УДК 539.3

Л. В. Назаренко

ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА УПРОЧНЕННЫХ ОРТОТРОПНЫМИ ВОЛОКНАМИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ КОМПОНЕНТ

Модель деформирования композитных материалов с физически нелинейными компонентами обобщается на случай материалов, представляющих собой матрицу, армированную однонаправленными бесконечными волокнами. Предполагается, что матрица является изотропной и деформируется нелинейно, а волокна являются линейно-упругими и имеют ортотропную симметрию. Исходными являются стохастические дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости. Преобразованием их к интегральным уравнениям и применением метода условных моментов задача сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, для решения которой применен метод простых итераций. На основе предложенного подхода построены алгоритмы вычисления эффективных деформативных свойств композитов с ортотропными компонентами, где нелинейность обусловлена нелинейным деформированием матрицы. Исследованы зависимости коэффициентов Пуассона от макродеформации и диаграммы макродеформирования для различной объемной концентрации компонент, а также параметра, характеризующего форму включений.

Введение. Проблема исследования нелинейных деформативных свойств композитных материалов представляет большой теоретический и практический интерес и является актуальной. Нелинейность деформирования композитных материалов может быть обусловлена как микроразрушениями в компонентах [2, 5, 9–13], проявляющимися в виде образования микропор или микротрещин в процессе деформирования, что характерно для материалов с хрупкими компонентами, таких как полимерные композиты при низких температурах, композиты с углеродным связующим, керамические композиты, так и физической нелинейностью деформирования компонент [1, 4]. Некоторые аспекты поведения физически нелинейных материалов рассмотрены в работах [6, 7].

Особый интерес представляют композитные материалы на основе полимерных материалов при повышенных температурах. Прогнозирование эффективных свойств таких композитов связано с решением физически нелинейной задачи упругости для микронеоднородного тела, математические трудности которой существенно сложнее по сравнению с линейной задачей, особенно для регулярных структур [1, 2]. В случае стохастической структуры использование свойств эргодичности [3, 8] позволяет заменить усреднение окончательного решения по макрообъему предварительным статистическим усреднением, что существенно упрощает постановку задачи и ее решение. Применение метода условных моментов [3, 4] позволяет свести задачу об эффективных свойствах физически нелинейных композитных материалов с произвольной формой структурных элементов к системе нелинейных алгебраических уравнений.

В настоящей работе постановка задачи об эффективных деформативных свойствах композитных материалов, компоненты которых подчиняются закону физической нелинейности [4], обобщается на случай ортотропной симметрии физико-механических свойств компонент. В качестве численного примера исследованы эффективные свойства композита на основе физически нелинейной изотропной матрицы и ортотропных линейно-упругих волокон.

1. Рассмотрим представительный объем композитного материала стохастической структуры, компоненты которого удовлетворяют физически нелинейному закону деформирования. Задача о напряженно-деформированном состоянии в микроточке такого композитного материала при статическом нагружении сводится к

– *уравнениям равновесия*:

$$\sigma_{ij,j}(x_r) = 0\,; \tag{1}$$

– *зависимостям между напряжениями и деформациями*:

$$\sigma_{ij}(x_r) = \lambda_{ijk\ell}(\varepsilon_{mn}(x_r))\varepsilon_{k\ell}(x_r)\,; \tag{2}$$

– *соотношениям Коши*:

$$\varepsilon_{ij}(x_r) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(x_r) + u_{j,i}(x_r))\,, \tag{3}$$

где $u_i(x_r)$ – неизвестные перемещения, причем тензор модулей упругости $\lambda_{ijk\ell}(\varepsilon_{mn}(x_r))$, детерминированно зависящий от деформаций $\varepsilon_{mn}(x_r)$, является случайной статистически однородной функцией координат, одноточечная плотность распределения которого имеет вид

$$f(\lambda_{ijmn}\varepsilon_{mn}(x_r)) = \sum_{k=1}^{2} c_k \delta\big(\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{k\ell}(x_r)) - \lambda_{ijmn}^{[k]}(\varepsilon_{k\ell}(x_r))\big)\,, \tag{4}$$

где $\lambda_{ijmn}^{[k]}(\varepsilon_{k\ell}(x_r))$ – тензор модулей упругости k-компоненты; c_k – относительное объемное содержания k-компоненты; $c_1 + c_2 = 1$.

Подставляя зависимости между напряжениями и деформациями (2) в уравнение равновесия (1) и учитывая соотношение Коши (3), приходим к системе физически и статистически нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях [3]:

$$[\lambda_{ijmn}(\varepsilon_{k\ell}(x_r))u_{m,n}(x_r)]_{,j} = 0\,. \tag{5}$$

Представив случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij}(x_r) = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0(x_r), \qquad \varepsilon_{ij}(x_r) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0(x_r)\,,$$

$$u_i(x_r) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0(x_r)\,, \tag{6}$$

систему (5) преобразуем в систему дифференциальных уравнений относительно флуктуаций перемещений:

$$\lambda_{ijk\ell}^c u_{k,\ell j}^0(x_r) + [(\lambda_{ijk\ell}(\varepsilon_{mn}(x_r)) - \lambda_{ijk\ell}^c)\varepsilon_{k\ell}(x_r)]_{,j} = 0 \tag{7}$$

с нулевыми граничными условиями на бесконечно удаленной границе области:

$$u_i^0(x_r)\big|_\infty = 0\,. \tag{8}$$

Здесь тензор λ_{ijmn}^c – некоторый детерминированный тензор модулей упругости с независимыми от координат компонентами.

С помощью тензорной функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda_{ijmn}^c G_{mk,jn}(x_r - y_r) + \delta(x_r - y_r)\delta_{ik} = 0, \qquad G_{mk}(x-y)\big|_\infty = 0\,, \tag{9}$$

краевую задачу (7), (8) сведем к интегральному уравнению относительно деформаций:

$$\varepsilon_{ij}(x_r) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \mathcal{K}_{ijk\ell}(x_r - y_r) * [(\lambda_{k\ell mn}(\varepsilon_{pq}(y_r)) - \lambda_{k\ell mn}^c)\varepsilon_{mn}(y_r)]\,, \tag{10}$$

где интегральный оператор $\mathcal{K}_{ijk\ell}(x_r - y_r)$ действует в соответствии с правилом

$$\mathcal{K}_{ijk\ell}(x_r - y_r) * \psi(y_r) = \int\limits_{V_y} G_{(ik,j)\ell}(x_r - y_r)\big(\psi(y_r) - \langle \psi \rangle\big)\, d^3V_y \,. \qquad (11)$$

Если макрообъем композита находится в условиях однородных макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформаций $\langle \varepsilon_{k\ell} \rangle$, то напряжения $\sigma_{ij}(x_r)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(x_r)$ будут статистически однородными случайными функциями, удовлетворяющими свойству эргодичности, т. е. осреднение случайных полей по объему совпадает со статистическим осреднением по ансамблю реализаций. В этом случае макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформации $\langle \varepsilon_{k\ell} \rangle$ композита связаны соотношениями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda^*_{ijk\ell}(\langle \varepsilon_{mn} \rangle)\langle \varepsilon_{k\ell} \rangle, \qquad i, j, k, \ell = 1, 2, 3\,, \qquad (12)$$

где $\lambda^*_{ijk\ell}(\langle \varepsilon_{mn} \rangle)$ – тензор эффективных упругих модулей, зависящий от макродеформаций. Таким образом, для определения эффективных свойств композитного материала необходимо решить систему интегральных уравнений (10), (11).

Нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями (2) относится к произвольной точке тела, которая может находиться в одной из компонент. Если точка находится в k-компоненте, то тогда с учетом (4)

$$\sigma^k_{ij}(x_r) = \lambda^{[k]}_{ijmn}(\varepsilon^k_{pq}(x_r))\varepsilon^k_{mn}(x_r), \qquad k = 1, 2\,. \qquad (13)$$

Напряжения $\sigma^k_{ij}(x_r)$ и деформации $\varepsilon^k_{mn}(x_r)$ в k-компоненте можно представить в виде суммы

$$\sigma^k_{ij}(x_r) = \langle \sigma^k_{ij} \rangle + \sigma^{k\,0}_{ij}(x_r), \qquad \varepsilon^k_{ij}(x_r) = \langle \varepsilon^k_{ij} \rangle + \varepsilon^{k\,0}_{ij}(x_r)\,. \qquad (14)$$

Пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компоненты, нелинейный закон (13) запишем в виде

$$\langle \sigma^k_{ij} \rangle = \lambda^{[k]}_{ijmn}(\langle \varepsilon^k_{pq} \rangle)\langle \varepsilon^k_{mn} \rangle. \qquad (15)$$

Усредняя (15) по макрообъему, получим соотношение для макронапряжений

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^{2} c_k \lambda^{[k]}_{ijmn}(\langle \varepsilon^k_{pq} \rangle)\langle \varepsilon^k_{mn} \rangle\,. \qquad (16)$$

Сравнивая выражения (16) и (12), видим, что для определения тензора эффективных упругих модулей $\lambda^*_{ijk\ell}(\langle \varepsilon_{mn} \rangle)$ достаточно определить соотношения, связывающие средние деформации в компоненте $\langle \varepsilon^k_{ij} \rangle$ и средние деформации в макрообъеме композита $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$. Действительно, если такие соотношения имеют вид

$$\langle \varepsilon^k_{ij} \rangle = A^k_{ijmn}(\langle \varepsilon^k_{pq} \rangle)\langle \varepsilon_{mn} \rangle\,, \qquad (17)$$

то, подставляя (17) в (16) и сравнивая с (12), можно получить следующие выражения для эффективных модулей:

$$\lambda^*_{ijmn}(\langle \varepsilon_{pq} \rangle) = \sum_{k=1}^{2} c_k \lambda^{[k]}_{ijpq}(\langle \varepsilon^k_{\alpha\beta} \rangle) A^k_{pqmn}(\langle \varepsilon^k_{\alpha\beta} \rangle)\,. \qquad (18)$$

Таким образом, задача об определении эффективных деформативных свойствах физически нелинейных композитов сводится к нахождению тензора $A^k_{ijmn}(\langle \varepsilon^k_{\alpha\beta} \rangle)$.

Применяя к уравнению (10), (11) аппарат условного усреднения и пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонент, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\left\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \right\rangle = \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle + \sum_{k=1}^{2} \mathcal{K}_{ijpq}^{\nu k} [\lambda_{pqmn}^{[k]}(\left\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^{k} \right\rangle) - \lambda_{pqmn}^{c}] \left\langle \varepsilon_{mn}^{k} \right\rangle, \qquad k, \nu = 1,2\,, \tag{19}$$

где матричный оператор $\mathcal{K}_{ijpq}^{\nu k}$ определяется формулой

$$\mathcal{K}_{ijpq}^{\nu k} = \mathcal{K}_{ijpq}(x_r - y_r) * p_{\nu k}(x_r - y_r)\,, \tag{20}$$

причем $\lambda_{pqmn}^{[k]}(\left\langle \varepsilon_{\alpha\beta}^{k} \right\rangle)$ – значение тензора модулей упругости в k-компоненте, $p_{\nu k}(x_r - y_r)$ – вероятность перехода из ν-компоненты в точке x_r в k-компоненту в точке y_r.

2. Для определения тензора эффективных упругих модулей $\lambda_{ijk\ell}^{*}(\left\langle \varepsilon_{mn} \right\rangle)$ необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений (19) относительно средних деформаций в компонентах и, подставив их в (16), найти нелинейную связь между макронапряжениями и макродеформациями (12).

Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную однонаправленными волокнами, имеющими форму эллипсоида в поперечном сечении. Вероятность $p_{\nu k}(x_r - y_r)$ перехода из ν-компоненты в точке x_r в k-компоненту в точке y_r рассматриваемого композитного материала имеет вид [3, 14]

$$p_{\nu k}(x_r - y_r) = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k)\varphi(x_r - y_r)\,,$$

$$\varphi(x_r) = \exp\left(-\sqrt{n_1^2 x_1^2 + n_2^2 x_2^2}\right),$$

$$n_1 = \beta/t_1, \qquad n_2 = \beta/t_2, \qquad \beta = 8/\pi^2 c_2\,, \tag{21}$$

где t_1, t_2 – размеры полуосей эллипсоидального сечения волокна в направлении осей x_1, x_2 соответственно.

В этом случае систему нелинейных алгебраических уравнений (19) представим в виде

$$\left\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \right\rangle = \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle + (-1)^{\nu+1} c_{3-\nu} \left(I_{ijmn} - M_{ijpq} \lambda'_{pqmn}(J_2)\right)^{-1} M_{mn\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta k\ell}^{[3]}(J_2) \left\langle \varepsilon_{k\ell} \right\rangle, \qquad \nu = 1,2\,, \tag{22}$$

где приняты обозначения

$$\lambda'_{pqmn}(J_2) = c_1 \lambda_{ijmn}^{[2]}(J_2) + c_2 \lambda_{ijmn}^{[1]} - \lambda_{ijmn}^{c}\,,$$

$$\lambda_{pqmn}^{[3]}(J_2) = \lambda_{ijmn}^{[1]} - \lambda_{ijmn}^{[2]}(J_2)\,,$$

$$M_{ijpq} = K_{ijpq}(x_r - y_r)\varphi(x_r - y_r)\,. \tag{23}$$

Предполагаем, что включения имеют ортотропную симметрию физико-механических свойств, а матрица является изотропной (два независимых постоянных тензора модулей упругости λ_2 и μ_2). Также предполагаем, что включения являются линейно-упругими (тензор модулей упругости не зависит от деформаций), а матрица удовлетворяет закону нелинейной связи между напряжениями и деформациями. Для матрицы принимаем, что объемные деформации и напряжения связаны линейно, т.е. модуль объемного сжатия $K_2 = \lambda_2(\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle) + \dfrac{2}{3\mu_2(\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle)}$ не зависит от деформаций, а девиаторы напряжений $\langle\sigma_{ij}^2\rangle'$ и деформаций $\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle'$ связаны нелинейным законом:

$$\langle\sigma_{ij}^2\rangle' = 2\mu_2(J_2)\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle', \qquad J_2 = \left(\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle', \langle\varepsilon_{ij}^2\rangle'\right)^{1/2}. \tag{24}$$

Диаграмму деформирования матрицы будем описывать законом с линейным упрочнением:

$$\mu_2(J_2) = \begin{cases} \mu_2^0, & J_2 < \dfrac{k_2}{2\mu_2^0}, \\ \mu_2' + \left(1 - \dfrac{\mu_2'}{\mu_2^0}\right)\dfrac{k_2}{2J_2}, & J_2 \ge \dfrac{k_2}{2\mu_2^0}, \end{cases} \tag{25}$$

где μ_2^0, μ_2', $k_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sigma_{2T}$ – постоянные материала (σ_{2T} – предел текучести материала матрицы). Тогда тензор модулей упругости матрицы зависит от девиатора деформаций и имеет вид

$$\lambda_{ijk\ell}^{[2]} = \lambda_2(J_2)\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu_2(J_2)I_{ijmn}. \tag{26}$$

Переходя во всех тензорных величинах к матричным соотношениям согласно схеме $11 \to 1,\ 22 \to 2,\ 33 \to 3,\ 23 \to 4,\ 13 \to 5,\ 12 \to 6$, получим для матрицы M_{ij} соотношения

$$M_{11} = -\frac{2}{\pi}\left(\lambda_{66}^c A_3 + \frac{\lambda_{22}^c}{\bar{t}_2^2}A_3\right), \qquad M_{12} = -\frac{2}{\pi\bar{t}_2^2}(\lambda_{12}^c + \lambda_{66}^c)A_2,$$

$$M_{22} = -\frac{2}{\pi\bar{t}_2^2}\left(\lambda_{11}^c A_2 + \frac{\lambda_{66}^c}{\bar{s}_2^2}A_1\right), \qquad M_{44} = -\frac{1}{2\pi\bar{t}_2^2}B_1,$$

$$M_{55} = -\frac{1}{2\pi}B_2, \qquad M_{66} = -\frac{1}{2\pi}\left(\lambda_{11}^c A_3 - \frac{2\lambda_{12}^c}{\bar{t}_2^2}A_2 + \frac{\lambda_{22}^c}{\bar{t}_2^4}A_1\right),$$

$$M_{33} = M_{23} = M_{13} = 0. \tag{27}$$

Здесь параметр эллипсоидального сечения волокна определяется выражением $\bar{t}_2 = \dfrac{t_2}{t_1}$, а величины A_j, $j = 1,2,3$, будут иметь различный вид в зависимости от знака параметра Q:

$$Q = f^2 - q, \tag{28}$$

где

$$f = \frac{\lambda_{11}^c\lambda_{22}^c - \lambda_{12}^c(\lambda_{12}^c + 2\lambda_{66}^c)}{\bar{t}_2^2}, \qquad q = \frac{4\lambda_{11}^c\lambda_{22}^c\lambda_{66}^c}{\bar{t}_2^4}. \tag{29}$$

Если $Q > 0$, то

1) при $f > 0$ имеем

$$A_1 = \frac{\pi\bar{t}_2^4}{2(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c)\lambda_{66}^c - \bar{t}_2^4 f} \times$$
$$\times\left[1 - \frac{\lambda_{66}^c\sqrt{\lambda_{11}^c}\,(-\bar{t}_2^2\sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c}) + \bar{t}_2^2 f}{\sqrt{Q}\sqrt{\lambda_{22}^c\lambda_{66}^c}}\left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}\right)\right],$$

$$A_2 = -\frac{\pi \bar{t}_2^4}{2(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c)\lambda_{66}^c - \bar{t}_2^4 f}\left[1 - \frac{\lambda_{66}^c(\bar{t}_2^2\sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c})}{\bar{t}_2^2\sqrt{Q}}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})\right],$$

$$A_3 = \frac{\pi \bar{t}_2^4}{2(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c)\lambda_{66}^c - \bar{t}_2^4 f} \times$$

$$\times\left[1 - \frac{\lambda_{66}^c\sqrt{\lambda_{22}^c}\,(\bar{t}_2^2\sqrt{\lambda_{11}^c} - \sqrt{\lambda_{22}^c}) + \bar{t}_2^4 f}{\bar{t}_2^4\sqrt{Q}\sqrt{\lambda_{11}^c\lambda_{66}^c}}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})\right], \qquad (30)$$

где

$$z_1 = \frac{1}{2}(f + \sqrt{Q}), \qquad z_2 = \frac{1}{2}(f - \sqrt{Q});$$

2) при $f < 0$ имеем

$$A_1 = -A_2 = A_3 = -\frac{\pi \bar{t}_2^4}{2(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c)\lambda_{66}^c - \bar{t}_2^4 f}. \qquad (31)$$

Если $Q = 0$, то

1) при $f > 0$ имеем

$$A_1 = \frac{\pi \bar{t}_2^4(\sqrt[4]{\lambda_{22}^c} - 4\bar{t}_2^2\sqrt[4]{\lambda_{11}^c})}{2\lambda_{66}^c\sqrt[4]{\lambda_{22}^c}\,(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c - 10\bar{t}_2^2\sqrt{\lambda_{11}^c\lambda_{22}^c})},$$

$$A_2 = -\frac{\pi \bar{t}_2^2}{4\lambda_{66}^c\sqrt[4]{\lambda_{11}^c\lambda_{22}^c}\,(\bar{t}_2^2\sqrt[4]{\lambda_{11}^c} + \sqrt[4]{\lambda_{22}^c})^2},$$

$$A_3 = \frac{\pi \bar{t}_2^4(\bar{t}_2^2\sqrt[4]{\lambda_{11}^c} - 4\sqrt[4]{\lambda_{22}^c})}{2\lambda_{66}^c\sqrt[4]{\lambda_{11}^c}(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c - 10\bar{t}_2^2\sqrt{\lambda_{11}^c\lambda_{22}^c})}; \qquad (32)$$

2) при $f < 0$ имеем

$$A_1 = -A_2 = A_3 = \frac{\pi \bar{t}_2^4}{2\lambda_{66}^c(\bar{t}_2^4\sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c})}. \qquad (33)$$

Если $Q < 0$, то

$$A_1 = \frac{\pi \bar{t}_2^4}{2(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c)\lambda_{66}^c - \bar{t}_2^4 f}\left[1 - \frac{\lambda_{66}^c\sqrt{\lambda_{11}^c}\,(\sqrt{\lambda_{22}^c} - \bar{t}_2^2\sqrt{\lambda_{11}^c}) + \bar{t}_2^2 f}{\sqrt{f + \sqrt{q}}\sqrt{\lambda_{22}^c\lambda_{66}^c}}\right],$$

$$A_2 = -\frac{\pi \bar{t}_2^4}{2(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c)\lambda_{66}^c - \bar{t}_2^4 f}\left[1 - \frac{\lambda_{66}^c(\bar{t}_2^2\sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c})}{\bar{t}_2^2\sqrt{f + \sqrt{q}}}\right],$$

$$A_3 = \frac{\pi \bar{t}_2^4}{2(\bar{t}_2^4\lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c)\lambda_{66}^c - \bar{t}_2^4 f}\left[1 - \frac{\lambda_{66}^c\sqrt{\lambda_{22}^c}\,(\bar{t}_2^2\sqrt{\lambda_{11}^c} - \sqrt{\lambda_{22}^c}) + \bar{t}_2^4 f}{\bar{t}_2^4\sqrt{f + \sqrt{q}}\sqrt{\lambda_{11}^c\lambda_{66}^c}}\right]. \qquad (34)$$

Определив тензор M_{ij}, согласно (16)–(18) можем вычислить эффективные модули композита, армированного бесконечными ортотропными волокнами, где постоянные λ_{ij}^c принимаем в виде

$$\lambda_{ij}^{c} = \begin{cases} \left\langle \lambda_{ij} \right\rangle, & \lambda_{ij}^{[1]} \le \lambda_{ij}^{[2]}, \\ \left\langle \lambda_{ij}^{-1} \right\rangle^{-1}, & \lambda_{ij}^{[1]} > \lambda_{ij}^{[2]}, \end{cases}$$

$$\left\langle \lambda_{ii} \right\rangle = c_1\lambda_{ii}^{[1]} + c_2\left(K_2 + \frac{4}{3}\mu_0^2\right), \qquad i = 1,2,3\,,$$

$$\left\langle \lambda_{ij} \right\rangle = c_1\lambda_{ij}^{[1]} + c_2\left(K_2 - \frac{2}{3}\mu_0^2\right), \qquad i,j = 1,2,3, \quad i \ne j\,,$$

$$\left\langle \lambda_{ii} \right\rangle = c_1\lambda_{ii}^{[1]} + c_2\mu_0^2, \qquad i = 4,5,6\,, \tag{35}$$

причем суммирование по повторяющемуся индексу не производится.

Определив из уравнений (19) средние деформации в компонентах $\left\langle \varepsilon_{mn}^{k} \right\rangle$ и подставив их в (16), найдем выражения для 9 составляющих матрицы эффективных модулей упругости рассматриваемого композита λ_{11}^{*}, λ_{12}^{*}, λ_{13}^{*}, λ_{22}^{*}, λ_{23}^{*}, λ_{33}^{*}, λ_{44}^{*}, λ_{55}^{*}, λ_{66}^{*}:

$$\lambda_{ij}^{*} = \left\langle \lambda_{ij} \right\rangle + c_1c_2L_{ij}(J_2)\,,$$

$$\lambda_{pp}^{*} = \left\langle \lambda_{pp} \right\rangle + c_1c_2\,\frac{4M_{pp}\lambda_{pp}^{[3]}(J_2)^2}{1 - 4M_{pp}\lambda'_{pp}(J_2)}, \qquad i,j = 1,2,3, \quad p = 4,5,6\,, \tag{36}$$

где суммирование по индексу p не производится.

Здесь введены следующие обозначения:

$$L_{ij}(J_2) = P_{1i}(J_2)R_{1j}(J_2) + P_{2i}(J_2)R_{2j}(J_2)\,, \tag{37}$$

а

$$R_{nj}(J_2) = M_{1n}\lambda_{1j}^{[3]}(J_2) + M_{2n}\lambda_{2j}^{[3]}(J_2)\,,$$

$$P_{nj}(J_2) = N_{1n}(J_2)\lambda_{1j}^{[3]}(J_2) + N_{2n}(J_2)\lambda_{2j}^{[3]}(J_2), \qquad n = 1,2\,. \tag{38}$$

Параметры $N_{nm}(J_2)$, $n,m = 1,2$, имеют вид

$$N_{11}(J_2) = \frac{1}{z}\left(1 - M_{11}\lambda'_{12}(J_2) - M_{22}\lambda'_{22}(J_2)\right),$$

$$N_{12}(J_2) = \frac{1}{z}\left(M_{11}\lambda'_{12}(J_2) + M_{12}\lambda'_{22}(J_2)\right),$$

$$N_{21}(J_2) = \frac{1}{z}\left(M_{12}\lambda'_{11}(J_2) + M_{22}\lambda'_{12}(J_2)\right),$$

$$N_{22}(J_2) = \frac{1}{z}\left(1 - M_{11}\lambda'_{12}(J_2) - M_{12}\lambda'_{12}(J_2)\right),$$

$$z = 1 - M_{11}\lambda'_{12}(J_2) - M_{22}\lambda'_{22}(J_2) - 2M_{12}\lambda'_{12}(J_2) + \\ + \left(M_{11}M_{22} - M_{12}^2\right)\left(\lambda'_{11}(J_2)\lambda'_{12}(J_2) - \lambda'_{12}(J_2)^2\right), \tag{39}$$

где матрицы M_{ij}, $\lambda'_{mn}(J_2)$, $\lambda_{mn}^{[3]}(J_2)$ определяются соотношениями (23).

3. Для решения нелинейной системы алгебраических уравнений (22) используем метод простых итераций, где в качестве нулевого приближения выбираем решение линейной задачи $\lambda_2^{(0)} = \lambda_2(0)$, $\mu_2^{(0)} = \mu_2(0)$.

Для композитного материала стохастической структуры с ортотропными волокнами решение линейной задачи получено в работах [3, 14]. Если задан тензор макродеформаций $\left\langle \varepsilon_{k\ell} \right\rangle$, то можно определить средние деформации в компонентах в нулевом приближении на основе соотношений (22):

$$\left\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \right\rangle^{(0)} = \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle + (-1)^{\nu+1} c_{3-\nu} (I_{ijmn} - M_{ijpq} \lambda_{pqmn}^{\prime(0)})^{-1} M_{mn\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta k\ell}^{[3](0)} \left\langle \varepsilon_{k\ell} \right\rangle. \quad (40)$$

Здесь

$$\lambda_{ijk\ell}^{[2](0)} = \lambda_2(0)\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu_2(0) I_{ijmn}.$$

Алгоритм последовательных приближений для решения системы нелинейных алгебраических уравнений сформулируем следующим образом:

Средние деформации в компонентах в n-м приближении связаны с девиатором средних деформаций в компонентах в $(n-1)$-м приближении

$$\left\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \right\rangle^{(n)} = \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle + (-1)^{\nu+1} c_{3-\nu} \left(I_{ijmn} - M_{ijpq} \lambda_{pqmn}^{\prime(n-1)}\right)^{-1} M_{mn\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta k\ell}^{[3](n-1)} \left\langle \varepsilon_{k\ell} \right\rangle, \quad (41)$$

где

$$\lambda_{ijk\ell}^{[2](n-1)} = \lambda_2^{(n-1)}(J_2)\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu_2^{(n-1)}(J_2) I_{ijmn}.$$

Здесь

$$\mu_2^{(n-1)}(J_2) = \begin{cases} \mu_2^0, & J_2^{(n-1)} < \dfrac{k_2}{2\mu_2^0}, \\ \mu_2' + \left(1 - \dfrac{\mu_2'}{\mu_2^0}\right) \dfrac{k_2}{2J_2^{(n-1)}}, & J_2^{(n-1)} \ge \dfrac{k_2}{2\mu_2^0}, \end{cases}$$

$$\lambda_2^{(n-1)}(J_2) = K_2 - \frac{2}{3}\mu_2^{(n-1)}(J_2),$$

$$J_2^{(n-1)} = \left(\left\langle \varepsilon_{ij}^2 \right\rangle^{\prime(n-1)}, \left\langle \varepsilon_{ij}^2 \right\rangle^{\prime(n-1)} \right)^{1/2}. \quad (42)$$

Таким образом, уравнения (27)–(39), (40)–(42) позволяют определить средние деформации в компонентах композитного материала с ортотропными волокнами с учетом физической нелинейности матрицы как функции макродеформаций

$$\left\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \right\rangle^{(n)} \left(\left\langle \varepsilon_{mn} \right\rangle\right). \quad (45)$$

Определив средние деформации в компонентах как функции макродеформаций на основании соотношений (45), найдем матрицу λ_{ij}^* эффективных модулей упругости рассматриваемого композита как функцию модулей упругости компонент, объёмного содержания включений c_1 в матрице параметров формы включений t и макродеформаций:

$$\lambda_{ij}^* = \lambda_{ij}^*(\lambda_{k\ell}^{[1]}, \lambda_2(J_2), \mu_2(J_2), c_1, t), \qquad t = \frac{t_2}{t_1}. \quad (46)$$

4. На основе соотношений (27)–(42) определены деформативные свойства волокнистого композита с ортотропными волокнами и напряженно-деформированное состояние при заданных макродеформациях $\left\langle \varepsilon_{mn} \right\rangle$. Вычисления были проведены для композитного материала с волокнами (топаз), имеющими следующие упругие постоянные:

$$\lambda_{11}^{[1]} = 287\ \text{ГПа}, \qquad \lambda_{22}^{[1]} = 365\ \text{ГПа}, \qquad \lambda_{33}^{[1]} = 300\ \text{ГПа},$$

$$\lambda_{23}^{[1]} = 90\ \text{ГПа}, \qquad \lambda_{13}^{[1]} = 85\ \text{ГПа}, \qquad \lambda_{12}^{[1]} = 128\ \text{ГПа},$$

$$\lambda_{44}^{[1]} = 110\ \text{ГПа}, \qquad \lambda_{55}^{[1]} = 135\ \text{ГПа}, \qquad \lambda_{66}^{[1]} = 133\ \text{ГПа},$$

и алюминиевой матрицы с характеристиками

$$K_2 = 70.3\,\text{ГПа}, \quad \mu_2^0 = 26.09\,\text{ГПа}, \quad \mu_2' = 10\,\text{ГПа}, \quad \sigma_T = 0.45\,\text{ГПа}$$

для различной объёмной концентрации включений:

$$c_1 = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,$$

и параметра, характеризующего форму эллипсоидального сечения волокон

$$t = 8.$$

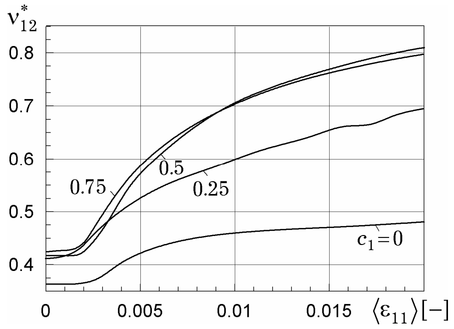

Рис. 1. Зависимости коэффициентов Пуассона ν_{12}^* от макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для различного объемного содержания волокон c_1.

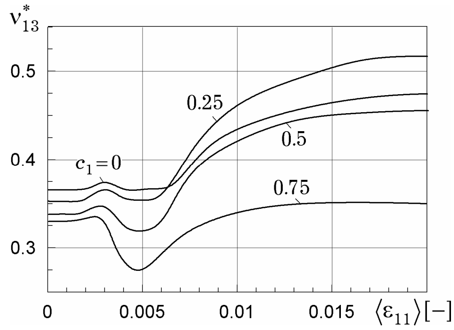

Рис. 2. Зависимости коэффициентов Пуассона ν_{13}^* от макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для различного объемного содержания волокон c_1.

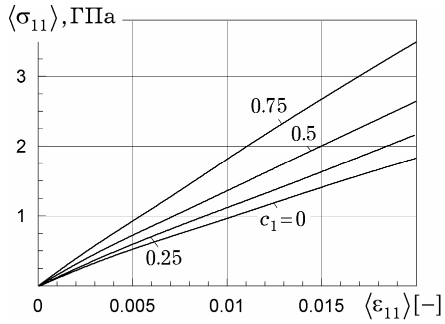

Рис. 3. Диаграмма зависимости макронапряжений $\langle\sigma_{11}\rangle$ от макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для различного объемного содержания волокон c_1.

На рис. 1, рис. 2 представлены зависимости коэффициентов Пуассона ν_{12}^* и ν_{13}^* от макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для различного объемного содержания волокон c_1. На рис. 3 показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$ от макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для различного объемного содержания волокон c_1. Из приведенных графиков виден характер влияния объемного содержания волокон на эффективные деформативные свойства композита. Увеличение объемного содержания волокон приводит к увеличению жесткости, а также к уменьшению коэффициента Пуассона ν_{13}^*. Коэффициент Пуассона ν_{12}^* увеличивается с увеличением объемного содержания волокон, а при высоком объемном содержании волокон наблюдается более сложная зависимость, что обусловлено влиянием анизотропии волокон.

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
   То же: *Kauderer H.* Nichtlineare mechanik. – Berlin: Springer, 1958. – xii+684 S.
2. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
3. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 3.)
4. *Хорошун Л. П., Шикула Е. Н.* Нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов // Механика композитных материалов. – 2002. – **38**, № 4. – С. 473–486.
   То же: *Khoroshun L. P., Shikula E. N.* Nonlinear deformational properties of dispersely strengthened materials // Mech. Compos. Mater. – 2002. – **38**, No. 4. – P. 311–320.
5. *Desrumaux F., Meraghni F., Benzeggagh M. L.* Generalised Mori–Tanaka scheme to model anisotropic damage using numerical Eshelby tensor // J. Compos. Mater. – 2001. – **35**, No. 7. – P. 603–624.
6. *Huang J., Schmauder S., Weber U., Geier S.* Micromechanical modeling of the elastoplastic behaviour of nanodispersed elastomer particle-modified PA 6 // Comput. Mater. Sci. – 2012. – **52**, No. 1. – P. 107–111.
7. *Huang J., Weber U., Schmauder S., Geier S.* Micro-mechanical modeling of Young's modulus of semi-crystalline polyamide 6 (PA 6) and elastomer particle-modified-PA 6 // Comput. Mater. Sci. – 2011. – **50**, No. 4. – P. 1315–1319.
8. *Khoroshun L. P.* Methods of theory of random functions in problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 1978. – **14**, No. 2. – P. 113–124.
   То же: *Хорошун Л. П.* Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3–17.
9. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. I. Short-term damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, No. 10. – P. 1035-1041.
   То же: *Хорошун Л. П.* Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 10. – С. 120–127.
10. *Khoroshun L. P., Nazarenko L. V.* Deformation and microdamage of a discrete-fibrous composite with transversely isotropic components // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 6. – P. 696–703.
    То же: *Хорошун Л. П., Назаренко Л. В.* Деформирование и микроповреждаемость дискретно-волокнистого композита с трансверсально-изотропными компонентами // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 6. – С. 82–90.
11. *Nazarenko L. V.* Damageability of a material reinforced with unidirectional orthotropic fibers for an exponential function of long-term microstrength // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 653–664.
    То же: *Назаренко Л. В.* Повреждаемость материала, армированного однонаправленными ортотропными волокнами, при экспоненциальной функции длительной микропрочности // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 1. – С. 122–131.
12. *Nazarenko L. V.* Deformation of composites with arbitrarily oriented orthotropic fibers under matrix microdamages // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 2. – P. 217–231.
    То же: *Nazarenko L. V.* Deformation of composites with arbitrarily oriented orthotropic fibers under matrix microdamages // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 181–192.
13. *Nazarenko L. V.* Deformation of orthotropic composites with unidirectional ellipsoidal inclusions under matrix microdamages // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No. 4. – P. 429–442.
    То же: *Nazarenko L. V.* Deformation of orthotropic composites with unidirectional ellipsoidal inclusions under matrix microdamages // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 121–130.
14. *Nazarenko L. V.* Thermoelastic properties of orthotropic porous materials // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 2. – P. 114–122.
    То же: *Назаренко Л. В.* Термоупругие свойства ортотропных пористых материалов // Прикл. механика. – 1997. – **33,** № 2. – С. 33–40.

ЕФЕКТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗМІЦНЕНИХ ОРТОТРОПНИМИ ВОЛОКНАМИ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ФІЗИЧНІЙ НЕЛІНІЙНОСТІ КОМПОНЕНТ

Модель деформування композитних матеріалів з фізично нелінійними компонентами узагальнюється на випадок матеріалів у вигляді матриці, армованої однонапрямленими нескінченними волокнами. Припускається, що матриця є ізотропною і деформується нелінійно, а волокна є лінійно-пружними і мають ортотропну симетрію. Вихідними є стохастичні диференціальні рівняння фізично нелінійної теорії пружності. Перетвореннями їх до інтегральних рівнянь і застосуванням методу умовних моментів задачу зведено до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, для розв'язання якої застосовано метод простих ітерацій. На основі запропонованого підходу побудовано алгоритми обчислення ефективних деформативних властивостей композитів з ортотропними компонентами, де нелінійність зумовлена нелінійним деформуванням матриці. Досліджено залежності коефіцієнтів Пуассона від макродеформації і діаграми макродеформування для різної об'ємної концентрації компонент, а також параметра, що характеризує форму включень.

EFFECTIVE PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIALS STRENGTHENED BY ORTHOTROPIC FIBERS WITH TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL NONLINEARITY OF COMPONENTS

A model of deformation of composite materials with physically nonlinear components is developed for the case of materials, which are matrix strengthened by unidirectional infinite fibers. It is assumed that matrix is isotropic and is deformed according to nonlinear law and fibers are linear-elastic and have orthotropic symmetry. Stochastic differential equations of physically nonlinear elasticity theory are basic equations. Transformation of these equations into integral equations and application of the method of conditional moments allow us to reduce the problem to the system of nonlinear algebraic equations. Solution is constructed by the method of simple iteration. Basing on the proposed approach the algorithm for determination of the effective deformative properties of such a material is constructed. The nonlinearity of composite deformations is caused by the nonlinearity of the matrix deformations. Using the numerical solution the dependences of Poisson coefficients on macrodeformations and the nonlinear stress-strain diagrams for such a composite are predicted and discussed for different volume fractions and shape of fiber.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
13.01.12