УДК 517.954

М. І. Конаровська

ПРО ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто крайову задачу без початкових умов для B-параболічних систем, які містять парні похідні за просторовою змінною. Для досліджуваної задачі отримано інтегральне зображення розв'язку за допомогою функції Ґріна. При цьому враховано обмеження за t на крайові функції і неоднорідність системи. Також отримано зображення розв'язку модельної крайової задачі за допомогою ядер Пуассона та встановлено умови існування розв'язку.

Вступ. Задачі без початкових умов виникають при моделюванні різних процесів у природі, коли початкові умови настільки віддалені, що не впливають на проходження процесу. Тоді природно не враховувати початкові умови, а визначати поведінку розв'язку при прямуванні часової змінної до нескінченності. Дослідженням таких задач займалося багато математиків, зокрема для рівняння теплопровідності при $-\infty < t \le T$ така задача розглянута у роботі А. М. Тихонова [6], для параболічних систем – у роботах С. Д. Ейдельмана [7, 8] і С. Д. Івасишена [1], для деяких класів нелінійних параболічних рівнянь і систем – у роботах М. І. Матійчука [4] та М. М. Бокала [9]. У роботі [10] вивчено задачі без початкових умов для еволюційних лінійних рівнянь у банаховому просторі.

Пропонована робота присвячена продовженню цих досліджень. У ній розглядається крайова задача без початкових умов для B-параболічних систем, які містять парні похідні за просторовою змінною (за x_1). Одержано зображення розв'язку за допомогою граничного переходу у формулі для розв'язку крайової задачі. Встановлено існування і єдиність розв'язку модельної задачі.

1. Постановка задач. Означення та основні результати. У шарі $\Pi^+_{-\infty} \equiv$ $\equiv (-\infty, 0] \times E_n^+$, $E_n^+ = (0, +\infty) \times E_{n-2} \times (0, +\infty)$, розглянемо систему рівнянь, яка містить тільки парні похідні за x_1 функцій $u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x)$:

$$L(t,D)u(t,x) \equiv \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{|k|+2j \le 2b} A_{kj}(t) D_{x_1}^{2k_1} D_{x''}^{k''} B_{x_n}^j u(t,x) = f(t,x)\,, \qquad (1)$$

і систему рівнянь зі сталими коефіцієнтами, яка містить лише групу старших похідних:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D_{x_1}^{2k_1} D_{x''}^{k''} B_{x_n}^j u(t,x)\,. \qquad (1')$$

Вважаємо, що розв'язки цих систем задовольняють такі умови:

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0\,, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial^{2\ell} u(t,x)}{\partial x_1^{2\ell}}\right|_{x_1=0} = g_\ell(t,x'), \qquad \ell = 0,\ldots,b-1\,, \qquad (3)$$

де $x = (x_1, x')$, $x' = (x'', x_n)$, $x'' = (x_2, \ldots, x_{n-1})$; $|k| = 2k_1 + |k''|$, $|k''| = \sum_{i=2}^{n-1} k_i$;

$D_{x''}^{k''} = \dfrac{\partial^{|k''|}}{\partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_{n-1}^{k_{n-1}}}$ – оператор диференціювання; $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{2\nu+1}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $\nu > -1/2$, – оператор Бесселя.

Задачу (1)–(3) називатимемо крайовою задачею без початкових умов, а задачу (1′), (2), (3) – модельною крайовою задачею без початкових умов.

Перш ніж сформулювати основні результати, наведемо деякі означення і введемо необхідні позначення.

Означення 1. Систему (1) називаємо B*-параболічною*, якщо кожен корінь $\lambda = \lambda(t,\sigma)$ характеристичного рівняння

$$\det\left\{ \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(t)(i\sigma_1)^{2k_1}(i\sigma'')^{k''}(-\sigma_n^2)^j - \lambda E \right\} = 0$$

задовольняє умову $\operatorname{Re}\lambda(t,\sigma) \le -\delta|\sigma|^{2b}$ для будь-яких $\sigma \in E_n^+$, $t \in (-\infty, 0)$, де $\delta > 0$.

Означення 2. *Простором* $\tilde{C}_p^{(m,s)}(\Pi_{-\infty}^+)$, $p > 0$, $m, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називаємо клас функцій $f(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{-\infty}^+$, які є неперервними за сукупністю змінних, мають у шарі $\Pi_{-\infty}^+$ похідні за t до порядку m і s похідних за x, що задовольняють оцінки

$$\left| D_t^r D_x^k B_{x_n}^j f(t,x) \right| \le \frac{C_{rkj}}{(1-t)^p}, \quad |k| + 2j \le s, \quad r \le m, \quad (t,x) \in \Pi_{-\infty}^+,$$

де C_{rkj} – деякі додатні сталі, які не залежать від t та x.

Через $\tilde{C}_p^{(m,s+\alpha)}(\Pi_{-\infty}^+)$, $0 < \alpha < 1$, позначатимемо клас функцій із $\tilde{C}_p^{(m,s)}(\Pi_{-\infty}^+)$, у яких похідні порядку s є гельдеровими за x з показником α та задовольняють нерівність

$$\left| D_x^k B_{x_n}^j f(t,x) - D_y^k B_{y_n}^j f(t,y) \right| \le C_{kj}\,|x-y|^\alpha (1-t)^{-p}, \quad |k| + 2j = s.$$

Норми в просторах $\tilde{C}_p^{(m,s)}(\Pi_{-\infty}^+)$ і $\tilde{C}_p^{(m,s+\alpha)}(\Pi_{-\infty}^+)$ позначатимемо відповідно через $|f|_p^{(m,s)}$ і $|f|_p^{(m,s+\alpha)}$. Якщо $m = 0$ і $s = 0$, то в позначенні класу $\tilde{C}_p^{(m,s)}(\Pi_{-\infty}^+)$ ($\tilde{C}_p^{(m,s+\alpha)}(\Pi_{-\infty}^+)$) верхні індекси m та s опускатимемо і писатимемо $\tilde{C}_p(\Pi_{-\infty}^+)$ ($\tilde{C}_p^{(\alpha)}(\Pi_{-\infty}^+)$), а норму позначатимемо через $|f|_p$ ($|f|_p^{(\alpha)}$). Якщо $f \in \tilde{C}_p^{(s+\alpha/2b,s+\alpha)}(\Pi_{-\infty}^+)$, то норму в цьому класі позначатимемо через $|f|_p^{(s+\alpha)}$.

Нехай $T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)$ – матриця Ґріна системи (1). Вона є цілою функцією аргументів $(x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2b}$, $(x''-\xi'')(t-\tau)^{-1/2b}$, $x_n(t-\tau)^{-1/2b}$, $\xi_n(t-\tau)^{-1/2b}$, парною за останніми двома аргументами і визначається як обернене перетворення Фур'є – Бесселя нормальної фундаментальної матриці $Q(t,\tau,\sigma)$ відповідної системи в образах Фур'є – Бесселя:

$$G(t,\tau,x) = C_\nu \int_{E_n^+} e^{i\sigma' x'} Q(t,\tau,\sigma) J_\nu(\sigma_n x_n)\sigma_n^{2\nu+1}\, d\sigma,$$

де $C_\nu = (2\pi)^{-n} 2^{-2\nu}\Gamma^{-2}(\nu+1)$; $\Gamma(\nu)$ – ґамма-функція; $J_\nu(\sigma_n x_n)$ – нормована функція Бесселя. Оператор $T_{x_n}^{\xi_n}$ – оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [4, с. 14] і

$$\hat{f}(x,\xi) = T_{x_n}^{\xi_n} f(\tilde{x}, x_n, \tilde{\xi}) = C'_\nu \int_0^\pi f\left(\tilde{x}, \sqrt{x_n^2 + \xi_n^2 - 2x_n\xi_n\cos\alpha}, \tilde{\xi}\right)\sin^{2\nu}\alpha\, d\alpha,$$

де $C'_\nu = \dfrac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)}$, $x = (\tilde{x}, x_n)$, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Припустимо, що для похідних матриці Ґріна системи (1) виконується умова [8, с. 116]

$$\mathbf{\Lambda}_1: \quad \left| D_x^k B_{x_n}^j T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) \right| \le$$

$$\le C_{kj}(t-\tau)^{-\frac{n_\nu+|k|+2j}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{ e^{-c\left|(x-\tilde{\xi})/(t-\tau)^{1/2b}\right|^q} \right\}$$

при $\tau < t \le T$, $x \in E_n^+$. Тут $x-\tilde{\xi} = (x_1-\xi_1,\ldots,x_{n-1}-\xi_{n-1},x_n)$; C_{kj}, c – додатні сталі; $n_\nu = n+2\nu+1$; $q = \dfrac{2b}{2b-1}$.

Нехай $\mathcal{G}(t,x)$ – ядра Пуассона, які є нескінченно диференційовними функціями при $t>0$, $x_1>0$ і для похідних ℓ-го стовпчика яких справджуються оцінки [4, с. 121]

$$\left| D_x^k B_{x_n}^j T_{x_n}^{\xi_n} \mathcal{G}_\ell(t-\tau,x_1,x''-\xi'',x_n) \right| \le$$

$$\le C_{kj}(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-2\ell+|k|+2j}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{ e^{-c\left|(x-\xi'')/(t-\tau)^{1/2b}\right|^q} \right\},$$

$$C_{kj} > 0, \quad \ell = 0,\ldots,b-1. \tag{4}$$

При $t>0$ ядра $\mathcal{G}(t,x)$ задовольняють систему (1′) і $\mathcal{G}(t,x)\equiv 0$ при $t<0$.

Позначимо

$$\Gamma^-(t,\tau,x,\xi) \equiv T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) -$$

$$- T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1+\xi_1,x''-\xi'',x_n),$$

$$\tilde{\Pi}_{-\infty}^+ = \{(t,x'',x_n) : t \in (-\infty,0],\ (x'',x_n) \in E_{n-2}\times(0,+\infty)\}$$

і сформулюємо основні результати.

Теорема 1. *Нехай система* (1) *містить парні похідні за* x_1, *матриця Ґріна задовольняє умову* $\mathbf{\Lambda}_1$ *і, крім того,*

$$f \in \tilde{C}_{1+\varepsilon}^{(\alpha)}(\Pi_{-\infty}^+), \qquad g_\ell \in \tilde{C}_{\frac{2b-2}{2b}+\varepsilon}^{\left(\frac{2b-2\ell+\alpha}{2b},2b-2\ell+\alpha\right)}(\tilde{\Pi}_{-\infty}^+),$$

де $\varepsilon>0$ *– яке-небудь число. Тоді розв'язок* u *крайової задачі без початкових умов* (1)–(3), *який задовольняє одну з таких умов:*

(***i***) *існує стала* $C>0$ *і функція* $\beta:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, $\beta(t)\to 0$ *при* $t\to-\infty$, *що*

$$|u(t,x)| \le C\,\beta(t), \qquad t \le 0; \tag{5}$$

(***ii***) *для довільних значень* $t\in(-\infty,0]$ *збігається інтеграл*

$$\int_{E_n^+} |u(t,x)|\, x_n^{2\nu+1}\, dx < \infty, \tag{6}$$

має зображення

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_n^+} \Gamma^-(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi) \xi_n^{2\nu+1}\, d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^+} \sum_{\ell=0}^{b-1} \sum_{|k|+2j\le 2b-2-2\ell} 2(-1)^{|k|+1} A'_{kj}(\tau) \times$$

$$\times D_{\xi_1}^{2k_1+1} D_{\xi''}^{k''} B_{\xi_n}^j T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1,x''-\xi'',x_n) \times$$

$$\times g_\ell(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}\, d\xi', \qquad (t,x)\in\Pi_{-\infty}^+, \tag{7}$$

де $A'_{kj}(\tau)$ *– транспоновані матриці.*

Теорема 2. *Нехай система* (1′) B*-параболічна в* $\Pi_{-\infty}^{+}$, *виконується умова Я. Б. Лопатинського* [4] *і* $g_\ell \in \tilde{C}_{\frac{2\ell}{2b}+\varepsilon}^{\left(\frac{2b-2\ell+\alpha}{2b},2b-2\ell+\alpha\right)}(\tilde{\Pi}_{-\infty}^{+})$, $\ell = 0,\ldots,b-1$. *Тоді існує розв'язок модельної задачі без початкових умов* (1′), (2), (3), *який визначається формулою*

$$u(t,x) = \sum_{\ell=0}^{b-1} \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^{+}} T_{x_n}^{\xi_n} \mathcal{G}_\ell(t-\tau, x_1, x''-\xi'', x_n) g_\ell(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}\, d\xi',$$

$$(t,x) \in \Pi_{-\infty}^{+}, \tag{8}$$

належить класу $C_0^{(1,2b+\alpha)}(\Pi_{-\infty}^{+})$ *і задовольняє оцінку*

$$|u|_{2b+\alpha} \le C\sum_{\ell=0}^{b-1} |g_\ell|_{2\ell/(2b)+\varepsilon}^{(2b-2\ell+\alpha)}.$$

Теорема 3 (про єдиність розв'язку). *Нехай матриця Ґріна системи* (1′) *задовольняє умову* Λ_1, u − *регулярний розв'язок задачі* (1′), (2), *який задовольняє умови*

$$\left.\frac{\partial^{2\ell} u(t,x)}{\partial x_1^{2\ell}}\right|_{x_1=0} = 0, \qquad \ell = 0,\ldots,b-1, \tag{9}$$

$$\left| D_{\tilde{x}}^{\ell_1} B_{x_n}^{\ell_2} u(t,x)\right| \le C, \quad |\ell_1| + \ell_2 = m \le 2b-1, \quad \tilde{x} = (x_1, x''). \tag{10}$$

Тоді u *є многочленом за* $x_1,\ldots,x_{n-1}$ *степеня, не вищого ніж* $|\ell_1|$, *за* x_n^2 − *степеня, не вищого ніж* ℓ_2, *а за* t − *сталим вектором.*

Наслідок. *Якщо розв'язок задачі* (1′), (2), (3) *існує і задовольняє умову* (10), *то він єдиний з точністю до многочлена степеня, не вищого ніж* m.

2. Допоміжні твердження. Для доведення теорем 1−3 доведемо спочатку допоміжні твердження.

Лема 1 (про оцінку інтеграла). *Для інтеграла*

$$I_{\gamma\alpha}(t,x_1) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-c\left[x_1(t-\tau)^{-1/(2b)}\right]^q}}{(t-\tau)^{\gamma/(2b)}(1-\tau)^{\alpha/(2b)}}\, d\tau, \quad x_1 > 0,\ t \in (-\infty, 0],\ \alpha > 0,\ \gamma > 0,$$

виконується оцінка

$$I_{\gamma\alpha}(t,x_1) \le \Psi_{\gamma\alpha}(t)\cdot \begin{cases} C, & \gamma < 2b,\ \alpha > 2b-\gamma, \\ C_1 \ln\dfrac{1}{x_1} + C_2, & \gamma = 2b,\ \alpha > 0, \\ C x_1^{2b-\gamma}, & \gamma > 2b,\ \alpha > 0, \end{cases} \tag{11}$$

де функція

$$\Psi_{\gamma\alpha}(t) = \begin{cases} C(1-t)^{-(\alpha-\varepsilon)/(2b)}, & \gamma \le 2b, \quad 2b-\gamma < \varepsilon < \alpha, \\ C(1-t)^{-\alpha/(2b)}, & \gamma > 2b, \end{cases}$$

яка прямує до нуля при $t \to -\infty$.

Д о в е д е н н я. Розіб'ємо інтеграл $I_{\gamma\alpha}(t,x_1)$ на два інтеграли:

$$I_{\gamma\alpha}(t,x_1) = \int_{-\infty}^{t-\delta} \frac{e^{-c\left[x_1(t-\tau)^{-1/(2b)}\right]^q}}{(t-\tau)^{\gamma/(2b)}(1-\tau)^{\alpha/(2b)}}\, d\tau + \int_{t-\delta}^{t} \frac{e^{-c\left[x_1(t-\tau)^{-1/(2b)}\right]^q}}{(t-\tau)^{\gamma/(2b)}(1-\tau)^{\alpha/(2b)}}\, d\tau \equiv$$

$$\equiv I_{\gamma\alpha}^{(1)}(t,x_1) + I_{\gamma\alpha}^{(2)}(t,x_1), \qquad \delta > 0.$$

В інтегралі $I_{\gamma\alpha}^{(1)}(t,x_1)$ оцінимо підінтегральну функцію і виконаємо заміну змінної $t-\tau=\beta$:

$$I_{\gamma\alpha}^{(1)}(t,x_1)\le\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{d\beta}{\beta^{\gamma/(2b)}(1+\beta-t)^{\alpha/(2b)}}.$$

Якщо $\gamma>2b$, то беручи до уваги, що $1+\beta-t\ge 1+\delta-t$, отримаємо

$$I_{\gamma\alpha}^{(1)}(t,x_1)\le\frac{1}{(1+\delta-t)^{\alpha/(2b)}}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{d\beta}{\beta^{\gamma/(2b)}}\le\frac{C(\delta)}{(1+\delta-t)^{\alpha/(2b)}}.$$

Якщо ж $\gamma\le 2b$, то в підінтегральній функції від показника степеня $\frac{\alpha}{2b}$ віднімемо $\frac{\varepsilon}{2b}$, $\varepsilon<\alpha$, і також скористаємось нерівністю $1+\beta-t\ge 1+\delta-t$. В результаті дістанемо

$$I_{\gamma\alpha}^{(1)}(t,x_1)\le\frac{1}{(1+\delta-t)^{(\alpha-\varepsilon)/(2b)}}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{d\beta}{\beta^{\gamma/(2b)}(1+\beta-t)^{\varepsilon/(2b)}}\le$$

$$\le\frac{C}{(1+\delta-t)^{(\alpha-\varepsilon)/(2b)}}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{d\beta}{\beta^{(\gamma+\varepsilon)/(2b)}}\le\frac{C(\delta)}{(1+\delta-t)^{(\alpha-\varepsilon)/(2b)}}$$

при $\gamma+\varepsilon>2b$. Враховуючи, що $1+\delta-t\ge 1-t$, отримаємо, що при $t\le 0$

$$I_{\gamma\alpha}^{(1)}(t,x_1)\le\Psi_{\gamma\alpha}(t).$$

В інтегралі $I_{\gamma\alpha}^{(2)}(t,x_1)$ маємо, що $t-\delta\le\tau\le t$, тому $1-\tau\ge 1-t$, тоді

$$I_{\gamma\alpha}^{(2)}(t,x_1)\le\frac{1}{(1-t)^{\alpha/(2b)}}\int\limits_{t-\delta}^{t}\frac{e^{-c\left[x_1(t-\tau)^{-1/(2b)}\right]^q}}{(t-\tau)^{\gamma/(2b)}}d\tau.$$

Далі в інтегралі проведемо заміну змінної $t-\tau=\beta$ та скористаємось оцінкою потенціалу [4, с. 42]. У результаті дістанемо

$$I_{\gamma\alpha}^{(2)}(t,x_1)\le\frac{1}{(1-t)^{\alpha/(2b)}}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{e^{-c\left[x_1\beta^{-1/(2b)}\right]^q}}{\beta^{\gamma/(2b)}}d\beta\le$$

$$\le\frac{1}{(1-t)^{\alpha/(2b)}}\begin{cases}C, & \gamma<2b,\\ C_1\ln\dfrac{1}{x_1}+C_2, & \gamma=2b,\\ Cx_1^{2b-\gamma}, & \gamma>2b,\end{cases}$$

де сталі C, C_1, C_2 залежать від δ. З оцінок $I_{\gamma\alpha}^{(1)}(t,x_1)$ та $I_{\gamma\alpha}^{(2)}(t,x_1)$ маємо оцінку (11). Лему доведено. ♦

Розглянемо об'ємний потенціал

$$W(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{t}d\tau\int\limits_{E_n^+}T_{x_n}^{\xi_n}G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{-\infty}^{+}.$$

Лема 2 (про диференціювання об'ємного потенціалу). *Якщо щільність* $f\in\tilde{C}_{1+\varepsilon}(\Pi_{-\infty}^{+})$, $\varepsilon>0$, *то потенціал* W *має неперервні похідні* $D_x^kB_{x_n}^jW$, $|k|+2j<2b$, *які можна знайти безпосереднім диференціюванням під знаком інтеграла і які задовольняють нерівність*

$$\left|D_x^kB_{x_n}^jW(t,x)\right|\le C|f|_{1+\varepsilon},\quad |k|+2j<2b,\quad (t,x)\in\Pi_{-\infty}^{+}.$$

Якщо, крім того, $f\in\tilde{C}^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}(\Pi^+_{-\infty})$, *то існують похідні* $D^k_x B^j_{x_n} W$, $|k|+2j=$ $=2b$, *і* $D_t W$, *які обчислюються за допомогою регуляризації інтеграла і для яких правильними є нерівності*

$$\left|D^k_x B^j_{x_n} W(t,x)\right|\le C|f|^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}, \quad |D_t W(t,x)|\le C|f|^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}, \quad |k|+2j=2b\,.$$

Д о в е д е н н я. Для доведення існування неперервних похідних за x при $t\le 0$ достатньо встановити рівномірну збіжність інтегралів, отриманих безпосереднім диференціюванням W під знаком інтеграла. Позначимо

$$W_{kj}(t,\tau,x)=\int\limits_{E_n^+} D^k_x B^j_{x_n} T^{\xi_n}_{x_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi\,.$$

Якщо $|k|+2j<2b$, то на основі оцінок матриці Ґріна аналогічно, як і в [4, с. 30], знаходимо

$$|W_{kj}(t,\tau,x)|\le C|f|_{1+\varepsilon}(t-\tau)^{-(|k|+2j)/(2b)}(1-\tau)^{-(1+\varepsilon)}\,.$$

Якщо $|k|+2j=2b$, то скористаємось зображенням

$$W_{kj}(t,\tau,x)=\int\limits_{E_n^+} D^k_x B^j_{x_n} T^{\xi_n}_{x_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)\times$$
$$\times(f(\tau,\xi)-f(\tau,x))\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{E_n^+} D^k_x B^j_{x_n} T^{\xi_n}_{x_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) f(\tau,x)\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi\,.$$

Згідно з властивістю 3.5 [4, с. 29] останній інтеграл у цій рівності дорівнює нулеві. Для оцінки першого інтеграла скористаємось оцінкою матриці Ґріна і тим, що $f\in\tilde{C}^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}(\Pi^+_{-\infty})$. В результаті дістанемо

$$|W_{kj}(t,\tau,x)|\le C\int\limits_{E_n^+}(t-\tau)^{-(n_\nu+2b)/(2b)}\times$$
$$\times T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\left|(x-\tilde{\xi})(t-\tau)^{-1/(2b)}\right|^q}\right\}|x-\xi|^\alpha\,\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi\times$$
$$\times|f|^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}(1+|\tau|)^{-(1+\varepsilon)}\le C(t-\tau)^{-(2b-\alpha)/(2b)}(1-\tau)^{-(1+\varepsilon)}|f|^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}\,.$$

Отримані нерівності з урахуванням леми 1 гарантують рівномірну збіжність за x інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{t} W_{kj}(t,\tau,x)\,d\tau$, $|k|+2j\le 2b$, оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{t} W_{kj}(t,\tau,x)\,d\tau\le C|f|^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{(2b-\alpha)/(2b)}(1-\tau)^{1+\varepsilon}}\le C_1|f|^{(\alpha)}_{1+\varepsilon}\,.$$

Для доведення існування похідних за t скористаємось означенням невизначеного інтеграла як границі послідовності. Позначимо

$$W_h(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{t-h} d\tau\int\limits_{E_n^+} T^{\xi_n}_{x_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi\,.$$

Продиференціюємо функцію $W_h(t,x)$ за t і скористаємось властивістю функції Ґріна при $\tau\to t$ і поведінкою $f(t,x)$ при $t\to-\infty$:

$$\frac{\partial W_h(t,x)}{\partial t} = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi\Big|_{-\infty}^{t-h} +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t-h} d\tau \int\limits_{E_n^+} \frac{\partial}{\partial t} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi\,,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\partial W_h(t,x)}{\partial t} = f(t,x) +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{E_n^+} \frac{\partial}{\partial t} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi\,.$$

Оскільки $T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)$ є розв'язком (1), то замість $\frac{\partial}{\partial t} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)$ можна підставити праву частину рівняння (1) – функцію $f(t,x)$. Інтеграл від похідних до порядку $2b$ існує з огляду на умову гельдеровості функції $f(t,x)$. Лему доведено. ♦

Лема 3 (про непарне продовження). *Нехай* u – *регулярний розв'язок системи* (1′) *у шарі* $\Pi_{-\infty}^+$, *який задовольняє умови* (9), (10). *Тоді розв'язок* u *можна непарним чином продовжити в півпростір* $x_1<0$, *причому так побудована функція буде задовольняти* (1′) *в шарі* $(-\infty,0)\times E_{n-1}\times(0,+\infty)$.

3. Доведення теорем 1–3. У цьому пункті доведемо основні результати.

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (1)–(3), який задовольняє умову (***i***) або (***ii***) теореми 1. Оскільки $f\in C^{(\alpha)}(\Pi_{t_0}^+)$, $\Pi_{t_0}^+\equiv$ $\equiv(t_0,0]\times E_n^+$, і $g_\ell\in C_{x',t}^{\left(2b-2\ell+\alpha,\frac{2b-2\ell+\alpha}{2b}\right)}(\tilde\Pi_{t_0}^+)$, $\tilde\Pi_{t_0}^+\equiv(t_0,0]\times E_{n-1}^+$, $E_{n-1}^+=(0,+\infty)\times$ $\times E_{n-2}$, то існує розв'язок системи (1) в шарі $\Pi_{t_0}^+$, який визначаємо через початкове значення $u(t_0,\cdot)$, крайові функції g_ℓ і вільний член f:

$$u_{t_0}(t,x) = \int\limits_{E_n^+}\Gamma^-(t,t_0,x,\xi)u(t_0,\xi)\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau\int\limits_{E_n^+}\Gamma^-(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau\int\limits_{E_{n-1}^+}\sum_{\ell=0}^{b-1}\sum_{|k|+2j\le 2b-2-2\ell} 2(-1)^{|k|+1}A'_{kj}(\tau)\times$$

$$\times D_{\xi_1}^{2k_1+1}D_{\xi''}^{k''}B_{\xi_n}^{j}\,T_{x_n}^{\xi_n}G(t,\tau,x_1,x''-\xi'',x_n)g_\ell(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}\,d\xi' \equiv$$

$$\equiv I_{t_0}(t,x)+J_{t_0}(t,x)+H_{t_0}(t,x),\qquad (t,x)\in\Pi_{t_0}^+\,. \tag{12}$$

У формулі (12) спрямуємо $t_0\to-\infty$ і доведемо, що $\lim\limits_{t_0\to-\infty}u_{t_0}(t,x)=u(t,x)$. Для цього покажемо, що

$$\lim_{t_0\to-\infty}I_{t_0}(t,x)=0\,,$$

$$\lim_{t_0\to-\infty}J_{t_0}(t,x)=J_{-\infty}(t,x)\,,$$

$$\lim_{t_0 \to -\infty} H_{t_0}(t,x) = H_{-\infty}(t,x). \tag{13}$$

Оцінимо $I_{t_0}(t,x)$, враховуючи умову (*i*) теореми 1 та оцінку $\mathbf{\Lambda}_1$ матриці Ґріна:

$$\left|I_{t_0}(t,x)\right| \le C\beta(t_0) \int_0^{+\infty} (t-t_0)^{-1/(2b)} \Big(e^{-c\left|(x_1-\xi_1)(t-t_0)^{-1/(2b)}\right|^q} +$$

$$+ e^{-c\left|(x_1+\xi_1)(t-t_0)^{-1/(2b)}\right|^q} \Big) d\xi_1 \times$$

$$\times \prod_{s=2}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0)^{-1/(2b)} e^{-c\left|(x_s-\xi_s)(t-t_0)^{-1/(2b)}\right|^q} d\xi_s \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} (t-t_0)^{-(2\nu+2)/(2b)} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c\left|x_n(t-t_0)^{-1/(2b)}\right|^q} \right\} \xi_n^{2\nu+1}\, d\xi_n . \tag{14}$$

Розписуючи оператор узагальненого зсуву та проводячи заміну змінних

$$z_s = (\xi_s - x_s)(t-t_0)^{-1/(2b)}, \quad s = 1,\ldots,n-1,$$

$$v_1 = (x_n - \xi_n \cos\alpha)(t-t_0)^{-1/(2b)}, \qquad v_2 = \xi_n \sin\alpha (t-t_0)^{-1/(2b)}, \tag{15}$$

будемо мати

$$\left|I_{t_0}(t,x)\right| \le 2C\beta(t_0) \int_0^{\infty} e^{-cz_1^q} dz_1 \prod_{s=2}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cz_s^q}\, dz_s \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^q} v_2^{2\nu}\, dv_1\, dv_2 \le C_1\beta(t_0).$$

Оскільки $\beta(t_0) \to 0$ при $t_0 \to -\infty$, то $I_{t_0}(t,x) \to 0$ при $t_0 \to -\infty$.

Якщо ж виконується умова (*ii*), то, оцінюючи $I_{t_0}(t,x)$, дістанемо, що

$$\left|I_{t_0}(t,x)\right| \le C(t-t_0)^{-n_\nu/(2b)} \int_{E_n^+} |u(t_0,\xi)|\, \xi_n^{2\nu+1} d\xi \le C_1(t-t_0)^{-n_\nu/(2b)} \to 0$$

при $t_0 \to -\infty$.

Для перевірки останніх двох рівностей з (13) скористаємось лемами про оцінки потенціалів. Згідно з лемою 2 інтеграл J_{t_0} рівномірно збіжний за x для $f \in \tilde{C}_{1+\varepsilon}(\Pi_{-\infty}^+)$, $\varepsilon > 0$. Для оцінки інтеграла H_{t_0} припустимо, що $g_\ell \in$ $\in \tilde{C}_{\alpha_\ell}(\tilde{\Pi}_{-\infty}^+)$ (α_ℓ буде визначено нижче). Тоді, використовуючи оцінку $\mathbf{\Lambda}_1$ функції Ґріна та проводячи заміну змінних (11), дістанемо

$$|H_{-\infty}(t,x)| \le C \sum_{\ell=0}^{b-1} \sum_{|k|+2j \le 2b-2-2\ell} C_{kj} \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-c\left[x_1(t-\tau)^{-1/(2b)}\right]^q}}{(t-\tau)^{(2+2k_1+|k''|+2j)/(2b)}(1-\tau)^{\alpha_\ell}}\, d\tau \le$$

$$\le C \sum_{\ell=0}^{b-1} \int_{-\infty}^{t-\delta} \frac{e^{-c\left[x_1(t-\tau)^{-1/(2b)}\right]^q}}{(t-\tau)^{2/(2b)}(1-\tau)^{\alpha_\ell}}\, d\tau +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{b-1} \int_{t-\delta}^{t} \frac{e^{-c\left[x_1(t-\tau)^{-1/(2b)}\right]^q}}{(t-\tau)^{(2b-2\ell)/(2b)}(1-\tau)^{\alpha_\ell}}\, d\tau .$$

Згідно з лемою 1 інтеграл $H_{-\infty}(t,x)$ рівномірно збіжний при $\alpha_\ell > \dfrac{2b-2}{2b}$ та $x_1 \ge a > 0$. Теорему доведено. ♦

Д о в е д е н н я **теореми 2**. Доведемо, що для $g_\ell \in \tilde{C}_{\frac{2\ell}{2b}+\varepsilon}(\tilde{\Pi}^{+}_{-\infty})$ функція u, яка визначена формулою (8), є розв'язком задачі (1′), (2), (3).

Дійсно, для $g_\ell \in \tilde{C}_{\frac{2\ell}{2b}+\varepsilon}(\tilde{\Pi}^{+}_{-\infty})$ згідно з лемою 1 про оцінку потенціалу інтеграл з (8) існує при $x_1 \ge a > 0$ і u задовольняє систему (1′). Для перевірки виконання крайових умов скористаємось методом, описаним в роботі [8, с. 381]. Подіємо на u крайовим оператором $\dfrac{\partial^{2\ell}}{\partial x_1^{2\ell}}$ і позначимо

$$I_m(g) \equiv \sum_{\ell=0}^{b-1} \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E^+_{n-1}} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2m}} T^{\xi_n}_{x_n} \mathcal{G}_\ell(t-\tau, x_1, x''-\xi'', x_n) g_\ell(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}\, d\xi',$$

$m = 0,\ldots,b-1$. Покажемо, що $\lim\limits_{x_1\to 0} I_m(g) = g_m(t,x')$.

За допомогою формули Тейлора – Дельсарта [3] запишемо допоміжну функцію

$$g^0_\ell(\tau,\xi') = \sum_{|s|+2j\le \overline{r}-2\ell} c_j \frac{(\xi''-x'')^s}{s!} \frac{\xi_n^{2j}}{j!} D^s_{x''} B^j_{x_n} g_\ell(t,x') e(|x'-\xi'|) e(t-\tau),$$

де $\overline{r} = \max\limits_{0\le \ell\le b-1} 2\ell = 2b-2$, а $e(r)$ – нескінченно диференційовна функція, визначена при $0 \le r < +\infty$, дорівнює одиниці, коли $r \le r_0$, і нулеві – при $r \ge 2r_0$. Тоді

$$\lim_{x_1\to 0} I_m(g) = \lim_{x_1\to 0} I_m(g-g^0+g^0) = \lim_{x_1\to 0} I_m(g-g^0) + \lim_{x_1\to 0} I_m(g^0).$$

Оскільки $g^0(\tau,\xi')$ є нескінченно диференційовною і фінітною, то за властивістю ядер Пуассона маємо $\lim\limits_{x_1\to 0} I_m(g^0) = g^0_m(t,x')$. Крім того, $g^0_m(t,x') = g_m(t,x')$, тому $\lim\limits_{x_1\to 0} I_m(g^0) = g_m(t,x')$.

Доведемо, що

$$\lim_{x_1\to 0} I_m(g-g^0) = 0. \tag{16}$$

Запишемо $I_m(g-g^0)$ у вигляді

$$I_m(g-g^0) = \int_{-\infty}^{t-r_0} d\tau \int_{V^{x'}_{r_0}} (\ldots)\, d\xi' + \int_{t-r_0}^{t} d\tau \int_{V^{x'}_{r_0}} (\ldots)\, d\xi' + \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{E^+_{n-1}\setminus V^{x'}_{r_0}} (\ldots)\, d\xi' \equiv$$

$$\equiv I^{(1)}_m + I^{(2)}_m + I^{(3)}_m,$$

де

$$V^{x'}_{r_0} = \{\xi' : |\xi'-x'| \le r_0\}.$$

Інтеграл $I^{(1)}_m$ прямує до нуля при $x_1 \to 0$. Інтеграли $I^{(2)}_m$ та $I^{(3)}_m$ оцінюємо аналогічно, як і в [8, с. 381], і для них правильними є оцінки

$$\left|I_m^{(2)}\right| \le C\varepsilon(r_0), \qquad \varepsilon(r_0) \underset{r_0 \to 0}{\to} 0, \tag{17}$$

$$\left|I_m^{(3)}\right| \le Cx_1(r_0^{-(1+\overline{r})} + 1), \qquad \overline{r} = 2b - 2. \tag{18}$$

Із оцінок (17), (18) маємо, що

$$\left|I_m(g - g^0)\right| \le C\varepsilon(r_0) + Cx_1(r_0^{-(1+\overline{r})} + 1).$$

Спочатку вибираємо r_0 так, щоб $\varepsilon(r_0) \le \varepsilon/2$, а потім для фіксованого r_0, користуючись малістю x_1, отримуємо, що $Cx_1(r_0^{-(1+\overline{r})} + 1) < \varepsilon/2$. Звідси випливає, що рівність (16) є правильною. ♦

Доведення **теореми 3**. Нехай u – регулярний розв'язок задачі (1′), (2), (9), який задовольняє умову (10). Згідно з лемою про непарне продовження u можна продовжити в півпростір $x_1 < 0$. Похідні u до порядку m обмежені. Застосувавши теорему Ліувілля [2, с. 28] до всіх похідних до порядку m, дістанемо $D_{\tilde{x}}^{\ell_1} B_{x_n}^{\ell_2} u(t,x) = \mathrm{const}$, а всі наступні похідні тотожно дорівнюють нулеві. Зокрема, похідні порядку $2b$ також дорівнюють нулеві:

$$\sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D_{x_1}^{2k_1} D_{x''}^{k''} B_{x_n}^{j} u(t,x) = 0,$$

а отже, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 0$. Звідси маємо, що u є многочленом за t нульового степеня. З рівності $D_{\tilde{x}}^{\ell_1} B_{x_n}^{\ell_2} u(t,x) = \mathrm{const}$ випливає, що u є многочленом за $x_1, \ldots, x_{n-1}$ степеня, не вищого від $|\ell_1|$, за x_n^2 – степеня, не вищого від ℓ_2. Теорему доведено. ♦

1. *Івасишен С. Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 5. – С. 547–552.
   Те саме: *Ivasishen S. D.* Parabolic boundary-value problems without initial conditions // Ukr. Math. J. – 1982. – **34**, No. 5. – P. 439–443.
2. *Конаровська М. І.* Теореми Ліувілля для сингулярних параболічних систем // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2009. – Вип. 485. – С. 28–34.
3. *Левитан Б. Н.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 2(42). – С. 102–143.
4. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
5. *Моисеев Е. И., Вафодорова Г. О.* О единственности решений первых краевых задач для уравнения теплопроводности без начальных условий // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 10. – С. 1461–1467.
6. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. – 1935. – **42**, № 2. – С. 199–216.
7. *Эйдельман С. Д.* О некоторых свойствах решений параболических систем // Укр. мат. журн. – 1956. – **8**, № 2. – С. 191–207.
8. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 442 с.
9. *Bokalo M.* Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains // Electron. J. Differ. Equations. – 2010. – No. 178. – P. 1–24.
10. *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions // Milan J. Math. – 2009. – **77**. – P. 437–494.
11. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
12. *Michael Renardy, Robert C. Rogers.* An introduction to partial differential equations. – New York: Springer, 2004. – 446 p.

О ЗАДАЧАХ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрена краевая задача без начальных условий для B-параболических систем, содержащих парные производные по пространственной переменной. Для исследуемой задачи получено интегральное представление решения с помощью функции Грина. При этом учтены ограничения по t на краевые функции и неоднородность системы. Также получено изображение решения модельной краевой задачи с помощью ядер Пуассона и установлены условия существования решения.

ON PROBLEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR SINGULAR PARABOLIC SYSTEMS

The boundary-value problem without initial conditions for B-parabolic systems that contain even-order spatial derivatives is considered. The integral representation of solution via Green's function for the studied problem is obtained. In this representation the restrictions by t on boundary functions and heterogeneous systems are taken into account. For model boundary-value problem the solution via the Poisson's kernels also is obtained, for which conditions of existence are established.

Чернів. нац. ун-т
імені Юрія Федьковича, Чернівці

Одержано
27.08.12