УДК 517.946

В. С. Ільків

УМОВИ НЕЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ У ТЕРМІНАХ КОЕФІЦІЄНТІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглянуто задачу Діріхле в одиничному крузі для рівнянь головного типу із частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами, символи яких є формами довільного парного порядку. Встановлено умови неєдиності розв'язку в термінах коефіцієнтів рівняння у випадку існування кутів нахилу комплексних характеристик. Побудовано приклади рівнянь, для яких задача Діріхле в крузі має нетривіальні розв'язки і не є нетеровою.

Вступ. Ядро задачі Діріхле в одиничному крузі для рівнянь із частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами може бути як тривіальним, так і нетривіальним (скінченновимірним чи нескінченновимірним). З результатів Я. Б. Лопатинського випливає, що для правильно еліптичних рівнянь парного порядку однорідна задача Діріхле може мати тільки скінченне число лінійно незалежних розв'язків. Для загальних безтипних (неправильно еліптичних) рівнянь нескінченновимірна розв'язність задачі Діріхле досліджувалась у роботах [1–8, 10–13, 15, 16]. Зокрема, рівняння другого порядку розглянуто в роботах А. В. Біцадзе [2], D. G. Bourgin, R. Duffin [11], F. John [12], Н. Е. Товмасяна [9], Р. А. Александряна [1], В. П. Бурського [3, 4], рівняння четвертого порядку – у роботах А. О. Бабаяна [10], Н. Е. Товмасяна [16], К. О. Буряченко [6], рівняння вищого порядку – у роботах В. П. Бурського та К. О. Буряченко [5, 7, 8].

У роботі [1] доведено, що для однорідного рівняння другого порядку

$$(1+\cos\varphi_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-\cos\varphi_0)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

однорідна задача Діріхле в одиничному крузі K має лише нульовий розв'язок, якщо $\varphi_0/\pi\notin\mathbb{Q}$, де φ_0 – кут між характеристиками рівняння, $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел. Якщо ж $\varphi_0/\pi\in\mathbb{Q}$, то ця задача має зліченну кількість розв'язків. Вони мають такий вигляд:

$$u_{k,n}(x,y)=T_n\left(\rho\cos\left(t-\frac{\pi k}{2n}\right)\right)-(-1)^k T_n\left(\rho\cos\left(t+\frac{\pi k}{2n}\right)\right),$$

де $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$, $T_n(\theta)=\cos(n\arccos\theta)$ – многочлени Чебишева 1-го роду. Отже, при π-раціональних кутах φ_0 задача не є нетеровою.

Прикладами нескінченновимірної розв'язності задачі Діріхле є задачі для рівнянь (спряжених рівнянь) А. В. Біцадзе [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\pm 2i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

які мають вироджений символ (кратні характеристики) і можуть бути записані через комплексне диференціювання у вигляді $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\bar z^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, а також задачі для рівняння з невиродженим символом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sqrt{2}\,i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

Критерій однозначної розв'язності задачі Діріхле в крузі K для рівнянь другого порядку, однорідних за порядком диференціювання,

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{3}$$

встановлено В. П. Бурським [3] у вигляді теореми, яка містить результати А. В. Біцадзе [2] і Р. А. Александряна [1]. Позначимо через $\mathbf{H}^m(K)$ простір Соболєва і $\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{1}{a+c}\sqrt{b^2-4ac}$.

Теорема 1. *Однорідна задача Діріхле в одиничному крузі K для рівняння* (3) *має лише тривіальний розв'язок у просторі $\mathbf{H}^2(K)$, за винятком таких випадків:*

(***i***) *рівняння* (3) *– це рівняння Біцадзе* (1);

(***ii***) *кут φ_0 між характеристиками є дійсним і π-раціональним.*

У випадку (***ii***) ядро оператора задачі Діріхле є нескінченновимірним і складається з лінійно незалежних поліноміальних розв'язків вигляду

$$u_{k,n}(x,y)=[T_{2n}(\rho\cos(t-\varphi_1))]^k-[T_{2n}(\rho\cos(t-\varphi_2))]^k.$$

Якщо однорідна задача Діріхле має лише тривіальний розв'язок, власне, коли φ_0 не є π-раціональним числом $(\varphi_0/\pi\notin\mathbb{Q})$, то $\sin n\varphi_0\neq 0$ для довільного натурального числа n. Проте послідовність чисел $\sin n\varphi_0$ має нуль своєю точкою скупчення, яка з довільною швидкістю може апроксимуватися цією послідовністю. Тому виникає проблема малих знаменників при встановленні існування розв'язку неоднорідної задачі Діріхле з умовою $u|_{\partial K}=\varphi$ для рівняння (3).

Встановлено [4], що достатньою умовою однозначної розв'язності задачі у просторі $\mathbf{H}^{m-\ell}(K)$, де $\varphi\in\mathbf{H}^{m-1/2}(\partial K)$, $m\ge 2$, $m-\ell\ge 2$, є така умова: $|\sin n\varphi_0|\ge C_0/n^\ell$ для деяких чисел $C_0>0$ та $\ell\ge 0$ і всіх натуральних чисел n.

Для загальних рівнянь четвертого порядку питання єдиності розв'язку задачі Діріхле у крузі вирішено у роботі К. О. Буряченко [6]. Отримано критерій єдиності розв'язку задачі як для простих, так і для кратних характеристик та для характеристик, які не мають кутів нахилу. Встановлено залежність між кратністю характеристик і нетривіальною розв'язністю однорідної задачі.

Критерій неєдиності розв'язку задачі Діріхле для загальних рівнянь головного типу довільного парного порядку отримано в роботі [5], а узагальнення для рівнянь з кратними характеристиками, а також з коренями $\pm i$ характеристичного рівняння, – у роботах [7, 8]. Наведено, зокрема, приклади рівнянь з неєдиністю розв'язку однорідної задачі Діріхле:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+5i\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}-6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-5i\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0, \tag{4}$$

$$3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+13i\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}-18\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-13i\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}+3\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0. \tag{5}$$

1. Умови неєдиності у термінах кутів. Розглянемо однорідну задачу Діріхле в одиничному крузі K для загального рівняння головного типу парного порядку $2m$ зі сталими комплексними коефіцієнтами:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u\equiv\sum_{j=0}^{2m}a_j\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m-j}\partial y^j}=0, \tag{6}$$

$$u_\nu^{(j-1)}\Big|_{\partial K}=0,\qquad j=1,\dots,m, \tag{7}$$

де $\{a_0, a_1, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}\} \subset \mathbb{C}$; $\boldsymbol{\nu}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до круга K. Нехай

$$L(\xi_1,\xi_2) = a_0\xi_1^{2m} + a_1\xi_1^{2m-1}\xi_2 + \dots + a_{2m-1}\xi_1\xi_2^{2m-1} + a_{2m}\xi_2^{2m} = \\ = \left\langle \xi, a^1 \right\rangle \dots \left\langle \xi, a^{2m} \right\rangle,$$

де $\left\langle \xi, a^j \right\rangle = \xi_1\bar{a}_1^j + \xi_2\bar{a}_2^j$, а $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $a^j = (a_1^j, a_2^j)$ є векторами з $\mathbb{C}^2$, $j = 1, \dots, 2m$.

За припущенням, характеристичний многочлен $L(1,\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_{2m})$ має прості корені $\lambda_1, \dots, \lambda_{2m}$ і $\lambda_j \neq \pm i$ для всіх $j = 1, \dots, 2m$. Назвемо (комплексним) кутом φ_j нахилу характеристики, що відповідає кореню λ_j характеристичного рівняння $L(1,\lambda) = 0$, розв'язок тригонометричного рівняння

$$-\operatorname{tg}\varphi_j = \lambda_j. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для нетривіальної розв'язності задачі* (6), (7) *у просторі* $\mathbb{C}^2(\bar{K})$ *необхідно та достатньо, щоб кути нахилу характеристик задовольняли наступну умову:*

$$\det\begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \dots & \cos(n-2m+2)\varphi_1 & \sin(n-2m+2)\varphi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos n\varphi_{2m} & \sin n\varphi_{2m} & \dots & \cos(n-2m+2)\varphi_{2m} & \sin(n-2m+2)\varphi_{2m} \end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

для деякого натурального числа $n \geq 2m$. *При виконанні цієї умови існує поліноміальний розв'язок задачі* (6), (7).

Очевидно, що для рівняння другого порядку $(m = 1)$ умова (9) набуде вигляду

$$\det\begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 \end{pmatrix} = \sin n(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin n\varphi_0 = 0.$$

Звідси випливає твердження теореми 1. У випадку довільного m отримано [5] достатні умови неєдиності у термінах співвимірності кутів нахилу характеристик.

Теорема 3. *Нехай кути* φ_j *нахилу характеристик, що відповідають кореням* λ_j *характеристичного рівняння, такі, що* $(\varphi_i - \varphi_j)/\pi \in \mathbb{Q}$ *при* $i, j = 1, \dots, 2m$, *тобто всі різниці* $\varphi_i - \varphi_j$ *є дійсними й* π*-раціональними.*

Тоді однорідна задача Діріхле в крузі для відповідного диференціального рівняння буде мати зліченну кількість лінійно незалежних поліноміальних розв'язків.

При виконанні умови (9) для деякого числа $n \in \mathbb{N}$ поліноміальний розв'язок задачі (6), (7) записується [5, 13, 15] за допомогою многочленів $T_n(z)$ Чебишева 1-го роду:

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{2m}\sum_{k=1}^{m} C_k(n) T_{n-2m+2k}\left(\frac{(x + y\lambda_j)}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}\right) C_j, \tag{10}$$

де $C_k(n)$ – деякі раціональні числа, а вектор $C = \operatorname{col}(C_1, \dots, C_{2m})$ є розв'язком однорідної системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{2m} C_j \cos(n-2k)\varphi_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{2m} C_j \sin(n-2k)\varphi_j = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{11}$$

визначник Δ_n якої дорівнює визначнику у лівій частині умови (9), а матриця є транспонованою до матриці δ_n у лівій частині цієї умови.

Розглянемо часткові випадки розв'язку (10) для малих m. Позначимо

$$\psi_j(x,y) = \frac{x + y\lambda_j}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}.$$

При $m = 1$ маємо

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{2} T_n(\psi_j(x,y))C_j, \quad \begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \cos n\varphi_2 \\ \sin n\varphi_1 & \sin n\varphi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0, \quad n \ge 2;$$

при $m = 2$ –

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{4}\left(-\frac{1}{2(n-2)} T_{n-2}(\psi_j(x,y)) + \frac{1}{2n} T_n(\psi_j(x,y))\right)C_j, \quad n \ge 4,$$

$$\begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \cos n\varphi_2 & \cos n\varphi_3 & \cos n\varphi_4 \\ \sin n\varphi_1 & \sin n\varphi_2 & \sin n\varphi_3 & \sin n\varphi_4 \\ \cos(n-2)\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_3 & \cos(n-2)\varphi_4 \\ \sin(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_3 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0;$$

при $m = 3$ –

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{6}\left(\frac{T_{n-4}(\psi_j(x,y))}{4(n-3)(n-4)} - \frac{T_{n-2}(\psi_j(x,y))}{2(n-1)(n-3)} + \frac{T_n(\psi_j(x,y))}{4n(n-1)}\right)C_j, \quad n \ge 6,$$

$$\sum_{j=1}^{2m} C_j \cos n\varphi_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{2m} C_j \cos(n-2)\varphi_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{2m} C_j \cos(n-4)\varphi_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{2m} C_j \sin n\varphi_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{2m} C_j \sin(n-2)\varphi_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{2m} C_j \sin(n-4)\varphi_j = 0.$$

Перевірити умову (9) для заданого своїми коефіцієнтами $a_0, a_1, \ldots, a_{2m}$ диференціального рівняння чи побудувати диференціальне рівняння, що задовольняє умову (9), зовсім не просто: маємо складні перетворення і переходи $(a_0, a_1, \ldots, a_{2m}) \leftrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}) \leftrightarrow (\varphi_1, \ldots, \varphi_{2m}) \leftrightarrow \Delta_n = 0$. Тому виникає питання про встановлення критерію нетривіальної розв'язності задачі Діріхле в крузі у термінах коефіцієнтів диференціального рівняння.

2. Умови неєдиності у термінах коефіцієнтів. Позначимо через

$$\delta_n(\varphi) = \left(\cos(n-2k)\varphi, \sin(n-2k)\varphi\right)_{k=0,1,\ldots,m-1} \tag{12}$$

рядок довжини $2m$ і запишемо матрицю δ_n з умови (9) у вигляді

$$\delta_n = \operatorname{col}\left(\delta_n(\varphi_1), \ldots, \delta_n(\varphi_{2m})\right). \tag{13}$$

Нехай $z = e^{i\varphi}$, $z_1 = e^{i\varphi_1}$, ..., $z_{2m} = e^{i\varphi_{2m}}$. Тоді рядок $\delta_n(\varphi)$ запишемо як

$$\delta_n(\varphi) = \left(z^{n-2k}, z^{2k-n}\right)_{k=0,1,\ldots,m-1} \cdot R_1 \equiv \delta_{n1}(z)R_1, \tag{14}$$

де R_1 – блочна матриця $2m$-го порядку, що складається з m діагональних блоків $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}$ і $\det R_1 = (-4i)^{-m} \ne 0$.

Оскільки

$$z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} - i\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{(1-i\lambda)^2}{1+\lambda^2}, \quad \lambda = -\operatorname{tg}\varphi,$$

то $z^2 = \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} = \frac{i+\lambda}{i-\lambda}$. Перейдемо від змінної z до змінної λ. Тоді

$$\delta_{n1}(z) = \delta_{n2}(\lambda)$$

і

$$(z^{n-2k}, z^{2k-n}) = (-1-\lambda^2)^{-n/2}((i+\lambda)^{n-k}(i-\lambda)^k, (i+\lambda)^k(i-\lambda)^{n-k}),$$

де $k = 0,1,\dots,m-1$. Впорядкуємо рядок $\delta_{n2}(\lambda)$ за спаданням степенів $(i+\lambda)$ і зростанням степенів $(i-\lambda)$:

$$\delta_{n2}(\lambda) = (-1-\lambda^2)^{-n/2}\delta_{n3}(\lambda)R_2. \tag{15}$$

Тут рядок $\delta_{n3}(\lambda)$ має вигляд

$$\delta_{n3}(\lambda) = ((i+\lambda)^n, \dots, (i+\lambda)^{n-m+1}(i-\lambda)^{m-1},$$

$$(i+\lambda)^{m-1}(i-\lambda)^{n-m+1}, \dots, (i-\lambda)^n),$$

а матриця R_2 визначається так:

$$R_2 = (e_1, e_3, \dots, e_{2m-1}, e_{2m}, e_{2m-2}, \dots, e_2),$$

де e_j – стовпець з номером j одиничної матриці E_{2m} порядку $2m$, $\det R_2 = 1$. Рядок $\delta_{n3}(\lambda)$ подамо у вигляді двох рядків:

$$\delta_{n3}(\lambda) = ((i+\lambda)^{n-m+1}\delta_3(\lambda), (i-\lambda)^{n-m+1}\delta_3(\lambda)),$$

де

$$\delta_3(\lambda) = ((\lambda+i)^{m-1}, (\lambda+i)^{m-2}(\lambda-i), \dots, (\lambda+i)(\lambda-i)^{m-2}, (\lambda-i)^{m-1}) \equiv$$

$$\equiv (\lambda^{m-1}, \dots, \lambda, 1)R.$$

Диференціюючи $\delta_3(\lambda)$ у точці $\lambda = i$, означимо матрицю R рівністю:

$$\begin{pmatrix} \delta_3(i) \\ \delta_3'(i) \\ \vdots \\ \delta_3^{(m-2)}(i) \\ \delta_3^{(m-1)}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^{m-1} & i^{m-2} & \dots & i & 1 \\ (m-1)i^{m-2} & (m-2)i^{m-3} & \dots & 1! & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ (m-1)!\,i & (m-2)! & 0 & 0 & 0 \\ (m-1)! & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R \equiv \frac{1}{R_6} R.$$

Розглянемо похідні порядку s, $s = 0,1,\dots,m-1$, від многочленів

$$(i+\lambda)^{m-\alpha}(i-\lambda)^{\alpha-1}, \quad \alpha = 1,\dots,m,$$

що складають вектор $\delta_3(\lambda)$:

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^s [(i+\lambda)^{m-\alpha}(i-\lambda)^{\alpha-1}] =$$

$$= (m-\alpha)!(\alpha-1)!\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^s \frac{(i+\lambda)^{m-\alpha}}{(m-\alpha)!}\frac{(i-\lambda)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} =$$

$$= (m-\alpha)!(\alpha-1)!\sum_{k=0}^{\tau}(-1)^k C_s^k \frac{(i+\lambda)^{m-\alpha-s+k}}{(m-\alpha-s+k)!}\frac{(i-\lambda)^{\alpha-1-k}}{(\alpha-1-k)!},$$

де $\tau = \min\{\alpha-1, m-\alpha, s\}$. Якщо $s < \alpha - 1$, то відповідна похідна дорівнює нулеві. Якщо $s \ge \alpha - 1$, тоді

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^s [(i+\lambda)^{m-\alpha}(i-\lambda)^{\alpha-1}]\Big|_{\lambda=i} = \frac{(-1)^{\alpha-1}(2i)^{m-s-1}s!(m-\alpha)!}{(m-s-1)!(s-\alpha+1)!}.$$

Звідси отримуємо

$$\operatorname{col}(\delta_3(i), \delta_3'(i), \delta_3''(i), \dots, \delta_3^{(m-1)}(i)) = R_5 R_4 R_3,$$

$$R_5 = \operatorname{diag}\left(\frac{k!(2i)^{m-k}}{(m-k)!}\right)_{k=1,\dots,m},$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/(m-1)! & 1/(m-2)! & 1/(m-3)! & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \operatorname{diag}((-1)^{k-1}(m-k)!)_{k=1,\dots,m}.$$

Отже, матриця R має факторизований вигляд

$$R = R_6 R_5 R_4 R_3,$$

причому

$$\det R_4 = 1, \qquad \det R_6 = (-1)^{m(m-1)/2}\prod_{k=1}^{m}(m-k)!,$$

$$\det R_5 = (2i)^{m(m-1)/2}, \qquad \det R_3 = (-1)^{m(m-1)/2}\prod_{k=1}^{m}(m-k)!.$$

Звідси випливає, що

$$\det R = (2i)^{m(m-1)/2}\left(\prod_{k=1}^{m}(m-k)!\right)^2 \ne 0$$

і

$$\delta_{n3}(\lambda) = \hat{\delta}_n(\lambda)\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

де

$$\hat{\delta}_n(\lambda) = ((i+\lambda)^{n-m+1}(\lambda^{m-1}, \lambda^{m-2}, \dots, \lambda, 1)(i-\lambda)^{n-m+1}(\lambda^{m-1}, \lambda^{m-2}, \dots, \lambda, 1)).$$

Складемо матрицю $\hat{\delta}_n = \operatorname{diag}(\hat{\delta}_n(\lambda_1), \dots, \hat{\delta}_n(\lambda_{2m}))$. Тоді отримуємо формулу

$$\delta_n = \operatorname{diag}((-1-\lambda_k^2)^{-n/2})_{k=1,\dots,m}\,\hat{\delta}_n\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} R_2 R_1. \tag{16}$$

Для $m = 1$ і $m = 2$ маємо відповідно такі добутки:

$$\delta_n = \begin{pmatrix} (-1-\lambda_1^2)^{-n/2} & 0 \\ 0 & (-1-\lambda_2^2)^{-n/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+\lambda_1)^n & (1-\lambda_1)^n \\ (1+\lambda_2)^n & (1-\lambda_2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix},$$

$$\delta_n = \begin{pmatrix} (-1-\lambda_1^2)^{-n/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1-\lambda_2^2)^{-n/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1-\lambda_3^2)^{-n/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1-\lambda_4^2)^{-n/2} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (1+\lambda_1)^{n-1}\lambda_1 & (1+\lambda_1)^{n-1} & (1-\lambda_1)^{n-1}\lambda_1 & (1-\lambda_1)^{n-1} \\ (1+\lambda_2)^{n-1}\lambda_2 & (1+\lambda_2)^{n-1} & (1-\lambda_2)^{n-1}\lambda_2 & (1-\lambda_2)^{n-1} \\ (1+\lambda_3)^{n-1}\lambda_3 & (1+\lambda_3)^{n-1} & (1-\lambda_3)^{n-1}\lambda_3 & (1-\lambda_3)^{n-1} \\ (1+\lambda_4)^{n-1}\lambda_4 & (1+\lambda_4)^{n-1} & (1-\lambda_4)^{n-1}\lambda_4 & (1-\lambda_4)^{n-1} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/i & -1 & 1/i \\ i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/i & -1 & -1/i \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\hat{\Delta}_n$ визначник матриці $\hat{\delta}_n$. Тоді за формулою (16) отримуємо

$$\Delta_n = [L(1,i)L(1,-i)]^{n/2} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{(m-k)!}{2} \right)^4 \hat{\Delta}_n \,, \tag{17}$$

тобто $\Delta_n = 0$ тоді й тільки тоді, коли $\hat{\Delta}_n = 0$.

Якщо $\Delta_n = 0$, тоді матриця $\hat{\delta}_n$ вироджена і має лінійно залежні стовпці. Отже, існує вектор

$$h = \operatorname{col}(h_1, h_2) = \operatorname{col}(h_{1,m-1}, \ldots, h_{1,1}, h_{1,0}, h_{2,m-1}, \ldots, h_{2,1}, h_{2,0}) \neq 0$$

такий, що

$$\hat{\delta}_n h = 0 \,. \tag{18}$$

Нехай $g(\lambda) = \hat{\delta}_n(\lambda) h$. Тоді маємо

$$\hat{\delta}_n(\lambda) h = (i+\lambda)^{n-m+1} h_1(\lambda) + (i-\lambda)^{n-m+1} h_2(\lambda) \,,$$

де

$$h_j(\lambda) = h_{j,m-1}\lambda^{m-1} + h_{j,m-2}\lambda^{m-2} + \ldots + h_{j,1}\lambda + h_{j,0}, \quad j = 1, 2 \,.$$

Із умови (18) випливають рівності $g(\lambda_1) = 0$, ..., $g(\lambda_{2m}) = 0$. Тоді існує ненульовий многочлен

$$h_3(\lambda) = (\lambda^{n-2m}, \ldots, \lambda, 1) h_3 = \sum_{k=0}^{n-2m} h_{2k}\lambda^k \,,$$

де

$$h_3 = \operatorname{col}(h_{3,n-2m}, \ldots, h_{3,1}, h_{3,0}) \,,$$

і виконується тотожність

$$g(\lambda) \equiv -L(1,\lambda) h_3(\lambda) = -\prod_{k=1}^{2m} (\lambda - \lambda_k) \cdot h_3(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \,,$$

або тотожність

$$L(1,\lambda)h_3(\lambda) + (\lambda + i)^{n-m+1} h_1(\lambda) + (-1)^{n-m+1} (\lambda - i)^{n-m+1} h_2(\lambda) \equiv 0\,,$$

$$\lambda \in \mathbb{C}\,. \qquad (19)$$

Перейшовши до коефіцієнтів мнгочленів, запишемо формули для добутків:

$$L(1,\lambda)h_3(\lambda) = (\lambda^n, \dots, \lambda, 1) S_L h_3\,,$$

$$(\lambda \pm i)^{n-m+1} h_{1,2}(\lambda) = (\lambda^n, \dots, \lambda, 1) S_\pm h_{1,2}\,.$$

Звідси на основі (19) отримуємо

$$(S_L, S_+, S_-)\,\mathrm{col}\,(h_3, h_1, (-1)^{n-m+1} h_2) = 0\,,$$

де позначено

$$S_L = (s_{L,1}, \dots, s_{L,n-2m+1}), \qquad S_\pm = (s_{\pm,1}, \dots, s_{\pm,m})\,,$$

$$s_{\pm,j} = \mathrm{col}\,(0_{j-1}, s_\pm, 0_{m-j}), \qquad s_{L,j} = \mathrm{col}\,(0_{j-1}, s_L, 0_{n-2m+1-j})\,,$$

а $s_L = \mathrm{col}\,(a_{2m}, a_{2m-1}, \dots, a_1, a_0)$ – вектор коефіцієнтів многочлена $L(1,\lambda)$; $s_\pm = ((\pm i)^k C^k_{n-m+1})_{k=0,1,\dots,n-m+1}$ – відповідні вектори коефіцієнтів многочленів $(\lambda \pm i)^{n-m+1}$; 0_j – нульовий стовпець довжини j.

Квадратна матриця (S_L, S_+, S_-) має порядок $n+1$, матриця S_L є розміру $(n+1)\times(n-2m+1)$, а матриці $S_\pm$ – розміру $(n+1)\times m$.

У загальному випадку

$$(S_L, S_+, S_-) = (S_L, S^+, S^-) \begin{pmatrix} E_{n-2m+1} & 0 & 0 \\ 0 & E_m & E_m \\ 0 & iE_m & -iE_m \end{pmatrix},$$

де $S^+ = \mathrm{Re}\, S_+$, $S^- = \mathrm{Im}\, S_+$ – дійсна та уявна частини матриці S_+, причому

$$\det(S_L, S_+, S_-) = (-2i)^m \det(S_L, S^+, S^-)\,.$$

Отже, $\Delta_n = 0$ тоді й тільки тоді, коли виродженою є матриця (S_L, S^+, S^-), тобто

$$G(a_0, a_1, \dots, a_{2m}) \equiv \det(S_L, S^+, S^-) = 0\,. \qquad (20)$$

Знайдемо формулу, яка пов'язує Δ_n і функцію $G(a_0, a_1, \dots, a_{2m})$, яка є однорідним многочленом порядку $n-2m+1$ змінних $a_0, a_1, \dots, a_{2m}$.

Нехай матриця $J = \begin{pmatrix} E_{n-2m+1} & 0 \end{pmatrix}$ має розмір $(n-2m+1)\times(n+1)$, а матриця W_n при $n \ge 2m$ має вигляд

$$W_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{2m}^n & \dots & \lambda_{2m} & 1 \end{pmatrix} \equiv (\tilde{W}_n, W_{2m-1})\,,$$

де W_{2m-1} – матриця Вандермонда. Тоді

$$\begin{pmatrix} J \\ W_n \end{pmatrix} (S_L, S_+, S_-) = \begin{pmatrix} E_{n-2m+1} & 0 \\ \tilde{W}_n & W_{2m-1} \end{pmatrix} (S_L, S_+, S_-) = \begin{pmatrix} JS_L & * \\ 0 & \hat{\delta}_n \end{pmatrix},$$

$$\det W_{2m-1} \det(S_L, S_+, S_-) = \det(JS_L) \det \hat{\delta}_n\,.$$

Із формул

$$\det W_{2m-1} = \left(\prod_{k=1}^{2m} L'(1,\lambda_k)\right)^{1/2},$$

$$\det(S_L, S_+, S_-) = (-2i)^m\, G(a_0, a_1, \ldots, a_{2m})$$

і формули (17) отримуємо

$$\Delta_n = \Omega(m)\cdot a_{2m}^{2m-n-1}\left(\frac{\prod_{k=1}^{2m} L'(1,\lambda_k)}{[L(1,i)L(1,-i)]^n}\right)^{1/2}\cdot G(a_0, a_1, \ldots, a_{2m}), \qquad (21)$$

де стала $\Omega(m)$ визначається рівністю $\Omega(m) = (-2i)^m \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{(m-k)!}{2}\right)^4$. Зауважимо також, що вираз $\frac{1}{a_{2m}}\prod_{k=1}^{2m} L'(1,\lambda_k)$ є дискримінантом многочлена $L(1,\lambda)$, а, отже, є однорідним многочленом степеня $2m-2$ коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_{2m}$.

Права частина формули (21) визначена для всіх рівнянь (6) і стає нулем лише за рахунок множника $G(a_0, a_1, \ldots, a_{2m})$, оскільки згідно з припущенням, $a_{2m} L'(1,\lambda_k) L(1,i) L(1,-i) \neq 0$. Тому критерій неєдиності (теорему 2) розв'язку задачі (6), (7) можна сформулювати у термінах коефіцієнтів рівняння (6).

Теорема 4. *Для тривіальної розв'язності задачі Діріхле* (6), (7) *у просторі* $\mathbb{C}^{2m}(K)$ *необхідно та достатньо, щоб для деякого натурального числа* $n \geq 2m$ *коефіцієнти рівняння* (6) *задовольняли умову* (20).

Відповідні розв'язки задачі вигляду (10) містять вектор сталих C, який визначається системою лінійних однорідних алгебричних рівнянь $\delta_n^\top C = 0$ (тут «$\top$» – символ транспонування матриці), тобто (див. (16)) системою

$$R_1^\top R_2^\top \begin{pmatrix} R^\top & 0 \\ 0 & R^\top \end{pmatrix} \hat{\delta}_n^\top \operatorname{diag}\left((-1-\lambda_k^2)^{-n/2}\right)_{k=1,\ldots,m} C = 0.$$

Ця система еквівалентна системі

$$W(n)F \equiv \begin{pmatrix} W_{m-1}^\top \operatorname{diag}\left((i+\lambda_j)^{n-m+1}\right)_{j=1,\ldots,2m} \\ W_{m-1}^\top \operatorname{diag}\left((i-\lambda_j)^{n-m+1}\right)_{j=1,\ldots,2m} \end{pmatrix} F = 0,$$

$$F = \operatorname{diag}\left((-1-\lambda_k^2)^{-n/2}\right)_{k=1,\ldots,m} C,$$

де

$$W_{m-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{m-1} & \ldots & \lambda_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{2m}^{m-1} & \ldots & \lambda_{2m} & 1 \end{pmatrix},$$

а її ненульові розв'язки зображаються формулою

$$C = \operatorname{diag}\left((-1-\lambda_k^2)^{n/2}\right)_{k=1,\ldots,m} \left(E_{2m} - W^+(n)W(n)\right)\tilde{C}.$$

Тут $\tilde{C} \in \mathbb{C}^{2m}$ – ненульовий вектор; $W^+(n)$ – псевдообернена до $W(n)$ матриця [14].

Отже, формулу (10) можна переписати у вигляді

$$u(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m} C_k(n) T_{n-2m+2k} \left(\frac{x + y\lambda_j}{\sqrt{1+\lambda_j^2}} \right) \right) \times$$

$$\times \operatorname{diag}\left((-1-\lambda_k^2)^{n/2}\right)_{k=1,\ldots,m} \left(E_{2m} - W^{+}(n)W(n)\right)\tilde{C} .$$

3. Приклади умов (20) для рівнянь другого та четвертого порядків. Для рівняння другого порядку ($m = 1$) умова (20) має вигляд рівності $G_n(a_0, a_1, a_2) = 0$, де $G_n(a_0, a_1, a_2)$ − однорідний многочлен порядку $n-1$. На поданих нижче рисунках змінні b_j є дійсними чи уявними частинами коефіцієнтів a_j. У випадку $n = 2$ розв'язки рівняння (20) утворюють площину $a_2 + a_0 = 0$, у випадку $n = 3$ − конус $(3a_2 + 5a_0)^2 = 3a_1^2 + 16a_0^2$, у випадку $n = 5$ − два конуси $a_1^2 + (a_2 - a_0)^2 = (6 \pm 2\sqrt{5})(a_2 + a_0)^2$. Множина розв'язків рівняння (20) у випадку $n = 4$ містить конус $(a_2 + 3a_0)^2 = a_1^2 + a_0^2$ і площину $a_2 + a_0 = 0$, у випадку $n = 6$ − площину $a_2 + a_0 = 0$ і два конуси $(a_2 + 7a_0)^2 = 3a_1^2 + 48a_0^2$, $(3a_2 + 5a_0)^2 = 3a_1^2 + 16a_0^2$, а при $n = 9$ − конус $(3a_2 + 5a_0)^2 = 3a_1^2 + 16a_0^2$ і три такі конуси (рис. 1):

$$a_1^6 = 33a_1^4(a_2^2 + a_0^2) - 27a_1^2(a_2^4 + a_0^4) - 372a_2a_1^2a_0(a_2^2 + a_0^2) +$$

$$+ 1005a_2^2a_0^2(a_2^2 + a_0^2) + 126a_2a_0(a_2^4 + a_0^4) + 3(a_2^6 + a_0^6) +$$

$$+ 78a_2a_1^4a_0 - 738a_2^2a_1^2a_0^2 + 1827a_2^3a_0^3 .$$

Для рівняння четвертого порядку ($m = 2$) при $n = 7$ умова (20) має такий вигляд (при $a_4 = a_0 = 1$ відповідну поверхню зображено на рис. 2):

$$36(a_1^4 + a_2^4 + a_3^2) + 78400 = -240a_3a_1(a_3^2 + a_1^2) + 120a_2^2(a_3^2 + a_1^2) -$$

$$- 472a_3^2a_1^2 + 2496a_3a_2a_1 + 2080a_2(a_3^2 + a_1^2) + 144a_3a_2^2a_1 -$$

$$- 1248a_2^3 + 9696(a_3^2 + a_1^2) - 14176a_2^2 + 14912a_3a_1 - 58240a_2 .$$

Рис. 3 у сферичній системі координат зображає перетин поверхні (20) для $n = 6$ одиничною сферою, а рис. 4 перетин площиною $a_2 = 1$ поверхонь (20) для $n = 2,\ldots,6$.

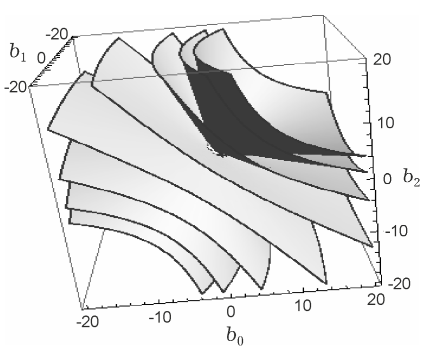

Рис. 1. $m = 1, n = 9$.

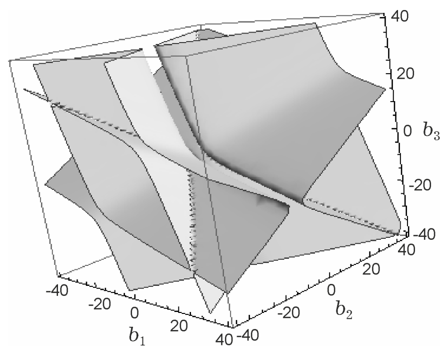

Рис. 2. $m = 2, n = 7$.

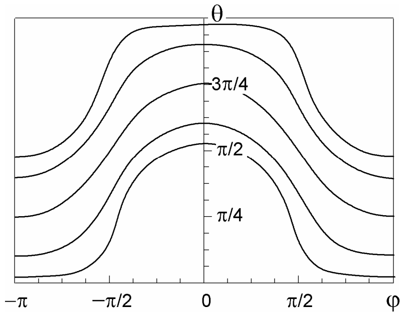

Рис. 3. $m = 1, n = 6$.

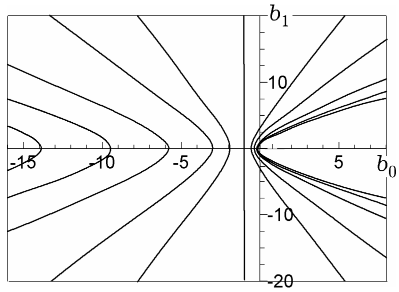

Рис. 4. $m = 1, n = 2, \ldots, 6$.

Очевидно, що для рівнянь А. В. Біцадзе (1) та (2) умова (20) виконується у випадку $m = n = 2$ (має вигляд $a_2 + a_0 = 0$), а для рівнянь (4) і (5) – у випадку $m = 2$, $n = 4$, тоді умова (20) еквівалентна умові $3(a_4 + a_0) + a_2 = 0$.

4. Висновки. Встановлено умови неєдиності розв'язку задачі Діріхле в одиничному крузі для рівнянь із частинними похідними головного типу зі сталими комплексними коефіцієнтами, символи яких є формами довільного парного порядку, в термінах коефіцієнтів рівняння у випадку існування кутів нахилу комплексних характеристик. Побудовано приклади множин рівнянь, для яких задача Діріхле в крузі має нетривіальні розв'язки. Подано аналітичне та графічне зображення цих алгебричних множин.

1. *Александрян Р. А.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных типа С. Л. Соболева // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1960. – **9**. – С. 455–505.
2. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 6. – С. 211–212.
3. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
4. *Бурский В. П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 32–36.
   Те саме: *Burskii V. P.* Breakdown of uniqueness of solutions of the Dirichlet problem for elliptic systems in a disc // Math. Notes. – 1990. – **48**, No. 3. – P. 894–897.
5. *Бурский В. П., Буряченко Е. А.* Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 4. – С. 498–508.
   Те саме: *Burskii V. P., Buryachenko E. A.* Some aspects of the nontrivial solvability of homogeneous Dirichlet problems for linear equations of arbitrary even order in the disk // Math. Notes. – 2005. – **77**, No. 3-4. – P. 461–470.
6. *Буряченко Е. А.* О единственности решений задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – Вып. 10. – С. 44–49.
7. *Буряченко Е. А.* Разрешимость однородной задачи Дирихле в круге для уравнений порядка $2m$ в случае кратных характеристик, имеющих углы наклона // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 33–41.
   Те саме: *Buryachenko E. A.* Solvability of the homogeneous Dirichlet problem in a disk for equations of order $2m$ in the case of multiple characteristics with inclination angles // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No. 3. – P. 319–329.
8. *Буряченко Е. А.* Условия нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для уравнений произвольного четного порядка в случае кратных характеристик, не имеющих углов наклона // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 591–603.
   Те саме: *Buryachenko E. A.* Conditions of nontrivial solvability of the homogeneous Dirichlet problem for equations of any even order in the case of multiple characteristics without slope angles // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 5. – P. 676–690.

9. *Товмасян Н. Е.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 1. – С. 3–23.
10. *Babayan A. O.* On unique solvability of Dirichlet problem for fourth order properly elliptic equation // Изв. НАН Армении. Математика. – 1999. – **34**, № 5. – С. 3–18.
11. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Am. Math. Soc. – 1939. – **45**. – P. 851–859.
12. *John F.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Am. J. Math. – 1941. – **63**. – P. 141–154.
13. *Karachik V. V.* Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – **287**, No. 2. – P. 577–592.
14. *Lawson C., Hanson R.* Solving least squares problems. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974. – 340 p.
15. *Ren G. B., Kähler U.* Almansi decompositions for polyharmonic, polyheat, and polywave functions // Studia Math. – 2006. – **172**, No. 1. – P. 91–100.
16. *Tovmasyan N. E.* Non-regular differential equations and calculations of electromagnetic fields. – Singapore: World Scientific, 1998. – 235 p.

УСЛОВИЯ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ В ТЕРМИНАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрена задача Дирихле в единичном круге для уравнений главного типа с частными производными и постоянными комплексными коэффициентами, символы которых являются формами произвольного четного порядка. Установлены условия неединственности решения в терминах коэффициентов уравнения в случае существования углов наклона комплексных характеристик. Построены примеры уравнений, для которых задача Дирихле в круге имеет нетривиальные решения и не является нетеровой.

CONDITIONS OF NON-UNIQUENESS OF SOLUTION FOR DIRICHLET PROBLEM IN A UNIT DISK IN TERMS OF DIFFERENTIAL EQUATION COEFFICIENTS

The Dirichlet problem in a unit disk for partial differential equations of the main type with constant complex-valued coefficients whose symbols are forms of arbitrary even order is considered. The conditions of non-uniqueness of the solution in terms of the equation coefficients for the case when angles of inclination of complex characteristics exist are established. Some examples of equations for which the Dirichlet problem in a disk has nontrivial solutions and is not noetherian are constructed.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
20.11.11