

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ПЛАТ С РАЗМЕЩЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ ПО СХЕМЕ «КОВЁР СЕРПИНСКОГО»

Рассмотрены вопросы применения метода R -функций для решения задач расчета температурных полей плат с локальными источниками тепла на их поверхностях, размещенными по схеме «ковёр Серпинского». Приведены структуры решений для различных типов граничных условий. При решении использован метод Рунца. Примеры численной реализации выполнены в системе ПОЛЕ. Исследовано влияние мощности источников на распределение температурного поля.

1. Введение. Нормальное функционирование радиоэлектронной аппаратуры возможно лишь при условии поддержания температур её элементов в определенных пределах. Изменение теплового режима оказывает влияние на характеристики элементов и может привести к возникновению физико-химических процессов, выводящих элемент из строя. При этом дестабилизирующими тепловыми воздействиями являются рассеиваемые при работе элементов мощности, изменение температуры внешней среды и тепловые потоки от окружающих прибор объектов. Поэтому на этапе конструкторского проектирования радиоэлектронной аппаратуры при выборе вариантов конструкции и компоновки наряду с задачами обеспечения монтажно-коммутационных требований, помехоустойчивости, технологичности, вибропрочности необходимо решать задачи обеспечения нормального теплового режима [1, 2, 5, 8, 9]. В радиотехнике в настоящее время широко применяются фракталы, например, при проектировании антенных устройств (кривая Коха и «ковёр Серпинского») и волноводов (снежинка Коха). Большой интерес вызывают задачи математического моделирования физико-механических полей в областях фрактальной природы.

В. Л. Рвачев в своих работах (например, [7]), определяя к описанию R -функциями типы геометрических объектов, к сожалению, исключил из рассмотрения такие «геометрические монстры, как Канторово множество, «ковёр Серпинского» и другие объекты фрактальной геометрии. Однако в последние годы на основе конструктивных средств теории R -функций, суперпозиций и рекурсивных процедур в [3, 4, 6] разработана методика и построены уравнения ряда объектов фрактальной геометрии.

Целью работы является исследование температурных полей плат с локальными источниками тепла на их поверхностях, размещенными по схеме «ковёр Серпинского», с использованием метода R -функций.

2. Математическое и компьютерное моделирование температурных полей платы. На тонкой плате Ω с характерными размерами L_1, L_2 и толщиной δ расположены области Ω_i с характерными размерами l_{1i}, l_{2i} (рис. 1). Источники тепла q_i равномерно распределены по областям Ω_i , тепловые потоки P_i рассеиваются в окружающую среду не только кондукцией через границы областей, но и конвекцией и излучением с поверхности. Рассеянием тепла с торцов можно пренебречь по сравнению с рассеянием тепла с остальной поверхности платы. Коэффициент теплопроводности платы равен λ , а суммарная теплоотдача с различных поверхностей платы – α и α_i . Найдем стационарное температурное поле платы.

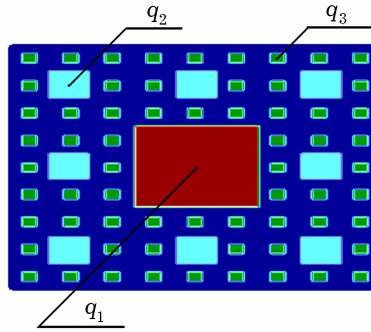


Рис. 1. Плата с источниками, расположенными по схеме «ковёр Серпинского».

Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - b^2 T = -q(x, y),$$

$$q(x, y) = \begin{cases} \frac{P_i}{4\ell_{1i}\ell_{2i}\delta\lambda}, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \in \left(\bigcup_{i=1}^N \Omega_i\right)^c, \end{cases}$$

где $T = \tilde{T} - T_{av}$; $b^2 = \frac{\alpha + \alpha_i}{\lambda\delta}$.

Пусть $\omega(x, y) = 0$ – уравнение границы области Ω , а $\omega_i(x, y) = 0$ – уравнения границ областей Ω_i [3, 4]. Тогда правую часть уравнения теплопроводности можно записать в виде

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{1 + \text{sgn } \omega_i}{2} \cdot \frac{P_i}{4\ell_{1i}\ell_{2i}\delta\lambda_i}.$$

Решение удобно представить в безразмерном виде, используя следующие критерии: $u = T\lambda\delta P^{-1}$ и $Bi = \frac{\alpha L^2}{\lambda\delta}$.

На границах платы могут иметь место следующие граничные условия:

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \psi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + hu|_{\partial\Omega} = \xi,$$

или их комбинации.

Решение задачи осуществим методом Ритца. Этот метод – один из наиболее употребительных. В нем краевая задача заменяется задачей о минимуме некоторого функционала $I(u)$. Поле, соответствующее уравнению $Au = f$, сообщает минимум функционалу

$$I(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \|u\|_A^2 - 2(u, f).$$

Величина (Au, u) обычно пропорциональна энергии, необходимой для возбуждения поля $u(x)$.

Если

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

то структура решения имеет вид $u = \varphi + \omega\Phi$ [7], а соответствующий функционал –

$$I = \int_{\Omega} ((\nabla u_1)^2 + b^2 u_1^2) d\Omega + 2 \int_{\Omega} (\nabla u_1 * \nabla u_0 + b^2 u * u_0 - \rho * u_1) d\Omega,$$

где $u_1 = \omega\Phi$, $u_0 = \varphi$.

Если

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \psi,$$

то структура решения имеет вид

$$u = \Phi_1 + \omega(-D_1 \Phi_1 - \psi - \omega \Phi_2),$$

а функционал –

$$I = \int_{\Omega} ((\nabla u)^2 + b^2 u^2) d\Omega + 2 \int_{\Omega} (\nabla u * \nabla u_0 + b^2 u * u_0 - \rho * u) d\Omega - \\ - 2 \int_{\partial \Omega} u \psi \partial s,$$

где

$$u_1 = \Phi_1 + \omega(-D_1 \Phi_1 - \omega \Phi_2), \quad u_0 = -\omega \psi.$$

Если

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \Big|_{\partial \Omega} = \xi,$$

то структура решения имеет вид

$$u = \Phi_1 + \omega(-D_1 \Phi_1 - \xi + h\Phi_1 - \omega \Phi_2),$$

а функционал –

$$I = \int_{\Omega} ((\nabla u)^2 + b^2 u^2) d\Omega + \int_{\partial \Omega} h(u)^2 \partial s + \\ + 2 \int_{\Omega} (\nabla u * \nabla u_0 + b^2 u * u_0 - \rho * u) d\Omega - \\ - 2 \int_{\partial \Omega} u(\xi - hu) \partial s,$$

где

$$u_1 = \Phi_1 + \omega(-D_1 \Phi_1 + h\Phi_1 - \omega \Phi_2), \quad u_0 = -\omega \xi.$$

Если

$$u|_{\partial \Omega_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu \Big|_{\partial \Omega_2} = \varphi_2,$$

то структуру решения можно представить либо в виде

$$u = \frac{(\varphi_1 + \omega_1 \Phi_1) \omega_2^2 + (\Phi_2 + \omega_2(-D_1^{(2)} \Phi_2 - \varphi_2 + h\Phi_2 - \omega_2 \Phi_{22})) \omega_1}{\omega_1 + \omega_2^2},$$

либо

$$u = \omega_1 \Phi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [-\varphi_2 - \omega_2 \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) - D_1^{(2)}(\varphi_1) + \\ + h(\omega_1 \Phi_1 + \varphi_1)] + \varphi_1.$$

Заметим, что при $h = 0$ получим структуру для задачи смешанного типа:

$$u|_{\partial \Omega_1} = \varphi_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega_2} = \varphi_2.$$

Если же

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega_1} &= \varphi_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + h_2 u|_{\partial\Omega_2} &= \varphi_2, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + h_3 u|_{\partial\Omega_3} &= \varphi_3, \end{aligned}$$

то, применяя формулу склейки, можем записать

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega_1} &= \varphi_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu|_{\partial\Omega_2} &= \tilde{\varphi}_2, \end{aligned}$$

где

$$h = \frac{h_2\omega_3 + h_3\omega_2}{\omega_2 + \omega_3}, \quad \tilde{\varphi}_2 = \frac{\varphi_2\omega_3 + \varphi_3\omega_2}{\omega_2 + \omega_3}.$$

Функционал для задачи смешанного типа имеет вид

$$\begin{aligned} I = \int_{\Omega} ((\nabla u)^2 + b^2 u^2) d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} h(u)^2 \partial s + \\ + 2 \int_{\Omega} (\nabla u * \nabla u_0 + b^2 u * u_0 - \rho * u) d\Omega - \\ - 2 \int_{\partial\Omega_2} u(\varphi_2 - hu) \partial s, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_1 \Phi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [-\varphi_2 - \omega_2 \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) - D_1^{(2)}(\varphi_1) + \\ &+ h(\omega_1 \Phi_1 + \varphi_1)] + \varphi_1, \\ u_0 &= \varphi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [-\varphi_2 - D_1^{(2)}(\varphi_1) + h\varphi_1]. \end{aligned}$$

Построим уравнение фрактальной области «ковёр Серпинского». Для этого исходный прямоугольник разбивается на 9 равновеликих прямоугольников, из которых исключается центральный. Оставшиеся прямоугольники подвергаются той же процедуре и т. д.

Если

$$f_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0, \quad f_2 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0,$$

то $\omega_0 = f_1 \wedge f_2 \geq 0$ – предфрактал нулевого уровня. Построим вспомогательные функции, пользуясь свойством самоподобия:

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= \frac{\omega_0(3x, 3y)}{3} \geq 0, \\ \omega_k(x, y) &= \frac{\omega_{k-1}(3\mu_{hx}, 3\mu_{hy})}{3} \geq 0, \quad k = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где

$$\mu_{h_x} = \frac{h_x}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{\pi x}{h_x}\right), \quad \mu_{h_y} = \frac{h_y}{\pi} \arcsin\left(\sin \frac{\pi y}{h_y}\right),$$

$$h_x = \frac{2a}{3}, \quad h_y = \frac{2b}{3}.$$

Тогда

$$K_{\omega}(x, y) = \omega_0(x, y) \wedge_0 \omega_1(x, y) \wedge_0 \omega_2(x, y) \wedge_0 \dots \wedge_0 \omega_k(x, y) \geq 0.$$

На рис. 2 построены картины линий уровня функции $K_{\omega_k}(x, y) \geq 0$, задающей «ковёр Серпинского» для различных значений k .

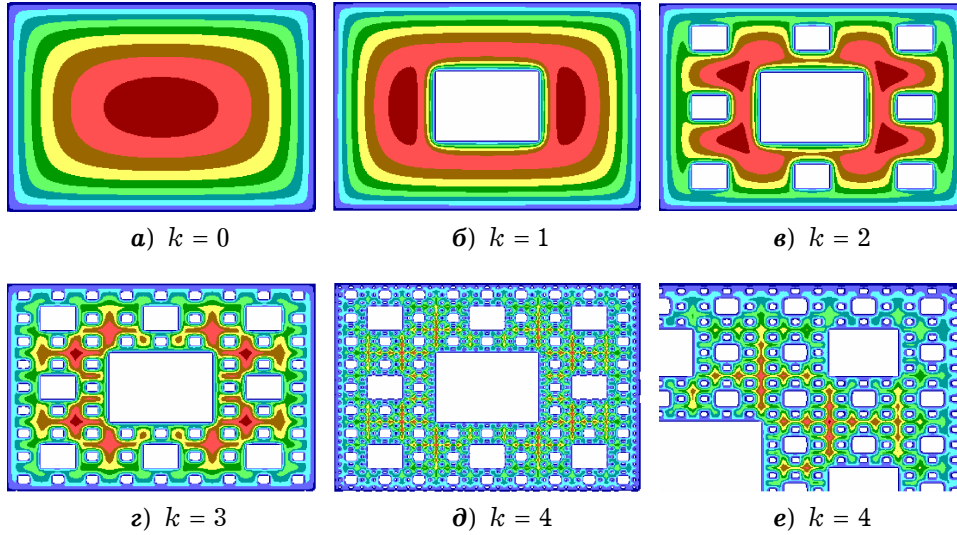
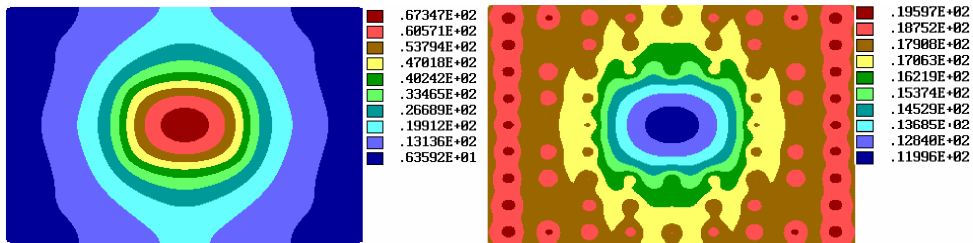


Рис. 2. Картины линий уровня функции $K_{\omega_k}(x, y) \geq 0$, задающей «ковёр Серпинского» для различных значений k .

Рассмотрим несколько примеров, численная реализация которых выполнена в системе ПОЛЕ при $k = 3$.

$$1^\circ. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5u = -q, \quad F = \begin{cases} q_i, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \in \left(\bigcup_{i=1}^{64} \Omega_i\right), \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

$$F = \frac{q_1(1 - \text{sgn } \omega_1)}{2} + \frac{q_2(1 - \text{sgn}[\omega_2 \vee_0 \overline{\omega_1}])}{2} + \frac{q_3(1 - \text{sgn}[\omega_3 \vee_0 \overline{\omega_1 \vee_0 \omega_2}])}{2}.$$



а) $q_1 = 810, q_2 = 90, q_3 = 10$

б) $q_1 = 10, q_2 = 90, q_3 = 810$

Рис. 3. Распределение температурного поля в зависимости от значений мощности источников тепла.

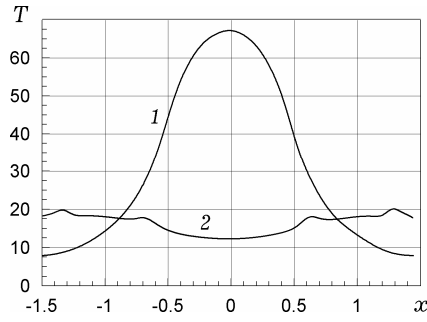
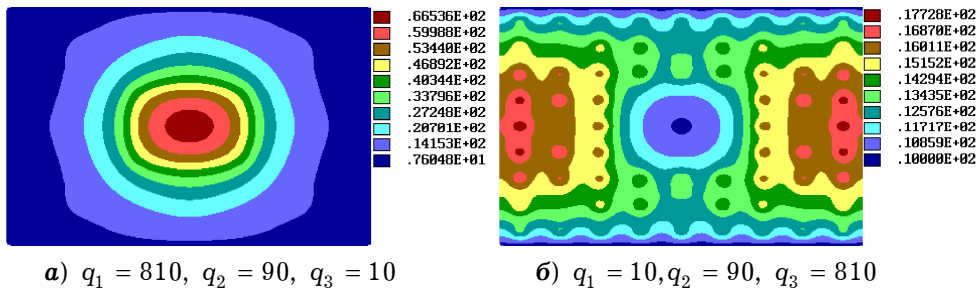


Рис. 4. Графики температурных полей в сечении $y = 0$:
 кривая 1 – при $q_1 = 810$, $q_2 = 90$, $q_3 = 10$;
 кривая 2 – при $q_1 = 10$, $q_2 = 90$, $q_3 = 810$.

$$2^\circ. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5u = -F, \quad F = \begin{cases} q_i, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \in \left(\bigcup_{i=1}^{64} \Omega_i \right), \end{cases}$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = 10, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_2} = 0,$$

где $\partial\Omega_{1,2}$ – горизонтальные стенки.



а) $q_1 = 810$, $q_2 = 90$, $q_3 = 10$

б) $q_1 = 10$, $q_2 = 90$, $q_3 = 810$

Рис. 5. Распределение температурного поля в зависимости от значений мощности источников тепла.

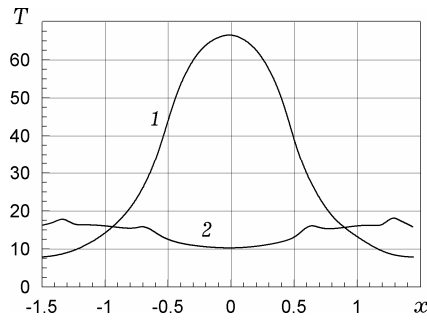


Рис. 6. Графики температурных полей в сечении $y = 0$:
 кривая 1 – при $q_1 = 810$, $q_2 = 90$, $q_3 = 10$;
 кривая 2 – при $q_1 = 10$, $q_2 = 90$, $q_3 = 810$.

$$3^\circ. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5u = -F, \quad F = \begin{cases} q_i, & (x, y) \in \Omega_i, \\ 0, & (x, y) \in \left(\bigcup_{i=1}^{64} \Omega_i \right), \end{cases}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 10.$$

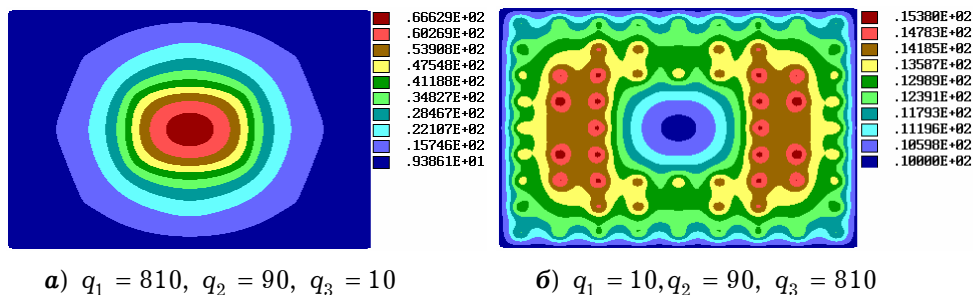


Рис. 7. Распределение температурного поля в зависимости от значений мощности источников тепла.

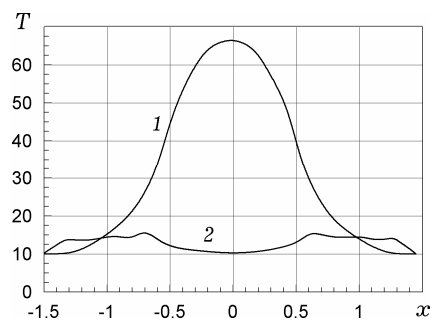


Рис. 8. Графики температурных полей в сечении $y = 0$:
 кривая 1 – при $q_1 = 810, q_2 = 90, q_3 = 10$;
 кривая 2 – при $q_1 = 10, q_2 = 90, q_3 = 810$.

Анализируя полученные решения (рис. 3 – рис. 8), можно сделать вывод, что для всех типов граничных условий равномерный нагрев платы при существенно более низкой температуре (на $71 \div 77$ %) реализуется, если источники с большей мощностью располагаются ближе к границе платы.

3. Выводы. Рациональное размещение источников тепловых полей, имеющих заданные геометрические и физические параметры, является важным вопросом при проектировании радиоэлектронной аппаратуры. Провести многовариантный вычислительный эксперимент при исследовании тепловых режимов плат с локальными источниками теплоты на их поверхностях методом R -функций позволяет система ПОЛЕ, разработанная под руководством академика НАН Украины В. Л. Рвачева в Институте проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины. В работе впервые использовано построенное с помощью R -функций уравнение фрактальной области «ковёр Серпинского».

1. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Методы расчета теплового режима приборов. – Москва: Радио и связь, 1990. – 312 с.
2. Дульнев Г. Н., Семьякин Э. М. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. – Ленинград: Энергия, 1968. – 360 с.
3. Максименко-Шейко К. В., Толок А. В., Шейко Т. И. R -функции в фрактальной геометрии // Информ. технологии. – 2011. – № 7. – С. 24–27.
4. Максименко-Шейко К. В., Толок А. В., Шейко Т. И. R -функции как аппарат в приложениях фрактальной геометрии // Прикл. информатика. – 2010. – № 6 (30). – С. 21–27.
5. Максименко-Шейко К. В., Уваров Р. А., Шейко Т. И. Математическое и компьютерное моделирование тепловых режимов радиоэлектронной аппаратуры методом R -функций // Электронное моделирование. – 2009. – 31, № 4. – С. 79–87.
6. Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. Математическое моделирование электромагнитных полей в регулярных волноводах фрактальной природы методом R -функций // Проблемы машиностроения. – 2010. – 13, № 5. – С. 48–55.

7. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
8. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
9. Стоян Ю. Г., Путятин В. П. Размещение источников физических полей. – Киев: Наук. думка, 1981. – 184 с.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ
РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ПЛАТ З РОЗТАШУВАННЯМ ДЖЕРЕЛ
ЗА СХЕМОЮ «КИЛИМ СЕРПІНСЬКОГО»**

Розглянуто питання застосування метода R -функцій для розв'язання задач розрахунку температурних полів плат з локальними джерелами тепла на їх поверхнях. Джерела розміщено за схемою «килим Серпінського». Наведено структури розв'язків для різних типів граничних умов. При розв'язанні використаний метод Рітца. Приклади чисельної реалізації виконано в системі ПОЛЕ. Досліджено вплив потужності джерел на розподіл температурного поля.

**MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL
CONDITIONS OF ELECTRONIC BOARDS WITH SOURCES
DISTRIBUTION AS THE «SIERPINSKI'S CARPET»**

The questions of R -functions method application for solving problems of calculation the temperature fields of boards with local heat sources on their surfaces, placed as the «Sierpinski's carpet» are considered. The structures of solutions for various types of boundary conditions are given. The Ritz method is used for solution. The examples of numerical realization are executed in POLYE system. The influence of sources intensities on the temperature field distribution is investigated.

Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков,
Харьков. нац. ун-т имени В. Н. Каразина, Харьков

Получено
17.10.11