

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У НЕСКІНЧЕННОМУ ЦИЛІНДРІ ДОВІЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ З ТУНЕЛЬНИМ ДЕФЕКТОМ В УМОВАХ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Розв'язано задачі про визначення напруженого стану поблизу наскрізних дефектів (тріщин або тонких жорстких включень) у нескінченному циліндрі довільного перерізу при коливаннях поздовжнього зсуву. Запропоновано підхід, що дозволяє окремо задовольняти умови на поверхні дефекту і на межі тіла. Отримано наближені формули для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень, за допомогою яких досліджено вплив на їхні значення частоти коливань, а також типу дефекту та його розміщення.

Проблеми визначення напруженого стану в необмежених тілах, що містять дефекти у вигляді тонких включень або тріщин, при динамічному, зокрема гармонічному, навантаженні можна вважати достатньо вивченими. Причому, як можна бачити з робіт [10, 13, 17, 18, 20], це стосується як двовимірних, так і просторових задач теорії пружності. Одним із шляхів розв'язання таких задач є застосування прямих числових методів (різницевих і скінченних елементів) [19, 21]. Суттєвим недоліком цих методів є необхідність згущення дискретизації в околі дефекту. Тому більш поширеними на сьогодні є метод граничних інтегральних рівнянь [5, 6] і метод граничних елементів [2, 14–16]. Однак застосування цих методів зводить вихідну крайову задачу до системи інтегральних рівнянь одночасно і на межі тіла, і на поверхні дефекту, що суттєво ускладнює числову реалізацію. У цій статті на прикладі задач про визначення напруженого стану біля наскрізних дефектів у нескінченному циліндрі довільного перерізу при коливаннях поздовжнього зсуву запропоновано підхід, що дозволяє окремо задовольняти умови на поверхні тріщини (або включення) і на межі тіла. Пропонований метод суттєво ґрунтується на використанні розривних розв'язків для рівняння Гельмгольца.

1. Постановка задачі. Розглядаємо пружний циліндр з твірними, паралельними осі Oz (рис. 1), переріз якого площиною xOy є довільною замкненою гладкою кривою. Ця крива в полярній системі координат, центр якої знаходиться у початку координат xOy , визначається рівнянням $r = r_0\psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Циліндр містить наскрізний дефект, під яким розуміємо тріщину або тонке жорстке включення у вигляді пластини малої товщини h . У площині xOy дефект не виходить за межі перерізу і займає відрізок довжини $2a$ з центром в точці (c, d) .

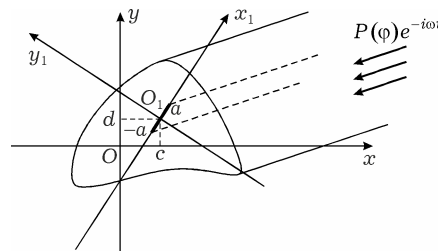


Рис. 1

У циліндрі відбуваються коливання поздовжнього зсуву внаслідок дії на бічну поверхню гармонічного навантаження $P(\varphi)e^{-i\omega t}$. При таких умовах відмінною від нуля є тільки z -компонента вектора переміщення, яка задовольняє рівняння Гельмгольца [11]. Це рівняння у полярній системі має вигляд

$$\Delta w + \alpha_2^2 w = 0, \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$; $\alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}$, ω – частота коливань; $c_2^2 = \frac{G}{\rho_1}$; G і

ρ_1 – модуль зсуву та густина матриці. Множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, в рівнянні (1) і надалі опускаємо, розглядаючи тільки амплітудні значення.

За умов навантаження на поверхні тіла виконується рівність

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0 \psi(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (2)$$

де \bar{n} – вектор нормалі до межі тіла.

Для формулювання крайових умов на дефекті пов'яжемо з його центром систему координат $x_1 O_1 y_1$. Зв'язок між декартовою $x_1 O_1 y_1$ і полярною системами координат задається формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\varphi - \alpha) - c \cos \alpha - d \sin \alpha, \\ y_1 &= r \sin(\varphi - \alpha) - d \cos \alpha + c \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

У рівностях (3) α – кут між осями $O_1 x_1$ та Ox .

Нехай $w_1^{(1)}(x_1, y_1)$ – z -компонента вектора переміщення $w(r, \varphi)$ при переході від полярних координат до декартових $x_1 O_1 y_1$ за формулами (3). Якщо розглядаємо тріщину, то її поверхню вважаємо вільною від напружень:

$$\tau_{zy_1}^{(1)}(x_1, 0) = G \frac{\partial w^{(1)}(x_1, 0)}{\partial y_1} = 0, \quad |x_1| \leq a. \quad (4)$$

Окрім того, переміщення на поверхні тріщини має розрив, стрибок якого позначимо через $\chi_2(x)$:

$$w^{(1)}(x_1, +0) - w^{(1)}(x_1, -0) = \chi_2(x_1), \quad -a \leq x_1 \leq a, \quad \chi_2(\pm a) = 0. \quad (5)$$

У випадку включення, з огляду на його малу товщину, відповідні крайові умови формулюємо на його серединній площині. Вважаємо, що між тілом і включенням виконуються умови повного зчеплення:

$$w^{(1)}(x_1, \pm 0) = d, \quad -a \leq x_1 \leq a. \quad (6)$$

На поверхні включення розривним є дотичне напруження τ_{zy_1} , стрибок якого позначимо через $\chi_1(x)$:

$$\langle \tau_{zy_1} \rangle = G \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y_1}(x_1, +0) - \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y_1}(x_1, -0) \right) = \chi_1(x_1), \quad -a \leq x_1 \leq a. \quad (7)$$

У рівності (6) d – амплітуда поздовжніх коливань включення, яка визначається з рівняння руху включення як жорсткого тіла. При гармонічних коливаннях це рівняння має вигляд

$$-md\omega^2 = \int_{-a}^a \chi_1(\eta) d\eta, \quad m = 2\rho_0 h a, \quad (8)$$

де ρ_0 – густина включення.

2. Розв'язання задачі у випадку тріщини. Для розв'язання задачі спочатку побудуємо в системі $x_1 O_1 y_1$ розривний розв'язок рівняння Гельмгольца [9, 10] зі стрибком $\chi_2(x_1)$, означеним рівністю (5):

$$w^{01}(x_1, y_1) = \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-a}^a \chi_2(\eta) r_2(\eta - x_1, y_1) d\eta, \quad (9)$$

де

$$r_2(\eta - x_1, y_1) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\alpha_2 \sqrt{(\eta - x_1)^2 + y_1^2}),$$

$H_0^{(1)}(\cdot)$ – функція Ганкеля.

Напруження, що відповідають переміщенню (9), визначаються як

$$\begin{aligned} \tau_{y_1 z}^{01} = G \frac{\partial w^{01}}{\partial y_1} = -G \left(\int_{-a}^a \chi_2(\eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} r_2(\eta - x_1, y_1) d\eta + \right. \\ \left. + \alpha_2^2 \int_{-a}^a \chi_2(\eta) r_2(\eta - x_1, y_1) d\eta \right). \end{aligned} \quad (10)$$

У системі $O r \varphi$ переміщення подамо у вигляді

$$w(r, \varphi) = w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi), \quad (11)$$

де $w_0(r, \varphi)$ – розривний розв’язок (9) після переходу до полярних координат за формулами (3), а $w_1(r, \varphi)$ – розв’язок рівняння Гельмгольца (1) такий, що для (11) виконується крайова умова (2). Цю невідому функцію запишемо у вигляді лінійної комбінації часткових розв’язків рівняння (1):

$$w_1(r, \varphi) = r_0 \sum_{k=1}^N A_k g_k(r, \varphi), \quad (12)$$

де

$$g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\alpha_2 r) \cos(m-1)\varphi, \quad g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\alpha_2 r) \sin m\varphi.$$

Функції $g_k(r, \varphi)$ є лінійно незалежними і утворюють повну замкнену систему функцій в області перерізу [3].

Для реалізації крайової умови (4) на поверхні тріщини переміщення (11) необхідно подати у системі координат $x_1 O_1 y_1$, пов’язаній з тріщиною:

$$w^{(1)}(x_1, y_1) = w^{01}(x_1, y_1) + w^{11}(x_1, y_1). \quad (13)$$

Тут $w^{01}(x_1, y_1)$ – розривний розв’язок (9), а $w^{11}(x_1, y_1)$ отримано з (12) при переході до координат x_1 та y_1 . Внаслідок такого переходу вираз (12) запишемо у вигляді

$$w^{11}(x_1, y_1) = r_0 \sum_{k=1}^N A_k g_k^{(1)}(x_1, y_1), \quad (14)$$

де $g_k^{(1)}(x_1, y_1)$ – функція $g_k(r, \varphi)$ в системі координат $x_1 O_1 y_1$.

Крайова умова (4) на тріщині після підстановки виразів (13), (14) для переміщень набуде вигляду

$$\tau_{y_1 z}^{01}(x_1, 0) + \tau_{y_1 z}^{11}(x_1, 0) = 0, \quad (15)$$

де перший доданок $\tau_{y_1 z}^{01}(x_1, 0)$ визначений формулою (10), а

$$\tau_{y_1 z}^{11}(x_1, 0) = G r_0 \sum_{k=1}^N A_k \left. \frac{\partial g_k^{(1)}(x_1, y_1)}{\partial y_1} \right|_{y_1=0}.$$

З (15) отримуємо інтегральне рівняння, яке після інтегрування частинами та виділення сингулярної частини у ядрі запишемо так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 S(\tau) \left(\frac{1}{\tau - \zeta} + D(\tau - \zeta) \right) d\tau = \Phi(\zeta). \quad (16)$$

Права частина рівняння (16) має вигляд

$$\Phi(\zeta) = -r_0 \sum_{k=1}^N A_k \frac{\partial g_k^{(1)}(a\zeta, 0)}{\partial y_1}, \quad (17)$$

а ядро має наступну асимптотику:

$$D(Z) = O(|Z| \ln |Z|), \quad Z \rightarrow 0.$$

У рівнянні (16) введено нову невідому функцію

$$\chi_2'(a\tau) = S(\tau), \quad (18)$$

а також використано позначення:

$$\eta = a\tau, \quad x_1 = a\zeta, \quad x_0 = x_2 r_0, \quad \gamma = \frac{a}{r_0}, \quad x_2 a = \gamma x_0. \quad (19)$$

До рівняння (16) слід додати ще рівність

$$\int_{-1}^1 S(\tau) d\tau = 0, \quad (20)$$

яка випливає з умови (5) змикання тріщини $\chi_2(\pm a) = 0$.

Внаслідок лінійності рівнянь (16), (20) розв'язок рівняння (16) з правою частиною (17) запишемо у вигляді

$$S(\tau) = \sum_{k=1}^N A_k S_k(\tau). \quad (21)$$

Тут кожна функція $S_k(\tau)$ задовольняє рівняння (16) з правими частинами

$$\Phi_k(\zeta) = -r_0 \frac{\partial g_k^{(1)}(a\zeta, 0)}{\partial y_1}$$

і умову (20). Для побудови наближених розв'язків цих рівнянь невідомі функції $S_k(\tau)$ подамо у вигляді

$$S_k(\tau) = \frac{\psi_k(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad (22)$$

де кожену функцію $\psi_k(\tau)$ вважаємо такою, що задовольняє умову Гельдера на $[-1, 1]$. Для їх визначення застосуємо метод механічних квадратур [1], вибираючи за точки колокації корені многочлена $U_{n-1}(\zeta)$ Чебишева 2-го роду, $\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{n}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Тоді з (16) і (20) одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функції $\psi_k(\tau)$ у вузлах інтерполяції:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km} \left[\frac{1}{\tau_m - \zeta_j} + D(\tau_m - \zeta_j) \right] &= \Phi_k(\zeta_j), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km} &= 0, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (23)$$

Розв'язавши систему (23), отримаємо наближення кожної функції $\psi_k(\tau)$ інтерполяційним многочленом

$$\psi_k(\tau) \approx \sum_{m=1}^n \psi_{km} \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)}, \quad (24)$$

де $\psi_{km} = \psi_k(\tau_m)$, а $\tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}$, $m = 0, 1, \dots, n$, – корені многочлена $T_n(\tau)$ Чебишева 1-го роду.

Невідомі коефіцієнти A_k у рівності (12) для $w_1(r, \varphi)$ визначаємо з умови (2) на межі циліндра. Для її реалізації напруження запишемо як

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0\psi(\varphi), \varphi) = \tau_{xz}(r_0\psi(\varphi), \varphi)c_x + \tau_{yz}(r_0\psi(\varphi), \varphi)c_y. \quad (25)$$

У формулі (25) c_x, c_y – напрямні косинуси вектора нормалі \bar{n} :

$$c_x = \cos(\bar{n}, x) = \frac{\cos \varphi + (\ln \psi(\varphi))' \sin \varphi}{\sqrt{1 + (\ln \psi(\varphi))'^2}},$$

$$c_y = \cos(\bar{n}, y) = \frac{\sin \varphi - (\ln \psi(\varphi))' \cos \varphi}{\sqrt{1 + (\ln \psi(\varphi))'^2}}.$$

З формул (9), (11), (12) після переходу до координат xOy визначаємо граничні значення напруження:

$$\tau_{xz}(r_0\psi(\varphi), \varphi) = G \frac{i\alpha_2^2}{4} \int_{-a}^a \chi_2(a\tau) E_1(\tau, \varphi) a d\tau + G \sum_{k=1}^N A_k f_k^1,$$

$$\tau_{yz}(r_0\psi(\varphi), \varphi) = G \frac{i\alpha_2^2}{4} \int_{-a}^a \chi_2(a\tau) E_2(\tau, \varphi) a d\tau + G \sum_{k=1}^N A_k f_k^2,$$

де

$$f_k^1 = r_0 \frac{\partial g_k}{\partial x}, \quad f_k^2 = r_0 \frac{\partial g_k}{\partial y},$$

$$E_1(\tau, \varphi) = \frac{-y_0((\gamma\tau - x_0) \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)}{R_0^2} H_0^{(1)}(x_0 R_0) +$$

$$+ \frac{H_1^{(1)}(x_0 R_0)}{x_0 R_0^3} (\sin \alpha (y_0^2 - (\gamma\tau - x_0)^2)) + 2y_0(\gamma\tau - x_0) \cos \alpha,$$

$$E_2(\tau, \varphi) = \frac{-y_0((\gamma\tau - x_0) \sin \alpha - y_0 \cos \alpha)}{R_0^2} H_0^{(1)}(x_0 R_0) +$$

$$+ \frac{H_1^{(1)}(x_0 R_0)}{x_0 R_0^3} (\cos \alpha (-y_0^2 + (\gamma\tau - x_0)^2)) + 2y_0(\gamma\tau - x_0) \sin \alpha,$$

$$R_0 = \sqrt{(\gamma\tau - x_0)^2 + y_0^2}, \quad x_0 = \psi(\varphi) \cos(\varphi - \alpha) - c_0 \cos \alpha - d_0 \sin \alpha,$$

$$y_0 = \psi(\varphi) \sin(\varphi - \alpha) - d_0 \cos \alpha + c_0 \sin \alpha.$$

Підставивши у (25) отримані вирази для напружень τ_{yz}, τ_{xz} на поверхні циліндра, знаходимо, що

$$\tau_{\bar{n}z}(r_0\psi(\varphi), \varphi) = G \int_{-1}^1 \chi_2(a\tau) \frac{G(\tau, \varphi)}{a} d\tau + G \sum_{k=1}^N A_k B_k(\varphi), \quad (26)$$

де

$$G(\tau, \varphi) = \frac{i\alpha_2^2 a^2}{4} (E_1(\tau, \varphi)c_x + E_2(\tau, \varphi)c_y), \quad B_k(\varphi) = f_k^1 c_x + f_k^2 c_y. \quad (26')$$

Нехай тепер

$$\chi_2(a\tau) = ag(\tau).$$

Тоді, згідно з формулами (18), (21),

$$g'(\tau) = S(\tau), \quad g(\tau) = \sum_{k=1}^N A_k g_k(\tau),$$

де $g'_k(\tau) = S_k(\tau)$.

Таким чином, крайова умова (2) набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^N A_k \left(\int_{-1}^1 g_k(\tau) G(\tau, \varphi) d\tau + B_k(\varphi) \right) = P(\varphi). \quad (27)$$

Для обчислення інтегралів у рівності (27) використаємо наступне наближення [8] для функцій $g_k(\tau)$, яке отримуємо з (22), (24):

$$g_k(\tau) \approx \sqrt{1 - \tau^2} S_{kn}(\tau), \quad S_{kn}(\tau) = -\frac{2}{n} \sum_{m=1}^n \Psi_{km} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{T_p(\tau_m) U_{p-1}(\tau)}{p},$$

де $T_p(\tau)$, $U_{p-1}(\tau)$ – многочлени Чебишева відповідно 1-го та 2-го роду. Тепер інтеграл у (27) можемо обчислити за допомогою квадратурної формули [4]:

$$\int_{-1}^1 g_k(\tau) G(\tau, \varphi) d\tau = \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{km} \sum_{\ell=1}^n D_{\ell m} G(Z_\ell, \varphi), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$D_{\ell m} = -\frac{2}{n+1} \sin \frac{\ell\pi}{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{p(2m-1)\pi}{2n} \sin \frac{\pi\ell p}{n+1}}{p}, \quad Z_\ell = \cos \frac{\pi\ell}{n+1}.$$

Остаточню крайову умову (27) набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^N A_k \left(\sum_{m=1}^n a_m \Psi_{km} \sum_{\ell=1}^n D_{\ell m} G(Z_\ell, \varphi) + B_k(\varphi) \right) = P(\varphi). \quad (28)$$

Систему лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів A_k отримаємо, застосувавши до рівняння (28) метод колокації, беручи за вузли $\sigma_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}$, $\ell = 1, \dots, N$:

$$\sum_{k=1}^N A_k \left(\sum_{m=1}^n a_m \Psi_{km} \sum_{\ell=1}^n D_{\ell m} G(Z_\ell, \sigma_\ell) + B_k(\sigma_\ell) \right) = P(\sigma_\ell). \quad (29)$$

Величинами, що встановлюють можливість розвитку тріщини, є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які в розглядуваному випадку визначаються за формулами

$$K^\pm = \sqrt{a} \lim_{\zeta \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{\zeta^2 - 1} \tau_{y_{1z}}(a\tau, 0).$$

Після розв'язання систем (29), (23) отримуємо формули для розрахунку КІН:

$$K^+ = \frac{G\sqrt{a}}{2n} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{km} \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2},$$

$$K^- = \frac{(-1)^{n+1} G\sqrt{a}}{2n} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{km} \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2},$$

де $\gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2n}$.

3. Розв'язання задачі у випадку включень. Для розв'язання задачі у випадку включень теж будемо розривний розв'язок рівняння Гельмгольца (1) у системі $x_1 O_1 y_1$ з визначеним формулою (7) стрибком $\chi_1(x_1)$ [9, 10]:

$$w^{01}(x_1, y_1) = \int_{-a}^a \frac{\chi_1(\eta)}{G} r_2(\eta - x_1, y_1) d\eta_1. \quad (30)$$

Після цього для переміщення у циліндрі використаємо подання (11), (12). Для реалізації крайових умов (6) на включенні необхідно записати переміщення у системі координат, пов'язаній з дефектом, у вигляді (13), де перша складова – розривний розв'язок (30), а друга – визначена у (14). Підставивши отриманий вираз для переміщення в умову (6), використавши (19) та ввівши позначення

$$\chi_1(a\tau) = GS(\tau),$$

одержуємо інтегральне рівняння. Після виділення в ядрі сингулярної частини це рівняння набуде вигляду

$$\frac{\gamma}{2\pi} \left(\int_{-1}^1 S(\tau) [\ln|\tau - \zeta| + Q_1(\tau - \zeta)] d\tau \right) + \sum_{k=1}^N A_k g_k^{(1)}(a\zeta, 0) = d_0, \quad (31)$$

де $Q_1(z) = O(1)$, $z \rightarrow 0$.

До рівняння (31) слід додати ще рівність, яка випливає з (8):

$$d_0 = -\frac{1}{2\bar{\rho}a_0^2\varepsilon\gamma} \int_{-1}^1 S(\tau) d\tau, \quad (32)$$

де $\bar{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho_1}$, $\varepsilon = \frac{h}{a}$, $d_0 = \frac{d}{r_0}$.

Як і у випадку тріщини, розв'язок рівняння (31) шукаємо у вигляді (21). Функції $S_k(\tau)$, визначені поданням (21), повинні задовольняти рівняння, які випливають з (31) і (32):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 S_k(\tau) \left[\gamma \ln|\tau - \zeta| + \gamma Q_1(\tau - \zeta) + \frac{\pi}{\gamma\bar{\rho}a_0^2\varepsilon} \right] d\tau = -g_k^{(1)}(\zeta, 0), \quad k = 1, \dots, N. \quad (33)$$

Для побудови наближених розв'язків (33) невідомі функції $S_k(\tau)$ подаємо у вигляді (22) і застосовуємо метод механічних квадратур з використанням точок колокації $\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{n+1}$, $j = 1, \dots, n$. При цьому для інтегралів з логарифмічною особливістю використовуємо квадратурну формулу [7]

$$\int_{-1}^1 S_k(\tau) \ln|\tau - \zeta_j| d\tau = \sum_{m=1}^n a_m \psi_{mk} L_{jm}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$L_{jm} = -\ln 2 - 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos(p\pi(2m-1)/2n) \cos(p\pi j/(n+1))}{p}.$$

В результаті цього замість інтегральних рівнянь (33) отримаємо системи n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих функцій у вузлах інтерполяції ζ_j , $j = 1, \dots, n$:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km} \left[\gamma L_{jm} + \gamma Q(\tau_m - \zeta_j) + \frac{\pi}{\bar{\rho}a_0^2\varepsilon\gamma} \right] = -g_k^{(1)}(\zeta_j), \quad k = 1, \dots, N. \quad (34)$$

Розв'язавши системи (34), отримаємо наближення кожної функції $\psi_k(\tau)$ інтерполяційним многочленом (24).

Щоб визначити коефіцієнти A_k , використаємо умову (2) на межі циліндра. Підставляючи подання (25) для напружень у (2) та використовуючи зображення (21) для функції $S(\tau)$, отримаємо крайову умову (2) у вигляді

$$\sum_{k=1}^N A_k \left(\int_{-1}^1 S_k(\tau) U(\tau, \varphi) d\tau + B_k(\varphi) \right) = P(\varphi), \quad (35)$$

де

$$U(\tau, \varphi) = -\frac{H_1^{(1)}(x_0 R_0)}{R_0} [((\gamma\tau - x_0) \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) \cos(\bar{n}, x) + ((\gamma\tau - x_0) \sin \alpha - y_0 \cos \alpha) \cos(\bar{n}, y)],$$

а $B_k(\varphi)$ визначені в (26').

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення A_k отримаємо із (35) за допомогою квадратурних формул Гаусса – Чебишева та застосуванням методу колокацій у вузлах $\sigma_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}$, $\ell = 1, \dots, N$:

$$\sum_{k=1}^N A_k \left(\sum_{m=1}^n a_m \Psi_{km} U(\tau_m, \sigma_\ell) + B_k(\sigma_\ell) \right) = P(\sigma_\ell), \quad \ell = 1, \dots, N. \quad (36)$$

Для напружень у околі включення мають місце асимптотичні розвинення [12]:

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx_1} \\ \tau_{zy_1} \end{bmatrix} = -\frac{K^\pm}{\sqrt{r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + O(1), \quad r \rightarrow 0,$$

де r, θ – полярні координати, пов'язані з кінцями включення. З цих співвідношень бачимо, що напружений стан у середовищі поблизу включення характеризується коефіцієнтами, які, як і в [12], називатимемо коефіцієнтами інтенсивності напружень. Їх визначають за формулами [12]:

$$K^\pm = G\sqrt{2a} \psi(\pm 1).$$

Безрозмірні значення цих коефіцієнтів $k^\pm = \frac{K^\pm}{G\sqrt{2a}}$ виражаємо за формулами (24) через розв'язки систем (36) і (34):

$$k^+ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \Psi_{km} \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2},$$

$$k^- = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{km} \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2},$$

де $\gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2n}$.

4. Результати числового дослідження та висновки. Як приклад розглянуто циліндричне тіло, перерізом якого є гладка крива, що складається з двох паралельних відрізків довжини 2ℓ , з'єднаних між собою півеліпсами з великими півосями r_0 . Дефект розміщений у перерізі xOy на відрізьку довжини $2a$ і утворює з віссю Ox кут $\alpha = 45^\circ$ (рис. 2). При цьому вважаємо, що один із кінців дефекту знаходиться в центрі, а перерізом тіла є еліпс ($\sigma = 0$, $\sigma = \ell/r_0$) з великою піввіссю r_0 та ексцентриситетом $\varepsilon = 0.5$.

За таких умов кінець дефекту перетне межу еліпса при $\gamma = \sqrt{3/14} \approx 0.462$.

До межі тіла прикладено навантаження $P(\varphi) = \sin \frac{\varphi}{2}$.

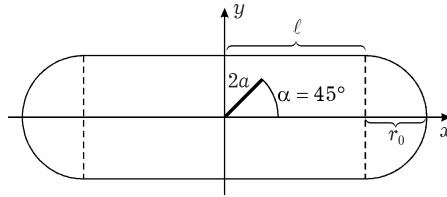


Рис. 2

Числові розрахунки спершу було виконано для дослідження впливу на значення КІН близькості дефекту до межі циліндра (параметр $\gamma = a/r_0$). Залежності $|k^+|$ від безрозмірного хвильового числа $\alpha_0 = \alpha_2 r_0 = (\omega/c_2)r_0$ наведено на рис. 3 (для тріщини) і рис. 4 (для включення). Обчислення проведено для значень $\gamma = a/r_0 = 0.25, 0.35, 0.46$. Бачимо, що у випадку тріщини при наближенні її вершини до межі спостерігається зростання КІН для значень частот, менших від частоти першого резонансу. При цьому також зменшується частота, при якій досягається резонанс. Якщо дефектом є включення, то при наближенні його кінця до межі значення КІН спочатку зменшуються, а біля самої межі спостерігається їх зростання. Розміри включення не впливають на значення частоти резонансу.

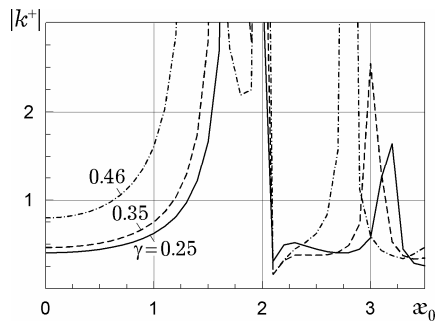


Рис. 3

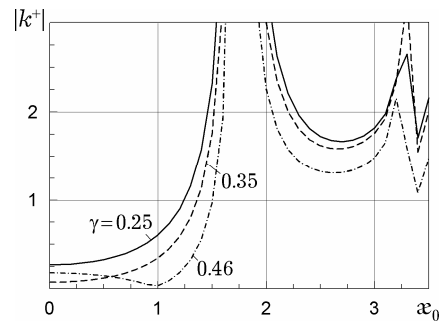
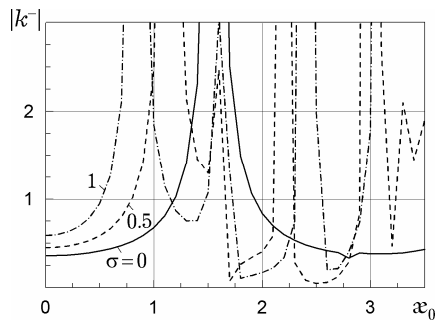
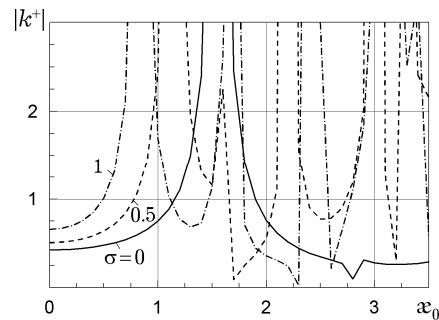


Рис. 4

Результати дослідження впливу на значення КІН $|k^\pm|$ відносних розмірів тіла (параметр $\sigma = l/r_0$) наведено на рис. 5, коли дефектом є тріщина, і на рис. 6, коли дефектом є включення. Обчислення виконано при $\gamma = 0.4$ для значень $\sigma = 0, 0.5, 1$.



а)



б)

Рис. 5

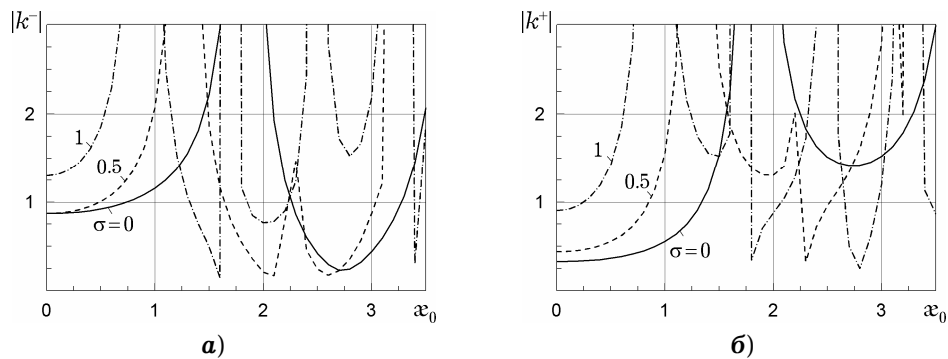


Рис. 6

На рис. 5а і рис. 6а показано залежність зміни значень КІН $|k^-|$ від безрозмірного хвильового числа x_0 біля кінця дефекту, що знаходиться в центрі. Незалежно від типу дефекту при збільшенні σ значення КІН у дорезонансній зоні зростають, а також зменшується частота, при якій досягається перший резонанс. Крім того, слід відмітити, що при збільшенні σ зростає кількість резонансів у розглядуваному діапазоні. Відповідно аналогічна картина спостерігається на рис. 5б і рис. 6б, які відображають поведінку значень КІН кінця дефекту, що розташований ближче до його межі.

Викладені вище результати є підґрунтям для наступних висновків.

Запропоновано новий числово-аналітичний метод визначення напруженого стану поблизу тонких дефектів у циліндричних тілах довільного перерізу, що знаходяться в умовах гармонічних коливань поздовжнього зсуву. Перевагою цього методу є можливість задовольняти крайові умови на дефекті та на межі тіла. Завдяки цьому вдається отримувати стабільні числові результати майже при підході дефекту до межі тіла. Числовими дослідженнями встановлено, що близькість кінця дефекту до його межі суттєво впливає на значення КІН поблизу нього. Відносний розмір дефекту, особливо у випадку тріщин, може суттєво впливати на значення частоти резонансу.

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – Москва: Наука, 1985. – 253 с.
2. Бобылев А. А., Доброа Ю. А. Применение метода граничных элементов к расчету вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами // Вісн. Харк. нац. ун-ту. – 2003. – № 590. Сер. Мат. моделювання. Інформ. технол. Автомат. системи управління. – Вип. 1. – С. 49–54.
3. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – Москва: Наука, 1970. – 379 с.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
5. Михаськів В. В., Хай О. М. Почасові граничні інтегральні рівняння тривимірних задач дифракції пружних хвиль на тонкому жорсткому включенні // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 66–71.
6. Михаськів В. В., Хай М. В. Решение динамических задач теории упругости для тел с трещинами посредством преобразования Фурье // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 11. – С. 27–30.
7. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с.
8. Попов В. Г. Взаимодействие упругих волн продольного сдвига с радиально расположенными трещинами // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 2. – С. 60–66.
9. Попов В. Г. Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.

10. Попов В. Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение // Динам. системы. – 1993. – Вып. 12. – С. 35–41.
11. Поручиков В. Е. Методы динамической теории упругости. – Москва: Наука, 1986. – 328 с.
12. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
13. Ang D. D., Knopoff L. Diffraction of scalar elastic waves by a finite crack // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1964. – **51**, No. 4. – P. 593–598.
14. Chirino F., Dominguez J. Dynamic analysis of cracks using boundary element method // Eng. Fract. Mech. – 1989. – **34**, No. 5–6. – P. 1051–1061.
15. Fedelinski P., Aliabadi M. H., Rooke D. P. A single-region time domain BEM for dynamic crack problems // Int. J. Solids Struct. – 1995. – **32**, No. 24. – P. 3555–3571.
16. Hosseini-Tehrani P., Hosseini-Godarzi A. R., Tavangar M. Boundary element analysis of stress intensity factor K_I in some two-dimensional dynamic thermoelastic problems // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2005. – **29**, No. 3. – P. 232–240.
17. Loeber J. F., Sih G. C. Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack // J. Acoust. Soc. Am. – 1968. – **44**, No. 1. – P. 90–98.
18. Mal A. K. Interaction of elastic waves with a Griffith crack // Int. J. Eng. Sci. – 1970. – **8**, No. 9. – P. 763–776.
19. Nistor I., Pantalé O., Caperaa S. Numerical implementation of the extended finite element method for dynamic crack analysis // Adv. Eng. Softw. – 2008. – **39**, No. 7. – P. 573–587.
20. Zhang Ch. A 2D hypersingular time-domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis // Wave Motion. – 2002. – **35**, No. 1. – P. 17–40.
21. Zi G., Chen H., Xu J., Belytschko T. The extended finite element method for dynamic fractures // Shock Vib. – 2005. – **12**, No. 1. – P. 9–23.

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ
ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ТУННЕЛЬНЫМ ДЕФЕКТОМ В УСЛОВИЯХ
ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА**

Решены задачи по определению напряженного состояния вблизи сквозных дефектов (трещин или тонких жестких включений) в бесконечном цилиндре произвольного сечения при колебаниях продольного сдвига. Предложен подход, позволяющий отдельно удовлетворять условия на поверхности дефекта и на границе тела. Получены приближенные формулы для расчета коэффициентов интенсивности напряжений, с помощью которых исследовано влияние на их значения частоты колебаний, а также типа и расположения дефекта.

**STRESS STATE IN AN INFINITE CYLINDER OF ARBITRARY
CROSS SECTION WITH A TUNNEL DEFECT UNDER HARMONIC
OSCILLATIONS OF LONGITUDINAL SHEAR**

The problems to determine the stress state near the through defects (cracks and thin rigid inclusions) in an infinite cylinder of arbitrary cross-section under oscillations of the longitudinal shear are solved. A technique is proposed that allows to satisfy separately the conditions on the surface of the inclusion and on the border of the solid. Approximate formulas for calculating the stress intensity factors are obtained to investigate the influence of oscillation frequencies, type of the defect and its location on their values.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
18.10.11