

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН ПРИ ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Анализируется влияние нелинейностей в краевых условиях на свободные нелинейные колебания прямоугольных пластин. Нелинейные граничные условия для мембранных усилий преобразуются в линейные с помощью функции напряжений. Учитываются дополнительные граничные условия, описывающие отсутствие перемещений в плоскости пластинки на ее защемленной части. Приводится сравнение скелетных кривых, полученных с учетом линейных и нелинейных граничных условий.

Введение. Пластины составляют широкий класс систем, использующихся в кораблестроении, строительстве, аэрокосмической технике и энергетике. Поэтому неудивительно, что много усилий предпринято для исследования колебаний пластин. Параметрические колебания пластин были рассмотрены в [2]. Одни из первых результатов по колебаниям пластин при их геометрически нелинейном деформировании были получены А. С. Вольмиром [3]. В статье [10] геометрически нелинейное деформирование пологих оболочек описывается уравнениями Доннела – Муштари – Власова. Движение оболочки моделируется осциллятором Дуффинга. В статье [13] исследуются свободные нелинейные колебания ортотропных пластин. Они шарнирно оперты по двум противоположным сторонам и защемлены по двум другим. Авторы этой статьи пришли к выводу, что удовлетворение граничным условиям в среднем приводит к существенным погрешностям. Геометрически нелинейное деформирование ортотропных пластин описывается уравнениями фон Кармана [11]. Поперечные перемещения и функция напряжений представляются двойными рядами по базисным функциям. Колебания анизотропной защемленной пластинки с умеренными амплитудами рассматриваются в [12]. В модели этой пластинки учитывается геометрическая нелинейность, сдвиги и инерция вращения. Приближенный метод определения нелинейных колебаний пологих оболочек с прямоугольным планом для различных граничных условий предложен в [15].

В этой статье исследуется влияние нелинейностей в граничных условиях для мембранных усилий на колебания пластин при их геометрически нелинейном деформировании. Нелинейные граничные условия относительно перемещений преобразуются в линейные с помощью введения функции напряжений. Сравняются скелетные кривые, полученные на основании трех моделей колебаний пластин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим колебания тонких пластинок с амплитудами, соизмеримыми с их толщиной. Тогда колебания пластинок описываются геометрически нелинейной теорией, сдвиги и инерция вращения не учитываются. Отметим, что геометрическую нелинейность учитываем как в модели деформирования пластинки, так и в нелинейных граничных условиях. Потенциальную энергию деформирования пластинок представим [1] так:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Lambda} (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^z + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^z + \sigma_{12} \varepsilon_{12}^z) dx dy dz, \quad (1)$$

где h – толщина пластинки; Λ – область, занимаемая ее срединной поверхностью; σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , ε_{11}^z , ε_{22}^z , ε_{12}^z – напряжения и деформации, возникающие в пластинке. Напряжения и деформации определяются в соответствии с теорией фон Кармана [6]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11}^z + \nu \varepsilon_{22}^z), \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22}^z + \nu \varepsilon_{11}^z), \\
\sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}^z, \\
\varepsilon_{11}^z &= \varepsilon_{11} - z w_{xx}, \quad \varepsilon_{22}^z = \varepsilon_{22} - z w_{yy}, \quad \varepsilon_{12}^z = \varepsilon_{12} - 2z w_{xy}, \\
\varepsilon_{11} &= u_x + \frac{1}{2} w_x^2, \quad \varepsilon_{22} = v_y + \frac{1}{2} w_y^2, \quad \varepsilon_{12} = v_x + u_y + w_x w_y, \quad (2)
\end{aligned}$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} – деформации срединной поверхности; u , v , w – перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x , y , z . Кинетическую энергию пластинки представим как

$$\mathcal{K} = \frac{\rho h}{2} \int_{\Lambda} (\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx dy, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала пластинки.

Граничные условия для пластинок накладывают ограничения на перемещения, углы поворота, моменты, поперечные и мембранные усилия. Подчеркнем, что только мембранные усилия являются нелинейными функциями от перемещений пластинок. Их представим так [6]:

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + \nu \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 \right) \right], \\
N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[v_y + \frac{1}{2} w_y^2 + \nu \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right], \\
N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} [v_x + u_y + w_x w_y], \quad (4)
\end{aligned}$$

где $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$. В то же время, мембранные усилия линейны относительно функции напряжений [6]:

$$N_x = F_{yy}, \quad N_y = F_{xx}, \quad N_{xy} = -F_{xy}. \quad (5)$$

Поэтому для решения задачи с *линейными граничными* условиями в качестве основных неизвестных выберем $w(x, y, t)$ и $F(x, y, t)$. Потенциальную энергию пластинки относительно функции напряжений и поперечных перемещений представим [4] как

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int_{\Lambda} \left(\frac{D}{2} ((\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu)(w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy})) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2Eh} \left(((\nabla^2 F)^2 + 2(1+\nu)(F_{xy}^2 - F_{xx} F_{yy})) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (F_{xx} w_y^2 + F_{yy} w_x^2 - 2F_{xy} w_x w_y) \right) \right) dx dy, \quad (6)
\end{aligned}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость.

Функцию напряжений и поперечные перемещения разложим в ряды по базисным функциям $F_i(x, y)$, $W_i(x, y)$:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_w} \varphi_i(t) W_i(x, y),$$

$$F(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_F} \varphi_{N_w+i}(t) F_i(x, y). \quad (7)$$

В основном, предполагается, что функция напряжений удовлетворяет только граничным условиям для мембранных усилий. Граничные условия, накладывающие ограничения на перемещения в плоскости, не учитываются. Отметим, что в работах [14, 15] граничные условия равенства нулю перемещений в плоскости приводятся к одному граничному условию относительно функции напряжений.

2. Граничные условия для функции напряжений. Рассмотрим пластины, заземленные на стороне $y = 0$. Тогда граничные условия имеют вид

$$w(x, 0) = 0, \quad w_x|_{y=0} = 0,$$

$$v(x, 0) = 0 \quad u(x, 0) = 0. \quad (8)$$

Из соотношений (4), (5) получим

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + \nu(v_y + \frac{1}{2} w_y^2) \right) = F_{yy},$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(v_y + \frac{1}{2} w_y^2 + \nu(u_x + \frac{1}{2} w_x^2) \right) = F_{xx}.$$

Эти уравнения можно представить так:

$$u_x = \frac{1}{Eh} (F_{yy} - \nu F_{xx}) - \frac{1}{2} w_x^2,$$

$$v_y = \frac{1}{Eh} (F_{xx} - \nu F_{yy}) - \frac{1}{2} w_y^2. \quad (9)$$

Из этих соотношений получим

$$u(x, y) = \frac{1}{Eh} \int_{x_0}^x (F_{yy}(\zeta, y) - \nu F_{\zeta\zeta}(\zeta, y)) d\zeta - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x w_\zeta^2(\zeta, y) d\zeta + \bar{u}(y), \quad (10)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{Eh} \int_{y_0}^y (F_{xx}(x, \zeta) - \nu F_{\zeta\zeta}(x, \zeta)) d\zeta - \frac{1}{2} \int_{y_0}^y w_\zeta^2(x, \zeta) d\zeta + \bar{v}(x), \quad (11)$$

где x_0, y_0 – координаты некоторой точки срединной поверхности; $\bar{u}(y)$, $\bar{v}(x)$ – функции, являющиеся следствием интегрирования уравнений (9). Из уравнения (10) получаем следующую зависимость:

$$u(x, 0) = \frac{1}{Eh} \int_{x_0}^x (F_{yy}(\zeta, y)|_{y=0} - \nu F_{\zeta\zeta}(\zeta, y)|_{y=0}) d\zeta -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x_0}^x w_\zeta^2(\zeta, y)|_{y=0} d\zeta + \bar{u}(0). \quad (12)$$

Второй интеграл в этом уравнении представим так:

$$\int_{x_0}^x w_\zeta^2(\zeta, y)|_{y=0} d\zeta = w_\zeta(\zeta, y)|_{y=0} w(\zeta, 0)|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x w_{\zeta\zeta}^2(\zeta, y)|_{y=0} w(\zeta, 0) d\zeta = 0.$$

Подставив соотношение (12) в граничное условие $u(x, 0) = 0$, получим

$$\frac{1}{Eh} \int_{x_0}^x (F_{yy}(\zeta, y)|_{y=0} - \nu F_{\zeta\zeta}(\zeta, y)|_{y=0}) d\zeta = -\bar{u}(0) = \text{const}.$$

Из этого уравнения следует, что интеграл является постоянной величиной и не зависит от x . Это справедливо, если выполняется следующее соотношение:

$$F_{yy}(x, y)|_{y=0} - \nu F_{xx}(x, y)|_{y=0} \equiv 0. \quad (13)$$

Итак, вместо граничного условия $u(x, 0) = 0$ выведено граничное условие (13) относительно функции напряжений.

Используя граничное условие $v(x, 0) = 0$ и уравнение (11), приходим к следующему соотношению:

$$\frac{1}{Eh} \int_{y_0}^0 \left(\frac{\partial^2 F(x, \zeta)}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F(x, \zeta)}{\partial \zeta^2} \right) d\zeta - \frac{1}{2} \int_{y_0}^0 \left(\frac{\partial w(x, \zeta)}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta + \bar{v}(x) = 0.$$

Граничное условие $v(x, 0) = 0$ выполняется, если функция $\bar{v}(x)$ определяется из последнего уравнения.

Итак, на заземленной стороне пластины должно удовлетворяться одно граничное условие (13) для функции напряжений вместо двух граничных условий для перемещений $u(x, 0) = 0$, $v(x, 0) = 0$.

3. Нелинейная модель с конечным числом степеней свободы. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую колебания пластины. Для этого воспользуемся методом заданных форм. Разложения (7) подставим в кинетическую и потенциальную энергии (3), (6) и выведем уравнения Лагранжа. Так как собственные частоты колебаний пластины в плоскости значительно выше собственных частот изгибных колебаний, то инерцию пластины в плоскости не учитываем. Поэтому система уравнений, описывающая колебания пластинки, состоит из N_w обыкновенных дифференциальных уравнений и N_F алгебраических уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\varphi}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N_w, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} = 0, \quad j = N_w + 1, \dots, N, \quad (15)$$

где $N = N_w + N_F$. Подчеркнем, что уравнения (15) являются линейными относительно обобщенных координат φ_i , $i = N_w + 1, \dots, N$. Решая эти уравнения, получаем зависимости обобщенных координат φ_i , $i = N_w + 1, \dots, N$ от φ_i , $i = 1, \dots, N_w$. Эти уравнения подставляем в (14). В результате получаем систему N_w нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат φ_i , $i = 1, \dots, N_w$. Воспользуемся следующими безразмерными переменными:

$\tau = \Omega_1 t$, $\xi_i = \frac{\varphi_i}{h}$, $i = 1, \dots, N_w$, где

Ω_1 – первая собственная частота колебаний. Колебания пластины описываются следующей нелинейной динамической системой относительно безразмерных переменных и параметров:

$$\ddot{\xi}_k = -\bar{\Omega}_k^2 \xi_k - \sum_{i,j,g=1}^{N_w} \ell_{kijg} \xi_i \xi_j \xi_g, \quad (16)$$

где $\bar{\Omega}_k = \frac{\Omega_k}{\Omega_1}$ – безразмерные частоты изгибных колебаний. Итак, выведенную выше модель назовем *системой А*.

В дальнейшем численные результаты, полученные из *системы А*, будем сравнивать с данными других моделей. Опишем эти модели.

Рассмотрим модель колебаний пластинки, которую назовем *системой В*. Для получения этой системы воспользуемся методом заданных форм. Основными неизвестными для этой модели выбираем три перемещения $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$. Тогда нелинейные колебания пластинки раскладываются в ряды так:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{N_w} \varphi_i(t) W_i(x, y), \\ u(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{N_u} \varphi_{N_w+i}(t) U_i(x, y), \\ v(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{N_v} \varphi_{N_w+N_u+i}(t) V_i(x, y), \end{aligned} \quad (17)$$

где W_i , U_i , V_i – собственные формы линейных колебаний. Подставляя разложения (17) в кинетическую (3) и потенциальную (6) энергию системы, получаем \mathcal{K} и Π как функции обобщенных координат и их скоростей. Записываем уравнения Лагранжа. Собственные частоты продольных колебаний значительно выше собственных частот изгибных колебаний. В этом случае продольная инерция не учитывается в дальнейшем анализе. Уравнения Лагранжа имеют вид (14), (15) при $N = N_w + N_u + N_v$. Алгебраические уравнения (15) линейны относительно обобщенных координат $\varphi_{N_w+1}, \dots, \varphi_N$. Решение этих уравнений представляем в виде квадратичной формы относительно координат φ_i , $i = 1, \dots, N_w$. Эти решения подставляем в уравнения Лагранжа (14) и полученную систему записываем относительно безразмерных переменных. В результате получаем динамическую систему, имеющую вид (16). Эту модель назовем *системой В*.

Рассмотрим еще одну модель колебаний пластинки, которую назовем *системой С*. В качестве основных неизвестных в этом случае выберем $w(x, y, t)$ и $F(x, y, t)$. Эти неизвестные раскладываем по базисным функциям в виде (7). Базисные функции F_i разложения (7) удовлетворяют граничным условиям для мембранных усилий. Для вывода уравнений колебаний пластинки применяем подход, изложенный выше. В результате получаем модель колебаний, которую назовем *системой С*.

Отметим, что собственные формы колебаний, которые используются для получения *системы А*, удовлетворяют всем кинематическим и силовым граничным условиям. Собственные формы колебаний, использующиеся при получении *системы В*, удовлетворяют кинематическим граничным условиям и линеаризованным граничным условиям для мембранных усилий. При получении *системы С* удовлетворяются кинематические граничные условия для $w(x, y, t)$ и граничные условия для мембранных усилий. Подчеркнем, что граничные условия для u , v в этом случае не удовлетворяются. В дальнейшем проведем сравнение нелинейных свободных колебаний, полученных численным моделированием этих трех моделей.

Для расчета собственных форм линейных колебаний используем метод Рэлея – Ритца [6]. Тогда линейные колебания пластинки представим так:

$$[u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, z)] = [U(x, y), V(x, y), W(x, y)] \exp(i\omega t).$$

Собственные формы колебаний приближаем выражениями

$$\begin{aligned}
W(x, y) &= \sum_{i=1}^{N_1} a_i w_i(x, y), \\
U(x, y) &= \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i u_i(x, y), \\
V(x, y) &= \sum_{i=N_2+1}^{N_3} a_i v_i(x, y),
\end{aligned} \tag{18}$$

где w_i , u_i , v_i – базисные функции. Разложения (18) подставляем в функционал Лагранжа. В результате получаем функциональная зависимость, которую, в общем случае, можно представить как $L = L(a_1, \dots, a_{N_3})$. Параметры линейных колебаний конструкции определяем из условия минимума этого функционала:

$$\frac{\partial L}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N_3.$$

Эти соотношения можно представить в виде следующей проблемы собственных значений:

$$(K - \omega^2 C) \tilde{A} = 0,$$

где K и C – матрицы жесткости и масс; $\tilde{A} = (a_1, \dots, a_{N_3})$.

4. Численный анализ колебаний. Рассмотрим колебания шарнирно опертой прямоугольной пластинки со следующими параметрами [6, 7]: $a = 0.515$ м, $b = 0.184$ м, $h = 0.0003$ м, $E = 69 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 2700$ кг/м³, $\nu = 0.33$. Область срединной поверхности пластинки такова: $\Lambda = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$. Граничные условия шарнирно опертой пластинки представим так:

$$\begin{aligned}
w = v = M_x = N_x = 0, & \quad x = 0, \quad x = a, \\
w = u = M_y = N_y = 0, & \quad y = 0, \quad y = b,
\end{aligned} \tag{19}$$

где M_x , M_y – изгибающие моменты. Точные собственные формы колебаний шарнирно опертых прямоугольных пластинок представим так [9]:

$$\begin{aligned}
W_{n,m}(x, y) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \\
U_{n,m}(x, y) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \\
V_{n,m}(x, y) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Для численного анализа колебаний пластинки запишем систему B . Как следует из результатов численного моделирования, следующие собственные формы колебаний должны быть учтены для получения достоверных результатов: $W_{n,m}$ с $n, m = 1, 3$, и $U_{n,m}$, $V_{n,m}$ с $n, m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$, $n + m \leq 12$. Четыре собственные формы изгибных колебаний и 21 собственная форма для u и v в разложениях (17) используются для получения адекватных численных результатов из нелинейной модели. Отметим, что перемещения u , v являются квазистатическими. Поэтому для адекватного их разложения по собственным формам колебаний пластинки требуется достаточно большое число этих форм. Тогда система B (16) имеет четыре

степени свободы. Для исследования колебаний в этой системе применяем метод гармонического баланса [1]. Движения системы представляем в виде следующего ряда Фурье:

$$\xi_i(\tau) = A_{i,1} \cos(\Omega\tau) + A_{i,3} \cos(3\Omega\tau) + \dots, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (21)$$

Амплитуды гармоник (21) определяем из системы нелинейных алгебраических уравнений. Как следует из результатов численного анализа, двух гармоник ряда Фурье (21) достаточно для предсказания движений системы. Результаты численного моделирования периодических колебаний представлены на скелетной кривой. Такая скелетная кривая показана штрихпунктирной линией на рис. 1. По оси ординат на этом рисунке представлен размах периодических колебаний $R_1 = [\max \xi_1(\tau) - \min \xi_1(\tau)] / 2$.

Теперь рассмотрим систему A , которая описывает прямоугольную шарнирно опертую пластинку. Базисные функции $F_{n,m}$ представим так:

$$F_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right). \quad (22)$$

Базисные функции (22) удовлетворяют как нелинейным граничным условиям, так и граничным условиям на перемещения. Численный анализ показывает, что ряды (7) сходятся быстро. В разложении (7) для F использовались первые десять слагаемых. Однако достаточно точное приближенное решение получаем, если учитываются две функции $F_{1,1}$ и $F_{3,1}$. Для расчета скелетных кривых использовали метод гармонического баланса. Результаты расчетов представлены сплошной линией на рис. 1.

На рис. 1 точкой представлен результат, опубликованный М. Amabili [6]. Для его получения удовлетворялись нелинейные краевые условия для мембранных усилий. Данные из [6] и представленные в этой статье результаты близки.

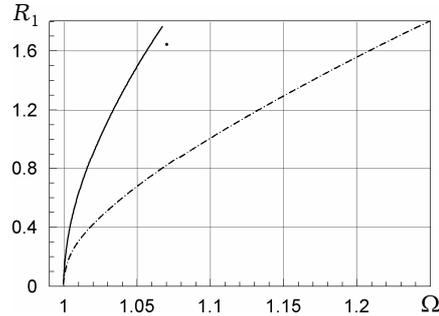


Рис. 1

Рассмотрим квадратную консольную пластинку. Исследуем влияние нелинейных краевых условий на колебания квадратных консольных пластин. Граничные условия для консольной пластинки таковы:

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial y} = v = u = 0, \quad y = 0, \\ Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = M_y = N_y = N_{xy} = 0, \quad y = b, \\ Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = M_x = N_x = N_{xy} = 0, \quad x = 0, \quad x = a, \end{aligned} \quad (23)$$

где Q_x, Q_y – поперечные силы; M_{xy} – крутящий момент.

Для исследования линейных колебаний пластинки применяем метод Рэлея – Ритца. В качестве базисных функций разложений (18) используем произведения ортогональных полиномов:

$$\begin{aligned}
w_i(x, y) &= T_i(x)P_i(y), & u_i(x, y) &= v_i(x, y) = T_i(x)M_i(y), \\
\mathbf{T} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a^3}} \left(-\frac{a}{2} + x \right), \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{a^5}} \left(\frac{a^2}{6} - ax + x^2 \right), \dots \right\}, \\
\mathbf{P} &= \left\{ \frac{\sqrt{5}y^2}{\sqrt{b^5}}, \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{b^7}} \left(-\frac{5b}{6}y^2 + y^3 \right), \frac{84}{\sqrt{b^9}} \left(\frac{15b^2}{28}y^2 - \frac{3b}{2}y^3 + y^4 \right), \dots \right\}, \\
\mathbf{M} &= \left\{ \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{b^3}}, \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{b^5}} \left(-\frac{3b}{4}y + y^2 \right), \frac{15\sqrt{7}}{\sqrt{b^7}} \left(\frac{2b^2}{5}y - \frac{4b}{3}y^2 + y^3 \right), \dots \right\}. \quad (24)
\end{aligned}$$

Расчеты проведены для пластинки со следующими параметрами:

$$a = b = 1 \text{ м}, \quad h = 0.01 \text{ м}, \quad E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad \rho = 7800 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 0.3.$$

Результаты выполненных расчетов первых пяти собственных частот изгибных колебаний квадратной консольной пластинки (в Гц) приведены в табл. 1. Для сравнения приводим также собственные частоты колебаний этой пластинки, полученные А. П. Филиповым [5], и экспериментальные результаты, полученные в [8].

Таблица 1

Номер частоты	1	2	3	4	5
Результаты полученных расчетов	54.68	138.62	336.7	428.65	493.96
Результаты, опубликованные в [5]	54.56	133.8	334.47	427.11	475.39
Экспериментальные данные [8]	53.86	130.64	322.67	426.31	467.13

В качестве примера узловые линии первых пяти собственных форм изгибных колебаний этой пластинки представлены на рис. 2.

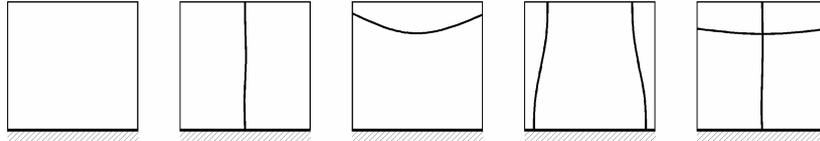


Рис. 2

Рассмотрим нелинейные колебания этой пластинки. Параметры системы B , которая описывается уравнениями (16), рассчитывались численно. Анализовалась сходимость нелинейной модели. Для этого исследовалась численно система (16) с различным числом степеней свободы. При этом учитывалось различное число слагаемых в разложении (17). Для получения достоверных результатов нелинейных колебаний достаточно взять первые две собственные формы изгибных колебаний и двенадцать собственных форм в разложениях u, v (17). Скелетные кривые этой системы показаны на рис. 3 штрихпунктирной линией. В этих движениях величина обобщенной координаты ξ_2 близка к нулю.

Теперь построим численно систему C для анализа нелинейных колебаний пластинки. Подчеркнем, что функция напряжений удовлетворяет только нелинейным граничным условиям для мембранных усилий. Базисные функции разложения (7) представим так:

$$F_i(x, y) = x^2(x - a)^2(y - b)^2 \Phi_i(x, y). \quad (25)$$

Функции Φ_i представляем в виде полиномов, которые выбираем из условий ортогональности функций F_i . Исследовалась сходимость полученных результатов расчетом скелетных кривых системы с разным числом степеней свободы. Для расчета скелетных кривых использовали метод гармонического баланса. Анализ сходимости показал, что пятнадцати базисных функций $F_i(x, y)$ достаточно для получения адекватных результатов. Ре-

зультаты расчетов приведены на скелетных кривых, которые показаны сплошной линией на рис. 3. Итак, если в модели пластины учитываются нелинейные граничные условия, скелетная кривая близка к вертикальной линии. Дело в том, что безразмерная модель колебаний системы (16) имеет очень маленькие нелинейные слагаемые. Например, коэффициент при ξ_1^3 имеет порядок 10^{-4} . Отметим, что такие движения характеризуются амплитудой колебаний ξ_2 , близкой к нулю.

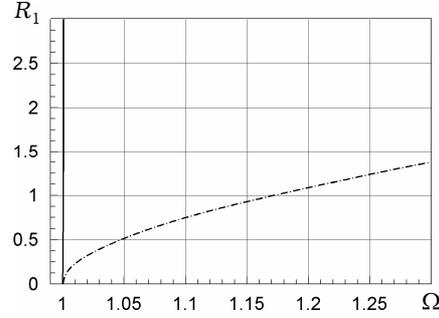


Рис. 3

Исследуем колебания этой же пластины, используя модель А. Тогда функция напряжений удовлетворяет граничному условию (13). Заметим, что базисные функции $F_i(x, y)$ можно представить так:

$$F_i(x, y) = x^2(x - a)^2(y - b)^2 F_{i,1}(x) F_{i,2}(y), \quad i = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Тогда из граничных условий (13), (8) выведем следующие граничные условия для функции напряжений:

$$F_{i,2}(0) = 0, \quad 4F'_{i,2}(0) - bF''_{i,2}(0) = 0, \quad (27)$$

где $F'_{i,2}(y) = \frac{dF_{i,2}}{dy}$. В качестве функций $F_{i,2}(y)$ воспользуемся следующей системой ортогональных полиномов:

$$\left\{ 3\sqrt{\frac{70}{19b^7}} \left(y + \frac{2y^2}{b} \right), 3\sqrt{\frac{14630}{13b^{11}}} \left(-\frac{2b^2y}{19} - \frac{4by^2}{19} + y^3 \right), \dots \right\},$$

которые удовлетворяют граничным условиям (27).

Анализ сходимости результатов расчета нелинейных колебаний проводился сравнением данных расчетов скелетных кривых при различном числе степеней свободы системы. Число слагаемых в разложении (7) менялось от одного до пятнадцати. Сходимость результатов достигается, если учитываются первые шесть базисных функций (7). Полученная скелетная кривая совпадает со сплошной линией, показанной на рис. 3.

Выводы. Исследовано влияние нелинейных граничных условий на свободные колебания прямоугольных пластинок, совершающих геометрически нелинейное деформирование. Рассмотрены пластинки с различными граничными условиями.

Учет нелинейности в граничных условиях существенно влияет на форму скелетных кривых свободных колебаний. Величина нелинейных слагаемых в системе обыкновенных дифференциальных уравнений существенно меньше, если учитываются нелинейные граничные условия, по сравнению с системой, в которой нелинейности в граничных условиях не учитываются. Скелетная кривая, полученная с учетом нелинейных граничных условий, значительно ближе к скелетной кривой линейной системы по сравнению со скелетной кривой, полученной без учета нелинейных слагаемых в граничных условиях.

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1956. – 600 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
4. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – Москва: Машиностроение, 1970. – 737 с.
5. Гризолок Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – Москва: Наука, 1978. – 360 с.
6. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – xvi+374 p.
7. Amabili M. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions: theory and experiments // Comput. Struct. – 2004. – **82**, No. 31-32. – P. 2587-2605.
8. Barton M. V. Vibration of rectangular and screw cantilever plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1951. – **18**, No. 2. – P. 129-134.
9. Leissa A. W. Vibrations of plates. – Washington: U. S. Gov. Print. Office, 1969. – vii + 353 p.
10. Leissa A. W., Kadi A. S. Curvature effects on shallow shell vibrations // J. Sound Vib. – 1971. – **16**, No. 2. – P. 173-187.
11. Prabhakara M. K., Chia C. Y. Non-linear flexural vibrations of orthotropic rectangular plates // J. Sound Vib. – 1977. – **52**. – P. 511-518.
12. Sathyamoorthy M. Vibration of skew plates at large amplitudes including shear and rotatory inertia effects // Int. J. Solid Struct. – 1978. – **14**. – P. 869-880.
13. Sathyamoorthy M., Pandalai K. A. V. Vibration of simply supported-clamped skew plates at large amplitudes // J. Sound Vib. – 1973. – **27**, No. 1. – P. 37-46.
14. Stavridis L. T. Dynamic analysis of shallow shells of rectangular base // J. Sound Vib. – 1998. – **218**, No. 5. – P. 861-882.
15. Stavridis L. T., Armenakas A. E. Analysis of shallow shells with rectangular projection: Theory // J. Eng. Mech. ASCE. – 1988. – **114**, No. 6. – P. 923-942.

ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ У ГРАНИЧНИХ УМОВАХ НА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИН ПРИ ЇХ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Аналізується вплив нелінійностей у граничних умовах на вільні нелінійні коливання прямокутних пластин. Нелінійні граничні умови для мембранних зусиль трансформуються у лінійні за допомогою використання функції напружень. Враховуються додаткові граничні умови, які описують відсутність переміщень у площині пластини на її зацемленій частині. Наводиться порівняння скелетних кривих, отриманих з урахуванням лінійних і нелінійних граничних умов.

INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS NONLINEARITY ON FREE VIBRATIONS OF PLATES AT THEIR GEOMETRICALLY DEFORMATION

The influence of boundary conditions nonlinearity on free nonlinear vibrations of rectangular plates is analyzed. The nonlinear boundary conditions for membrane forces are transformed into linear ones by using in-plane stress function. Additional boundary conditions, which describe vanishing of in-plane displacements on the clamped part of the plate, are taken into account. The backbone curves, which are obtained by using linear and nonlinear boundary conditions, are compared in the paper.

¹ Ун-т МакГилла, Монреаль, Канада,

² Ин-т проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
19.03.12