

## ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗМІРІВ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН НА КІНЦЯХ ТРІЩИНИ В ОРТОТРОПНІЙ ОБОЛОНЦІ З УРАХУВАННЯМ ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Сформульовано і розв'язано задачу про напружений стан ортотропної оболонки зі зміцненням, що містить наскрізну тріщину. Наведено аналіз впливу навантаження, зміцнення та інших характеристик оболонки на розмір пластичних зон у рамках  $\delta_c$ -моделі.

**Вступ.** У процесі експлуатації тонкостінних конструкцій в них можуть виникати тріщини або інші концентратори напружень, біля вершин яких виникають зони пластичних деформацій [2]. Дослідженню властивостей матеріалу в цих зонах присвячено роботи [5, 7]. Задачу про вплив зміцнення матеріалу в ізотропній оболонці з тріщиною на розмір пластичної зони було розглянуто в [3].

Для розв'язання задачі про напружений стан ортотропної оболонки зі зміцненням, що містить наскрізну тріщину, використовуємо узагальнений аналог  $\delta_c$ -моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла [1, 6] з лінійним розподілом напружень у пластичних зонах для вивчення напруженого стану оболонки з тріщиною нормального відриву [4]. Кінцевою метою проведених у роботі досліджень є отримання чисельних результатів для оболонок довільної кривини, виготовлених з ортотропного матеріалу зі зміцненням.

**Постановка задачі.** Розглянемо положу пружно-пластичну ортотропну оболонку сталюї товщини  $h$  з наскрізною тріщиною довжини  $2\ell_0$ , яка розташована вздовж однієї з ліній головних кривин оболонки. Її серединна поверхня віднесена до декартової системи координат  $Oxyz$  (рис. 1). Оболонка перебуває під дією розтягувального навантаження, симетричного відносно лінії тріщини. У процесі деформації береги тріщини між собою не контактують, оболонка знаходиться в стані пружної рівноваги.

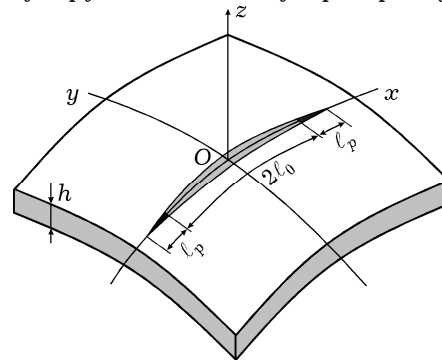


Рис. 1

Приймаємо, що розміри тріщини великі порівняно з товщиною оболонки та малі відносно інших її лінійних розмірів. Це означає, що задачу можна досліджувати за допомогою двовимірної теорії оболонок і моделювати тріщину математичним розрізом серединної поверхні оболонки.

Під дією симетричного розтягувального навантаження на продовженні лінії тріщини виникають зони пластичних деформацій. Використовуючи аналог  $\delta_c$ -моделі, узагальнений на випадок матеріалів зі зміцненням, зони пластичних деформацій моделюємо поверхнями розриву переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичних зон – на невідомі нормальне зусилля і згинальний момент вважаємо розподіленими лінійно:

$$T(\ell x) = P \left[ (1 - m^*) \frac{|\ell x| - \ell_0}{\ell - \ell_0} + m^* \right],$$

$$M(\ell x) = H \left[ (1 - m^*) \frac{|\ell x| - \ell_0}{\ell - \ell_0} + m^* \right],$$

де  $\ell_0 < |\ell x| < \ell$ ;  $m^* = \sigma_B / \sigma_\tau$ ;  $\sigma_B$  – межа міцності;  $\sigma_\tau$  – межа пластичності

матеріалу;  $x$  – координата, вздовж якої тріщина розташована. Невідомі нормальні зусилля  $P$  і згинальний момент  $H$  задовольняють умову пластичності Треска

$$\frac{P}{h\sigma_\tau} + \left| \frac{6H}{h^2\sigma_\tau} \right| = 1. \quad (1)$$

Отже, використовуючи  $\delta_c$ -модель, реальну тріщину довжиною  $2\ell_0$  замінюємо фіктивною тріщиною невідомої довжини  $2\ell$  (тут  $\ell = \ell_0 + \ell_p$  і  $\ell_p$  – довжина пластичної зони), на берегах якої виконуються умови [3]

$$T_2(\ell s) = \begin{cases} T(\ell s) - T_2^*(\ell s), & \tau^* \leq |s| \leq 1, \\ -T_2^*(\ell s), & |s| \leq \tau^*, \end{cases}$$

$$M_2(\ell s) = \begin{cases} M(\ell s) - M_2^*(\ell s), & \tau^* \leq |s| \leq 1, \\ -M_2^*(\ell s), & |s| \leq \tau^*, \end{cases} \quad (2)$$

де  $\tau^* = \ell_0/\ell$ ;  $T_2^*(\ell s)$  та  $M_2^*(\ell s)$  – зусилля і момент у суцільній оболонці на лінії тріщини.

Таким чином, задачу про пружно-пластичну оболонку з наскрізною тріщиною відомої довжини зведено до задачі про пружну оболонку з наскрізною тріщиною невідомої довжини.

**Аналітичний розв'язок.** Систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) типу Коші для оболонки довільної кривини з наскрізною тріщиною отримано в [3]. Запишемо цю систему з урахуванням граничних умов (1):

$$\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{11}(x-t)\psi_1(t) dt + \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{13}(x-t)\psi_3(t) dt = -\pi(T_2(x) - T_2^*),$$

$$\int_{-1}^1 \mathcal{K}_{31}(x-t)\psi_1(t) dt + \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{33}(x-t)\psi_3(t) dt = -\pi c^2 R_2(M_2(x) - M_2^*). \quad (3)$$

Невідомі функції  $\psi_i$ ,  $i = 1, 3$ , і ядра системи  $\mathcal{K}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 3$ , мають вигляд [6]

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4\ell} \frac{d[v]}{dt}, \quad \psi_3 = \frac{D(1-\nu)(3+\nu)}{4\ell} R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{dt}, \quad (4)$$

$$\mathcal{K}_{11}(x-t) = \frac{1}{x-t} - 2 \frac{\beta^2}{\chi^2} (x-t) \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} (\beta\chi^{-1} |x-t|),$$

$$\mathcal{K}_{31}(x-t) = 2 \frac{\beta^2}{\chi^2} \frac{x-t}{\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} (\beta\chi^{-1} |x-t|),$$

$$\mathcal{K}_{13}(x-t) = \mathcal{K}_{31}(x-t) \frac{\sqrt{1-\mu}}{(1-\nu)(3+\nu-2\mu)},$$

$$\mathcal{K}_{33}(x-t) = \frac{1}{x-t} + 2 \frac{\beta^2}{\chi^2} \frac{x-t}{(1-\nu)(3+\nu-2\mu)\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)} (\beta\chi^{-1} |x-t|),$$

де

$$a_n^{(1)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| \ell_2^{-2} \cos^3 \vartheta \cos((2n-1)\vartheta) \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\vartheta,$$

$$a_n^{(2)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| (\ell_1 \ell_2)^{-1} \cos \vartheta (\nu \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \cos((2n-1)\vartheta) \times \\ \times \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\vartheta,$$

$$a_n^{(3)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| \ell_1^{-2} (v \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^2 \frac{\cos(2n-1)\vartheta}{\cos \vartheta} \times \\ \times \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\vartheta,$$

$$\beta = c\ell, \quad d^2 = \frac{\sqrt{1-\mu} \cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta}{a \ell_1 \ell_2},$$

$$\ell_1^2 = 1 - 4\check{\mu}(1+v) \cos^2(2\vartheta), \quad \ell_2^2 = 1 + 4\check{\mu}(1-v) \cos^2(2\vartheta), \quad \check{\mu} = \mu/8a,$$

$$\mu = 1 - 2(1+v)G_{12}/E, \quad v = \sqrt{v_1 v_2}, \quad \chi^2 = \sqrt{E_1/E_2}, \quad 2a = 2a - \mu + \mu v,$$

$$c^4 = 12(1-v^2)/R_2 h^2, \quad \lambda = R_2/R_1,$$

$E_1, E_2$  – модуль Юнга;  $v_1, v_2$  – коефіцієнт Пуассона;  $G_{12}$  – модуль зсуву для поверхонь, паралельних до серединної поверхні оболонки;  $R_1, R_2$  – радіуси головних кривин серединної поверхні.

Зважаючи на вигляд правих частин системи (3) (розривні функції), аналітично розв'язати її неможливо, а чисельне розв'язання ускладнене. Тому невідомі функції  $\psi_1, \psi_3$  (4) подамо в іншому вигляді.

Для цього спочатку розглянемо задачу для пластини, виготовленої з матеріалу зі зміцненням:

$$\int_{-1}^1 \frac{\Psi(t)}{t-x} dx = \pi T_2(x), \quad T_2(x) = \begin{cases} Pb(x) - T_2^*, & \tau^* < |x| < 1, \\ -T_2^*, & |x| < \tau^*. \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5) існує, якщо виконується умова

$$\int_{-1}^1 \frac{T_2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad (6)$$

з якої маємо

$$\frac{1-m^*}{1-\tau^*} \sqrt{1-(\tau^*)^2} + \frac{m^*-\tau^*}{1-\tau^*} \arccos(\tau^*) = \frac{\pi}{2} \frac{T_2^*}{P}. \quad (7)$$

Оскільки для пластини  $H = 0$ , то з умови пластичності (1) маємо

$$P = h\sigma_\tau.$$

Функція  $T_2(x)$  має розрив першого роду у внутрішніх точках  $x = \tau^*$  та  $x = -\tau^*$ . Ураховуючи це, отримуємо такий аналітичний розв'язок задачі (5) для тонкої пластини з наскрізною тріщиною для ортотропного матеріалу зі зміцненням:

$$\Psi(t) = \frac{P}{\pi} \frac{m^* - \tau^*}{1 - \tau^*} \ln \left| \frac{\tau^* - t}{\tau^* + t} \cdot \frac{1 + t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}{1 - t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}} \right| - \\ - \frac{Pt}{\pi} \frac{1-m^*}{1-\tau^*} \ln \left| \frac{1 - (t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)})^2}{(\tau^* - t)(\tau^* + t)} \right|. \quad (8)$$

Невідомі функції  $\psi_1, \psi_3$  системи (3) подамо у вигляді

$$\psi_1(t) = g_1 + Ph(t),$$

$$\psi_3(t) = g_3 + c^2 R_2 Hh(t),$$

де функція  $h(t)$  – розв'язок рівняння

$$\int_{-1}^1 \frac{h(t)}{t-x} dt = \pi f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -a, & |x| < \tau^*, \\ -a + b(x), & \tau^* < |x| < 1, \end{cases}$$

і має вигляд (8). Константу  $a$  визначаємо з умови (6) за формулою (7):

$$a = \frac{2}{\pi} \frac{m^* - \tau^*}{1 - \tau^*} \arccos(\tau^*) + \frac{2}{\pi} \frac{1 - m^*}{1 - \tau^*} \sqrt{1 - (\tau^*)^2}.$$

Остаточні невідомі функції запишемо так:

$$\psi_1(t) = g_1(t) + \tilde{t}h(t), \quad \psi_3(t) = g_3(t) + \tilde{m}h(t),$$

де  $\tilde{t} = P/T_2^*$ ,  $\tilde{m} = c^2 R_2 H/T_2^*$ , і тоді система (3) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1,3} \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{1j}(x-t)g_j(t) dt + \tilde{t} \left[ \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{11}^r(x-t)h(t) dt + \pi \right] + \\ & + \tilde{m} \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{13}(x-t)h(t) dt = \pi, \\ & \sum_{j=1,3} \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{3j}(x-t)g_j(t) dt + \tilde{t} \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{31}(x-t)h(t) dt + \\ & + \tilde{m} \left[ \int_{-1}^1 \mathcal{K}_{33}^r(x-t)h(t) dt + \pi \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Отримана система СІР (9) відносно невідомих  $\tilde{t}$ ,  $\tilde{m}$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_3(t)$  має неперервні праві частини. Застосувавши метод механічних квадратур до цієї системи, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{11}(x_m - y_k)(1 - y_k^2)\varphi_1(y_k) + \\ & + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{13}(x_m - y_k)(1 - y_k^2)\varphi_3(y_k) + \\ & + \tilde{t} \left[ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{11}^r(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + a \right] + \\ & + \tilde{m} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{13}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} = 1, \\ & \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{31}(x_m - y_k)(1 - y_k^2)\varphi_1(y_k) + \\ & + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{33}(x_m - y_k)(1 - y_k^2)\varphi_3(y_k) + \\ & + \tilde{t} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{31}(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + \\ & + \tilde{m} \left[ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_{33}^r(x_m - y_k)h(y_k)\sqrt{1 - y_k^2} + a \right] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $x_m = \cos\left(\pi \frac{2m-1}{2n+2}\right)$ ,  $m = 1, \dots, n+1$ , а  $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Систему (10) розв'язуємо методом Гаусса.

**Чисельні результати.** Обчислення виконано для псевдосферичної, циліндричної та сферичної оболонок, виготовлених з ортотропного матеріалу, які містять наскрізну тріщину. Параметри ортотропії є такими:

$$E_1 = 6.25 \cdot 10^4 \text{ Па}, \quad E_2 = 2.12 \cdot 10^4 \text{ Па}, \quad G_{12} = 0.9 \cdot 10^4 \text{ Па}, \quad \nu = 0.31.$$

Відносний розмір пластичної зони  $\tau^* = \ell_0/\ell$  отримуємо за допомогою методу послідовних наближень.

На рис. 2 – рис. 4 наведено графіки залежності розміру пластичної зони  $\tau^*$  від відносного рівня навантаження  $\sigma_0/\sigma_\tau$  відповідно для псевдосферичної, циліндричної і сферичної оболонок для значень  $m^* = \sigma_B/\sigma_\tau = 1, 1.5, 2$ . Приймаємо, що відносний розмір тріщини  $\ell_0/R_2 = 0.1$ .

Значення параметра  $m^* = 1$  відповідає ідеально пружно-пластичному матеріалу.

Рис. 5 – рис. 7 ілюструють залежності довжини пластичної зони  $\tau^*$  від довжини тріщини  $\ell_0/R_2$  відповідно для псевдосферичної, циліндричної і сферичної оболонок при навантаженні  $\sigma_0/\sigma_\tau = 0.2$ .

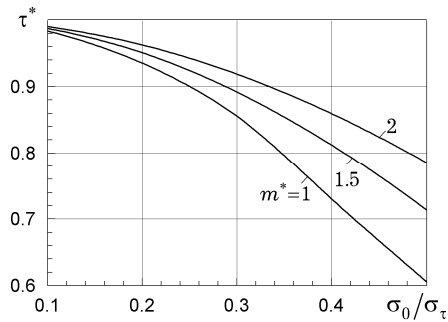


Рис. 2

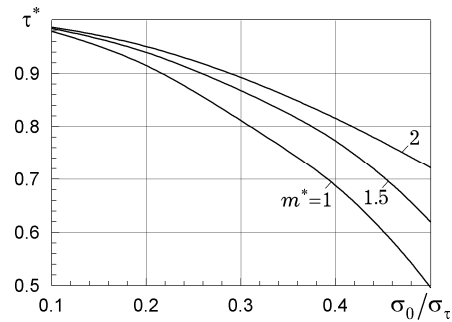


Рис. 3

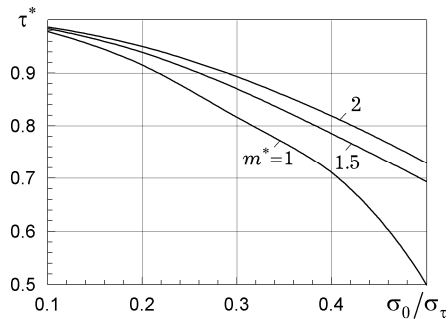


Рис. 4

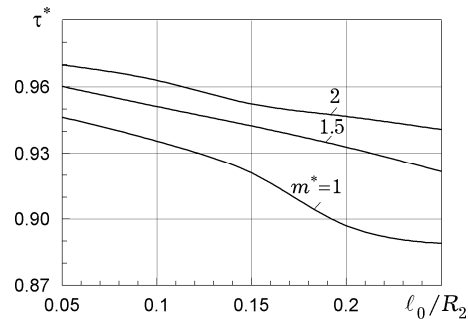


Рис. 5

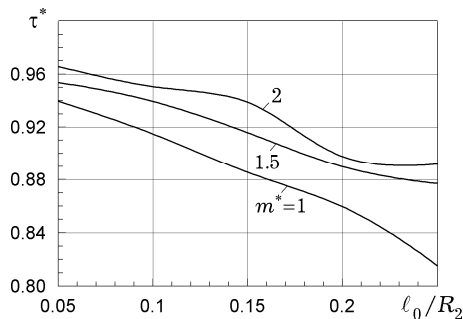


Рис. 6

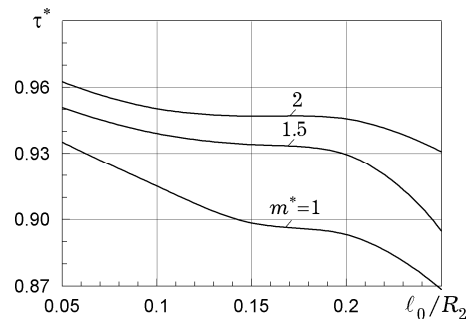


Рис. 7

На рис. 8 зображено залежність відносної довжини пластичної зони  $\tau^*$  від кривини оболонки  $\lambda = R_2/R_1$  для значень  $m^* = \sigma_B/\sigma_\tau = 1, 1.5, 2$ .

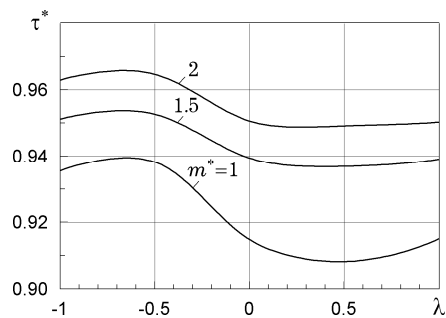


Рис. 8

З аналізу наведених графіків можна зробити висновок, що при збільшенні навантаження і довжини тріщини розмір пластичної зони збільшується. При порівнянні ідеально пружно-пластичного матеріалу ( $m^* = 1$ ) і матеріалу зі зміцненням ( $m^* = 1.5, 2$ ) бачимо, що за однакових умов навантаження і для однакових розмірів тріщини довжина пластичної зони є меншою у зміцнених матеріалах. Найменший розмір пластичної зони як у зміцненій, так і в ідеальній оболонці досягається при від'ємній кривині, найбільший – при додатній кривині.

Таким чином, для сформульованої задачі описано методику дослідження напруженого стану виготовленої з матеріалу зі зміцненням пружно-пластичної ортотропної оболонки довільної кривини, яка послаблена наскрізною тріщиною.

1. Галатенко Г. В. Развитие модели трещины Дугайла на основе классических поверхностей текучести // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 6. – С. 36–42.  
Te same: Galatenko G. V. Development of a Dugdale crack model on the basis of classical yield surfaces // Int. Appl. Mech. – 1989. – **25**, No. 6. – P. 561–566.
2. Галатенко Г. В., Каминский А. А. О докритическом росте трещины в вязкоупругой среде с нелинейным распределением напряжений в концевой зоне трещины // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 12. – С. 78–86.  
Te same: Galatenko G. V., Kaminskii A. A. The subcritical growth of a crack in a viscoelastic medium with a nonlinear stress distribution in the end zone of the crack // Int. Appl. Mech. – 1983. – **19**, No. 12. – P. 1112–1119.
3. Довбня К. М., Яртемык В. В., Гур'ева І. В. Напружений стан пружно-пластичної ізотропної оболонки з наскрізною тріщиною з урахуванням зміцнення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 127–131.  
Te same: Dovbnya K. M., Yartemyk V. V., Gur'eva I. V. Stressed state of an elastoplastic isotropic shell with a through crack with regard for material hardening // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 4. – P. 450–456.
4. Каминский А. А., Бастун В. Н. Закономерности упруго-пластического деформирования и разрушения упрочняющихся изотропных металлов при сложном напряженном состоянии (Обзор) // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 3. – С. 3–23.  
Te same: Kaminskii A. A., Bastun V. N. Features of elastoplastic deformation and fracture of hardened isotropic metals in a complex stress state (review) // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, No. 3. – P. 171–189.
5. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
6. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7.) – С. 212–249.
7. Ji Hyun Sung, Ji Hoon Kim, R. H. Wagoner. A plastic constitutive equation incorporating strain, strain-rate, and temperature // Int. J. Plasticity. – 2010. – **26**, No. 12. – P. 1746–1771.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗМЕРОВ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН НА КОНЦАХ ТРЕЩИНЫ В  
ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКЕ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА**

*Сформулирована и решена задача о напряженном состоянии ортотропной оболочки с упрочнением, содержащей сквозную трещину. Приведен анализ влияния нагрузки, упрочнения и других характеристик оболочки на размер пластических зон в рамках  $\delta_c$ -модели.*

**STUDY OF THE SIZE OF PLASTIC ZONES AT THE CRACK TIPS IN ORTHOTROPIC  
SHELL WITH ACCOUNTING MATERIAL HARDENING**

*The problem on the stressed state of orthotropic shell with hardening and containing a through crack is formulated and solved. The analysis of the influence of load, hardening and other characteristics of the shell on the size of plastic zones within the  $\delta_c$ -model is presented.*

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано  
24.06.11