаются незначительно при высоких уровнях динамического нагружения, и это различие уменьшается с увеличением интенсивности нагружения. Модель же жесткопластического тела является предельным (частным) случаем модели вязкопластического деформирования [14, 15, 21].

Указанные обстоятельства позволяют обоснованно заменить упругопластическую модель деформирования металлокомпозитов слоисто-волокнистой структуры на более простую модель их вязкопластического поведения при динамических нагрузках высокой интенсивности.

В связи с этим настоящее исследование посвящено разработке численного метода интегрирования начально-краевой задачи вязкопластической динамики металлокомпозитных оболочек слоисто-волокнистой структуры при нагрузках взрывного типа высокой интенсивности, а также изучению на основе решений, полученных этим методом, влияния структуры армирования металлокомпозитных оболочек на величину и характер распределения остаточных прогибов в них. Так как величина остаточных деформаций (в частности, прогибов) может, в определенном смысле, рассматриваться как мера поврежденности тонкостенной конструкции, т.е. определяет возможность дальнейшего функционирования объекта, элементом которого она является, то такое исследование имеет практическую значимость и продолжает исследования, опубликованные ранее в [21, 26] для пластин.

Постановка задачи. Рассмотрим вязкопластическое деформирование тонкой оболочки, подчиняющейся гипотезам Кирхгофа − Лява и состоящей из армированных и изотропных слоев переменной толщины. По толщине каждый слой имеет регулярную и квазиоднородную структуру, на границах между слоями выполняются условия идеального механического контакта.

Свяжем с оболочкой сопряженную ортогональную криволинейную систему координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Поверхность α_1, α_2 $(\alpha_3 = 0)$ − отсчетная, причем координатные линии α_1, α_2 совпадают с линиями главной кривизны этой поверхности, а ось α_3 перпендикулярна отсчетной поверхности и определяет расстояние от некоторой точки оболочки до этой поверхности. Конструкция состоит из M слоев, которые пронумеруем последовательно, начиная, например, от внутренней лицевой поверхности. Лицевые поверхности оболочки и границы между слоями задаются равенствами $\alpha_3 = Z_m(\alpha_1, \alpha_2)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, M$, причем функции Z_0, Z_M определяют внутреннюю и внешнюю лицевые поверхности соответственно, а Z_m − поверхность контакта m-го и $(m+1)$-го слоев $(m = 1, 2, \ldots, M-1)$. Выполняются неравенства $Z_0 \le Z_1 \le Z_2 \le \ldots \le Z_m \le \ldots \le Z_M$.

Каждый m-й слой армирован $K^{(m)}$ семействами волокон (металлических проволок, возможно, различной физической природы), которые уложены по поверхностям, эквидистантным отсчетной поверхности (эквидистантное армирование), или по поверхностям, расстояния между которыми по оси α_3 изменяются пропорционально изменению толщины слоя $Z_m(\alpha_1, \alpha_2) - Z_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2)$ (неэквидистантное армирование).

Для формулировки задачи вязкопластической динамики тонких металлокомпозитных оболочек слоисто-волокнистой структуры используем общеизвестные уравнения движения [13, 19, 29]

$$A_1 A_2 \rho \mathbf{v}_{,t} = A_1 A_2 \mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha}, t; \mathbf{F}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mathbf{L}(\mathbf{F}, \mathbf{M}), \qquad \mathbf{u}_{,t} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}, t), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$

$$\mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3\}, \quad \mathbf{F} = \{F_{11}, F_{12}, F_{22}\}, \quad \mathbf{M} = \{M_{11}, M_{12}, M_{22}\}, \tag{2}$$

$$L_i(\mathbf{F}, \mathbf{M}) = (A_j F_{ii})_{,i} - A_{j,i} F_{jj} + (A_i F_{ji})_{,j} + A_{i,j} F_{ij} + R_i^{-1}[(A_j M_{ii})_{,i} - {}$$
$$- A_{j,i} M_{jj} + (A_i M_{ji})_{,j} + A_{i,j} M_{ij}], \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2,$$

$$L_3(\mathbf{F}, \mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{2} \{A_i^{-1}[(A_j M_{ii})_{,i} - A_{j,i} M_{jj} + (A_i M_{ji})_{,j} + A_{i,j} M_{ij}]\}_{,i} - {}$$
$$- A_1 A_2 \sum_{i=1}^{2} R_i^{-1} F_{ii}, \qquad j = 3 - i, \tag{3}$$

$$\rho = \sum_{m=1}^{M}\left(\rho_0^{(m)}a^{(m)} + \sum_{k=1}^{K^{(m)}}\rho_k^{(m)}\omega_k^{(m)}\right)(Z_m - Z_{m-1}), \qquad a^{(m)} = 1 - \sum_{k=1}^{K^{(m)}}\omega_k^{(m)}, \tag{4}$$

связь между скоростями мембранных деформаций $\dot{e}_{ij}$, скоростями параметров искривления $\dot{æ}_{ij}$ срединной поверхности оболочки и скоростями перемещений v_i точек этой поверхности:

$$\dot{e}_{ii} = A_i^{-1}v_{i,i} + (A_1A_2)^{-1}A_{i,j}v_j + R_i^{-1}v_3 + V_{ii}(\mathbf{v},\mathbf{u}),$$

$$2\dot{e}_{12} = 2\dot{e}_{21} = A_1A_2^{-1}(v_1/A_1)_{,2} + A_2A_1^{-1}(v_2/A_2)_{,1} + V_{12}(\mathbf{v},\mathbf{u}),$$

$$\dot{æ}_{ii} = -A_i^{-1}(v_{3,i}/A_i - v_i/R_i)_{,i} - (A_1A_2)^{-1}A_{i,j}(v_{3,j}/A_j - v_j/R_j),$$

$$j = 3 - i, \qquad i = 1,2,$$

$$\dot{æ}_{12} = \dot{æ}_{21} = -(A_1A_2)^{-1}(v_{3,12} - A_{1,2}v_{3,1}/A_1 - A_{2,1}v_{3,2}/A_2) + R_1^{-1}(v_{1,2}/A_2 -$$

$$- A_{1,2}v_1/(A_1A_2)) + R_2^{-1}(v_{2,1}/A_1 - A_{2,1}v_2/(A_1A_2)), \tag{5}$$

определяющие соотношения, связывающие мембранные усилия F_{ij} и моменты M_{ij} в оболочке с $\dot{e}_{n\ell}$ и $\dot{æ}_{n\ell}$ [27]:

$$F_{ij} = \sum_{n=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}(A_{ijn\ell}\dot{e}_{n\ell} + B_{ijn\ell}\dot{æ}_{n\ell}),$$

$$M_{ij} = \sum_{n=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}(B_{ijn\ell}\dot{e}_{n\ell} + C_{ijn\ell}\dot{æ}_{n\ell}), \qquad i,j = 1,2. \tag{6}$$

В уравнениях и соотношениях (1)–(6) приняты обозначения: A_i, R_i – параметры Ламе и главные радиусы кривизны отсчетной поверхности оболочки соответственно; u_i, v_i – перемещения и скорости точек отсчетной поверхности оболочки в направлениях α_i, $i = 1,2,3$; $\rho_0^{(m)}$, $\rho_k^{(m)}$ – объемные плотности материалов связующей матрицы и арматуры k-го семейства в m-м слое соответственно; $\omega_k^{(m)}(\boldsymbol{\alpha})$ – плотность (интенсивность) армирования m-го слоя проволоками k-го семейства; $V_{ij}(\mathbf{v},\mathbf{u})$, $i,j = 1,2$, – дифференциальные операторы, определяющие геометрически нелинейные слагаемые в выражениях для скоростей деформаций (эти операторы получаются дифференцированием по времени t нелинейных слагаемых в выражениях для деформаций кирхгофовской оболочки [10, 30], приведенных в общем случае, например, в [19], а в случае приближения Кармана – в [13, 29]); q_i – операторы (в частности, функции), характеризующие приведенные внешние распределенные нагрузки (с учетом возможных распределенных моментов), действующие на оболочку, которые в общем случае могут зависеть от $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ (например, при магнитно-импульсном нагружении [5]), сюда же отнесены слагаемые, порожденные геометрической нелинейностью задачи, конкретный вид которых приведен, например, в [13, 19, 29] (важной особенностью операторов $V_{ij}(\mathbf{v},\mathbf{u})$ в (5) и q_i в (1) является то, что в приближении Кармана они не порождают высших производных от неизвестных функций в разрешающих уравнениях движения, поэтому (и в силу их громоздкости) в явном виде здесь не выписаны); индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной α_1, α_2 или времени t.

Уравнения движения (1) записаны без учета инерции вращения, которая для тонкостенных кирхгофовских конструкций вносит в решение пренебрежимо малый вклад [22].

Коэффициенты $A_{ijn\ell}, B_{ijn\ell}, C_{ijn\ell}, D_{ijn\ell}$ в (6) нелинейно зависят от $\dot{e}_{n\ell}$ и $\dot{\ae}_{n\ell}$, параметров армирования, толщины слоев и механических характеристик вязкопластического деформирования материалов компонентов композиции.

Так как определяющие соотношения вязкопластического деформирования металлов формально совпадают с определяющими уравнениями установившейся ползучести, получаемых в рамках теории течения [14, 15, 30], и в силу того, что тонкая оболочка подчиняется гипотезам Кирхгофа – Лява, для определения $A_{ijn\ell}, B_{ijn\ell}, C_{ijn\ell}, D_{ijn\ell}$ можно использовать соотношения, полученные в [27] (не будем их здесь приводить в силу чрезвычайной громоздкости).

В случае неэквидистантного армирования тонкого m-го слоя непрерывными волокнами постоянного поперечного сечения между параметрами армирования $\omega_k^{(m)}$, $\psi_k^{(m)}$ существует связь, приближенно определяемая равенством [25]

$$(A_2\omega_k^{(m)}(Z_m - Z_{m-1})\cos\psi_k^{(m)})_{,1} + (A_1\omega_k^{(m)}(Z_m - Z_{m-1})\sin\psi_k^{(m)})_{,2} = 0\,,$$
$$1 \le k \le K^{(m)}, \qquad 1 \le m \le M\,, \tag{7}$$

которое при эквидистантном армировании редуцируется в точное равенство, получающееся из (7) формальным заданием $Z_m - Z_{m-1} = 1$. Здесь $\psi_k^{(m)}(\boldsymbol{\alpha})$ – угол армирования m-го слоя волокнами k-го семейства, отсчитываемый от направления координатной линии α_1.

Подставим соотношения (5) в определяющие уравнения (6), а последние в систему (1), тогда с учетом равенств (2)–(4) получим систему разрешающих уравнений движения, записанную в операторной форме:

$$A_1A_2\rho\mathbf{v}_{,t} = A_1A_2\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t; \mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mathbf{D}(\mathbf{v})\,, \tag{8}$$

$$u_{i,t} = v_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \qquad i = 1, 2, 3\,, \tag{9}$$

где, согласно (2)–(6):

$$\mathbf{D} = \{D_1, D_2, D_3\}, \qquad \mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}, \qquad D_k = L_k(\mathbf{F}'(\mathbf{v}), \mathbf{M}'(\mathbf{v}))\,,$$

$$Q_k = q_k(\boldsymbol{\alpha}, t; \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \mathbf{v}, \mathbf{u}) + A_1^{-1}A_2^{-1}L_k(\mathbf{F}''(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \mathbf{M}''(\mathbf{v}, \mathbf{u}))\,,$$

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \mathbf{F}''(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{M}'(\mathbf{v}) = \mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \mathbf{M}''(\mathbf{v}, \mathbf{u})\,,$$

$$\mathbf{F}' = \{F'_{11}, F'_{12}, F'_{22}\}, \qquad \mathbf{F}'' = \{F''_{11}, F''_{12}, F''_{22}\}\,,$$

$$\mathbf{M}' = \{M'_{11}, M'_{12}, M'_{22}\}, \qquad \mathbf{M}'' = \{M''_{11}, M''_{12}, M''_{22}\}\,,$$

$$F''_{ij} = \sum_{n=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2} A_{ijn\ell}V_{n\ell}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \qquad M''_{ij} = \sum_{n=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2} B_{ijn\ell}V_{n\ell}(\mathbf{v}, \mathbf{u})\,,$$
$$i, j = 1, 2, \qquad k = 1, 2, 3\,. \tag{10}$$

В развернутом виде выражения для дифференциальных операторов D_k, Q_k громоздки, поэтому не будем их здесь приводить, отметим лишь, что операторы D_k совпадают с левыми частями уравнений равновесия (2.1) в [33]. Существенным является то, что $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ образует главную часть (содержит производные высших порядков) дифференциального оператора, определяющего правую часть векторного уравнения (8).

Для однозначного интегрирования системы (8), (9) необходимо использовать начальные

$$v_i(\boldsymbol{\alpha}, t_0) = v_{0i}(\boldsymbol{\alpha}), \qquad i = 1,2,3 \qquad \left(\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}, t_0) = \mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha})\right), \tag{11}$$

$$u_i(\boldsymbol{\alpha}, t_0) = u_{0i}(\boldsymbol{\alpha}), \qquad i = 1,2,3 \qquad \left(\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}, t_0) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha})\right), \tag{12}$$

и общеизвестные граничные условия [13, 19], которые могут быть весьма разнообразны, поэтому не будем их здесь приводить.

Если заданы кинематические граничные условия для перемещений u_i, то за счет (9) можно получить соответствующие условия для скоростей перемещений v_i, $i = 1,2,3$. При задании же на кромках силовых факторов в случае геометрической линейности задачи можно использовать соотношения (2.2) из [33]. Учет геометрической нелинейности задачи приводит к еще более громоздким, чем (2.2) в [33], соотношениям (поэтому здесь не приводятся).

Метод решения сформулированной начально-краевой задачи. Известные методы решения задач динамического деформирования тонкостенных конструкций разделяются на точные и приближенные (аналитические и численные) методы. Аналитические методы интегрирования разработаны в основном для решения линейно-упругих [2 и др.] или жесткопластических [17 и др.] задач для тел простой конфигурации при некоторых ограничениях на вид внешних воздействий. Однако решение нелинейных задач динамики точными или приближенными (вариационными [18]) аналитическими методами наталкиваются на существенные трудности, поэтому широкое применение получили численные методы интегрирования.

Так как область определения в динамических задачах, кроме пространства, включает время, то методы численного решения предполагают дискретизацию определяющей системы уравнений и по этой переменной. Возможны *два способа* дискретизации: *одновременное* и *последовательное пространственно-временное* деление области интегрирования. При одновременном разбиении области определения [9 и др.] задача сводится к системе алгебраических уравнений, в которую входят неизвестные на всех временных слоях. Такой способ приводит к определенным трудностям (в частности, увеличивается объем хранимой информации, повышается вероятность зацикливания при решении жесткопластических задач методами линейного программирования и др.), которые ограничивают его применение на практике.

Используемые до настоящего времени методы последовательной дискретизации базируются на разбиении области определения *в первую очередь по пространственным переменным* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, сводя исходную задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени (метод прямых), для интегрирования которой применяются как явные, так и неявные разностные схемы [36 и др.]. При решении прикладных задач динамического деформирования тонкостенных конструкций часто используются явные трехслойные схемы типа «крест» второго порядка точности относительно шага по времени [1, 4, 5 и др.]. Однако эффективность этого метода существенно ограничена требованием гиперболичности системы уравнений движения (обязательным учетом упругих деформаций) и его условной устойчивостью, что приводит к необходимости использования шагов по времени, на 3–4 порядка меньших характерного размера сетки по пространственным переменным [1]. Кроме того, недостатки схемы «крест» связаны с трудностями аппроксимации граничных условий и требованием постоянства шага по времени на всем временном промежутке интегрирования [1], что не позволяет без потери порядка точности гибко управлять этим шагом во временном интервале приложения кратковременного высокоинтенсивного нагружения и после него – при движении конструкции по инерции.

Из неявных методов численного интегрирования по времени динамических задач механики деформируемого твердого тела наиболее широкое распространение получил абсолютно устойчивый метод Ньюмарка [35, 37 и др.], также имеющий второй порядок точности по шагу интегрирования, который может быть и переменным. Как и для схемы «крест», для применения метода Ньюмарка начально-краевую задачу необходимо предварительно дискретизировать по пространственным переменным.

В случаях, когда уравнения движения (как, например, в (8)) содержат дифференциальные операторы по пространственным переменным (α_1, α_2) сложной нелинейной структуры и достаточно простые дифференциальные операторы по временной переменной t, по-видимому, целесообразнее дискретизацию начально-краевой задачи сначала проводить по времени, а уж затем по пространственным переменным. Такая последовательность дискретизации начально-краевой задачи динамики вязкопластических металлокомпозитных оболочек, как будет показано ниже, позволяет более гибко использовать в последующем разнообразные методы интегрирования (по пространственным переменным), хорошо разработанные для решения задач статики тонкостенных элементов конструкций.

Далее разрабатывается принципиально новый численный метод решения начально-краевой задачи динамического вязкопластического деформирования металлокомпозитных оболочек слоисто-волокнистой структуры, базирующийся на последовательной дискретизации области определения решения *сначала по времени, а затем по пространственным переменным.*

Для численного интегрирования по времени t начально-краевой задачи, соответствующей системе уравнений (8), (9), используем один из обобщенных методов Рунге – Кутты [28], а именно, двустадийный обобщенный метод Лобатто IIIA (метода трапеций), имеющий второй порядок точности по τ, где τ – шаг по времени t. Согласно этому методу:

$$\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}) + \tau(2\rho A_1 A_2)^{-1}[A_1 A_2 \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_{n+1}; \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) +$$

$$+ A_1 A_2 \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_n; \mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})) + \mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) + \mathbf{D}(\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}))], \quad (13)$$

$$\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha}) + \tau(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}))\frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \quad (14)$$

где (см. (2))

$$\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}, t_n), \qquad \mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}, t_n),$$

$$t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \quad t_0 = 0, \quad (15)$$

шаг по времени $\tau > 0$ может быть переменным: $t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}$.

Векторно-операторное уравнение (13) запишем в виде

$$-\tau\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) - \tau A_1 A_2 \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_{n+1}; \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) + 2\rho A_1 A_2 \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) =$$

$$= 2\rho A_1 A_2 \mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}) + \tau\mathbf{D}(\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})) + \tau A_1 A_2 \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_n; \mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})).$$

(16)

Если в n-й момент времени векторные функции $\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})$ известны, то система уравнений (14), (16) определяет решение в следующий $(n+1)$-й момент времени. Недостатком уравнения (16) является то, что для вычисления его правой части необходимо к известным функциям $\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})$ применять нелинейные дифференциальные операторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{Q}$. Для того чтобы избежать дифференцирования в правой части уравнения (16), введем в рассмотрение векторные функции

$$\mathbf{P}^n(\boldsymbol{\alpha}) = -\tau\mathbf{D}(\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})) - \tau A_1A_2\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_n; \mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha})) + 2\rho A_1A_2\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}),$$

$$\mathbf{P}^n = \{P_1^n, P_2^n, P_3^n\}, \qquad n = 0, 1, 2\dots. \quad (17)$$

Тогда уравнение (16) примет вид

$$-\tau\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) - \tau A_1A_2\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_{n+1}; \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) + 2\rho A_1A_2\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) =$$

$$= \mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}), \qquad n = 0, 1, 2\dots, \quad (18)$$

где правая часть известна и определяется по рекуррентной формуле

$$\mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = -\mathbf{P}^n(\boldsymbol{\alpha}) + 4\rho A_1(\boldsymbol{\alpha})A_2(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha}), \quad (19)$$

полученной в результате сопоставления выражения (17) и правой части (16).

В начальный момент времени t_0 имеем (см. (11), (12), (17))

$$\mathbf{P}^0(\boldsymbol{\alpha}) = -\tau\mathbf{D}(\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha})) - \tau A_1A_2\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_0; \mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha})) + 2\rho A_1A_2\mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha}). \quad (20)$$

При нулевых начальных условиях

$$\mathbf{v}^0(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{v}_0(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}^0(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \quad (21)$$

из (20) получаем

$$\mathbf{P}^0(\boldsymbol{\alpha}) = -\tau A_1A_2\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}, t_0; \mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad (22)$$

где правая часть определяется только внешней нагрузкой, действующей в начальный момент времени.

Используя (14), исключим из (18) векторную функцию $\mathbf{u}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$, после чего получим систему разрешающих уравнений

$$-\tau\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) - \tau A_1A_2\mathbf{Q}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) + 2\rho A_1A_2\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}),$$

$$n \geq 0, \quad (23)$$

где

$$\mathbf{Q}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) = \mathbf{Q}[\boldsymbol{\alpha}, t_{n+1}; \mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}), (\mathbf{u}^n(\boldsymbol{\alpha}) + \tau\mathbf{v}^n(\boldsymbol{\alpha})/2) + \tau\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})/2].$$

Таким образом, для определения скоростей перемещений точек отсчетной поверхности оболочки в $(n+1)$-й момент времени необходимо проинтегрировать систему трех уравнений (которые записаны в векторной форме (23)) с известными правыми частями (19)–(22) при соответствующих граничных условиях, которые получаются из граничных условий для системы уравнений (8), (9) формальной заменой $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}^{n+1}$ и $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}^{n+1}$. Если скорости перемещений $\mathbf{v}$ известны в n-й и $(n+1)$-й моменты времени, то из системы (14) можно определить перемещения $\mathbf{u}$ точек отсчетной поверхности оболочки в момент времени t_{n+1}.

Система уравнений (23) с учетом выражений для операторов D_i (см. (2.1) в [33]), содержащих высшие производные от $\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$, является системой квазилинейных уравнений эллиптического типа и ее можно интерпретировать как систему уравнений равновесия установившейся ползучести металлокомпозитной оболочки слоисто-волокнистой структуры на вязком (в общем случае, нелинейно-вязком) основании. В силу известного [14, 15, 30] формального сходства определяющих уравнений установившейся ползучести (в рамках теории течения) и уравнений теории малых упругопластических деформаций векторное равенство (23) формально совпадает с системой уравнений равновесия оболочки на упругом (в общем случае, нелинейно-упругом) основании при ее упругопластическом деформировании (если под

$\mathbf{v}^{n+1}$ понимать вектор перемещений точек отсчетной поверхности). Поэтому для интегрирования граничной задачи, соответствующей системе уравнений (23), можно использовать известные методы, разработанные для решения нелинейных задач статики или установившейся ползучести тонкостенных элементов конструкций.

Для линеаризации оператора $\mathbf{D}(\cdot)$ в (23) используем метод секущего модуля, предложенный в [15] для решения задач установившейся ползучести изотропных конструкций. Адаптация этого метода применительно к металлокомпозитным тонкостенным конструкциям изложена в [27, 33], поэтому не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса более подробно. Для линеаризации же оператора $\mathbf{Q}^{n+1}$ в (23) используем идею метода Ньютона [11], тогда после элементарных преобразований получим разрешающее уравнение на $(k+1)$-й итерации

$$-\tau\mathbf{D}(\mathbf{v}_{(k+1)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) + A_1A_2[2\rho\mathbf{I} - \tau\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha};\mathbf{v}_{(k)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}))]\mathbf{v}_{(k+1)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{P}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) +$$
$$+\tau A_1A_2[\mathbf{Q}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha};\mathbf{v}_{(k)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})) - \mathbf{Q}_{\mathbf{v}}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha};\mathbf{v}_{(k)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}))\mathbf{v}_{(k)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})],\quad n\geq 0, \tag{24}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная (3×3)-матрица; $\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}^{n+1}$ – матрица вида

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}^{n+1} = \left\|\frac{\partial\mathbf{Q}^{n+1}}{\partial\mathbf{v}^{n+1}}\right\|,\qquad (\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}^{n+1})_{ij} = \frac{\partial Q_i^{n+1}}{\partial v_j^{n+1}},\qquad i,j=1,2,3,$$

решение $\mathbf{v}_{(k)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$ на предыдущей k-й итерации предполагается уже известным.

После такой линеаризации на каждой итерации систему уравнений (24), содержащую в качестве неизвестной векторную функцию $\mathbf{v}_{(k+1)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$, можно рассматривать как линейную эллиптическую систему уравнений статического деформирования анизотропной неоднородной оболочки на линейно-упругом винклеровском основании и использовать для ее интегрирования достаточно хорошо разработанные в теории кирхгофовских оболочек численные (МКР, МКЭ), вариационные и др. методы [6]. (Сходимость метода переменных параметров упругости доказана [15].)

В качестве начального приближения $\mathbf{v}_{(0)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$ для векторной функции $\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha})$ можно выбрать функцию

$$\mathbf{v}_{(0)}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = 3\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}) - \frac{\mathbf{P}^{n}(\boldsymbol{\alpha})}{\rho A_1(\boldsymbol{\alpha})A_2(\boldsymbol{\alpha})},$$

получающуюся по формуле Тейлора

$$\mathbf{v}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}) + \tau\mathbf{v}_{,t}(\boldsymbol{\alpha},t_n) + O(\tau^2)$$

с учетом выражения для производной $\mathbf{v}_{,t}$ из (8) и оператора

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha})) + A_1A_2\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha},t_n;\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}),\mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha}))$$

из (17) в предположении, что в предыдущий n-й момент времени решение задачи $\mathbf{v}^{n}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{u}^{n}(\boldsymbol{\alpha})$ уже известно.

В случае вязкопластического деформирования система разрешающих уравнений динамики металлокомпозитной оболочки (8), (9) является системой квазилинейных уравнений составного типа [8]. Если же оператор $\mathbf{Q}$ в (8) не зависит от $\mathbf{u}$ (геометрически линейная постановка задачи), то система (8), (9) распадается на две подсистемы, интегрировать которые можно последовательно, причем система (8) в этом случае является системой квазилинейных уравнений параболического типа относительно скоростей перемещений $\mathbf{v}$. Известно, что для квазилинейных дифференциальных уравнений и систем общая теория устойчивости и сходимости конечно-разностных схем разработана недостаточно полно [31], поэтому основным критерием доверия той или иной конечно-разностной схеме служат приближенные решения для тестовых (модельных) задач, аналитические решения которых известны.

Автору пока не удалось доказать устойчивость численной схемы (14), (18) в общем случае, когда операторы $\mathbf{D}, \mathbf{Q}$ (см. (10), (3)–(6)) нелинейны. Но в пользу устойчивости этой схемы говорят физическая корректность (непротиворечивость) результатов многочисленных расчетов, проведенных автором, и удовлетворительное совпадение результатов с известными аналитическими и апробированными численными решениями. Так, частные случаи этого метода были разработаны ранее в [21, 22, 26, 34 и др.] применительно к металлокомпозитным стержням и пластинам слоисто-волокнистой структуры. Этот метод был апробирован на задачах вязкопластической динамики не только стержней и пластин [21, 22, 26, 34], но и цилиндрических изотропных оболочек [23], где было продемонстрировано хорошее согласование численных решений, полученных этим методом, с известными аналитическими решениями [7, 14, 17 и др.]. Поэтому не будем останавливаться на обсуждении этих вопросов более подробно. В случае геометрически линейной постановки задачи и линейной вязкости всех фазовых материалов, когда мембранные усилия F_{ij} и моменты M_{ij} в (6) линейно зависят от $\dot{e}_{n\ell}$ и $\dot{æ}_{n\ell}$, а оператор $\mathbf{Q}$ в (8) линеен и не зависит от перемещений $\mathbf{u}$, доказать спектральную устойчивость схемы (16), (18) можно, повторив все рассуждения в [28], касающиеся доказательства устойчивости обобщенных методов Рунге – Кутты при решении задачи нестационарной теплопроводности, которая описывается параболическим уравнением, содержащим производную по времени t только первого порядка (подобно уравнениям системы (8) при $\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Из спектральной устойчивости следует устойчивость по начальным данным, из которой, в свою очередь, для двухслойных схем, к которым относится и построенная выше схема, следует устойчивость по правой части [31]. При известных же $\mathbf{v}^n$, $\mathbf{v}^{n+1}$ схема (14) абсолютно устойчива [36].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

1. *Абросимов Н. А., Баженов В. Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
2. *Айнола Л. Я., Нигул У. К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1965. – **14**, № 1. – С. 3–63.
3. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
4. *Баженов В. Г., Ломунов В. К., Осетров С. Л.* Анализ применимости жестко-пластической модели в задачах статического и динамического изгиба пластин // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 64–70.
5. *Баженов В. Г., Ломунов В. К., Петров М. В., Угодчиков А. Г.* Исследование больших вязкопластических деформаций цилиндрических оболочек с применением магнитно-импульсного способа нагружения // Машиноведение. – 1983. – № 5. – С. 73–80.
6. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 492 с.

7. *Гопкинс Г.* (*Hopkins H.*), *Прагер В.* (*Prager W.*) Динамика пластической круглой пластинки // Механика. Сб. пер. и обзоров иностр. период. литературы. – Москва: Изд-во лит. на иностр. яз., 1955. – Вып. 3 (31). – С. 112–122.
8. *Джураев А.* Системы уравнений составного типа. – Москва: Наука, 1972. – 228с.
9. *Ерхов М. И.* Теория идеально пластических тел и конструкций. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.
10. *Зубчанинов В. Г.* Механика процессов пластических сред. – Москва: Физматлит, 2010. – 352 с.
11. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.
12. *Каримбаев Т. Д., Мыктыбеков Б. М., Панова И. М.* Математические модели нелинейного деформирования однонаправленно-армированных композиционных материалов // Труды ЦИАМ. – Москва: ЦИАМ, 2005. – № 1334. – 160 с.
13. *Карпов В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: В 2 ч. – Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – Москва: Физматлит, 2010. – 288 с.
14. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. – Москва: Наука, 1969. – 400 с.
15. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. – Москва: Физматгиз, 1960. – 456 с.
16. *Кобелев А. Г., Лысак В. И., Чернышев В. Н., Быков А. А., Востриков В. П.* Производство металлических слоистых композиционных материалов. – Москва: Интермет Инжиниринг, 2002. – 496 с.
17. *Комаров К. Л., Немировский Ю. В.* Динамика жесткопластических элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1984. – 236 с.
18. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. – Москва: Наука, 1966.
19. *Муштари Х. М.* Нелинейная теория оболочек. – Москва: Наука, 1990. – 223 с.
20. *Немировский Ю. В.* Об упруго-пластическом поведении армированного слоя // Прикл. механика и техн. физика. – 1969. – № 6. – С. 81–89.
21. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Вязкопластическая динамика слоисто-волокнистых пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2006. – **12**, № 4. – С. 484–501.
22. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Динамический вязкопластический изгиб армированных стержней переменного поперечного сечения // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 1. – С. 53–66.
23. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Интегрирование задачи динамического вязкопластического деформирования изотропных цилиндрических оболочек вращения обобщенным методом Рунге – Кутты // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика пред. состояния. – 2008. – № 2 (5). – С. 129–144.
24. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге – Кутты // Вычисл. технологии. – 2004. – **9**, № 4. – С. 77–95.
25. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиц. материалов и конструкций. – 1997. – **3**, № 2. – С. 20–40.
26. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Особенности вязкопластического деформирования армированных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 2. – С. 85–98.
    То же: *Nemirovskii Yu. V., Yankovskii A. P.* Viscoplastic deformation of reinforced plates with varying thickness under explosive loads // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 2. – P. 188–199.
27. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Установившаяся ползучесть слоистых металлокомпозитных пластин со сложными структурами армирования при продольно-поперечном изгибе // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2009. – **15**, № 1. – С. 59–82.
28. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Численное интегрирование начально-краевых задач с большими градиентами решения обобщенными методами Рунге – Кутта // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 1. – С. 43–62.
29. *Пикуль В. В.* Механика оболочек. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.
30. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – Москва: Физматгиз, 1966. – 752 с.
31. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.

32. *Трыков Ю. П., Гуревич Л. М., Шморгун В. Г.* Слоистые композиты на основе алюминия и его сплавов. – Москва: Металлургиздат, 2004. – 230 с.
33. *Янковский А. П.* Установившаяся ползучесть слоистых металлокомпозитных оболочек со сложными структурами армирования // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2010. – **16**, № 3. – С. 400–420.
34. *Янковский А. П.* Численное интегрирование задачи вязкопластической динамики слоисто-волокнистых прямоугольных удлиненных пластин // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIX Всерос. конф., Бийск, 28–31 августа 2005 г. / Под ред. В. М. Фомина. – Новосибирск: Параллель, 2005. – С. 290–297.
35. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. – New Jersey: Prentice Hall, 1996. – 1050 p.
36. *Dekker K., Verwer J. G.* Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – ix + 307 p.
37. *Zeinkiewicz O. C., Taylor R. L.* The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.

В'ЯЗКОПЛАСТИЧНА ДИНАМІКА МЕТАЛОКОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК ШАРУВАТО-ВОЛОКНИСТОЇ СТРУКТУРИ ПРИ ДІЇ НАВАНТАЖЕНЬ ВИБУХОВОГО ТИПУ.
I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Сформульовано задачу в'язкопластичного динамічного деформування металокомпозитних оболонок шарувато-волокнистої структури. Розроблено оригінальний числовий метод інтегрування поставленої початково-крайової задачі, що базується на послідовній дискретизації області визначення розв'язку спочатку за часом, а потім – за просторовими змінними.

VISCO-PLASTIC DYNAMICS OF METAL-COMPOSITE SHELLS OF LAYERED-FIBROUS STRUCTURE UNDER LOADINGS OF EXPLOSIVE TYPE
I. FORMULATION OF THE PROBLEM AND METHOD OF SOLUTION

The problem of visco-plastic dynamic deformation of metal-composite shells of layered-fibrous structure is formulated. The original numerical method of solution of the assigned initial-boundary problem, based on consecutive digitization of domain of the solution initially with respect to time, and then with respect to spatial variables, is developed.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
12.12.11