УДК 514.76

В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов

K-ОБОБЩЕННЫЕ G-СТРУКТУРЫ

В работах [2, 7] *введено понятие обобщенного расслоенного пространства. Этим термином обозначена структура, аналогичная главному расслоению, в которой группа, действующая в слое, зависит от слоя. В настоящей статье эта идея развита применительно к G-структурам, и найдены структурные уравнения K-обобщенной G-структуры.*

1. Напомним определение G-структуры [4]. Пусть G − подгруппа полной линейной группы $GL(n)$, действующей в некотором фиксированном n-мерном векторном пространстве V со стандартным базисом, и пусть $\mathcal{F}(M)$ − расслоение реперов гладкого многообразия M размерности n, $\pi : \mathcal{F}(M) \to M$ − естественная проекция. Тогда всякий репер p из $\mathcal{F}(M)$ определяет изоморфизм пространства V на касательное пространство $T_x(M)$, где $x = \pi(p)$. *G-структурой B_G на многообразии M* называем подмногообразие в $\mathcal{F}(M)$ такое, что для любой точки p из B_G и для любого g из $GL(n)$ точка $p \cdot g$ принадлежит B_G тогда и только тогда, когда $g \in G$. При этом, по определению, $p \cdot g(v) = p(gv)$, $v \in V$.

Термин «*обобщенная G-структура*» занят: им обозначают такую G-структуру, в которой действие группы G не является точным. Обобщение этой конструкции получаем следующим образом. Пусть $G(x)$ − гладкая деформация в $GL(n)$, то есть n-параметрическое семейство подгрупп группы $GL(n)$, гладко зависящее от параметров $x = (x^i)$, $i = 1,\dots,n$. Обозначим пространство параметров деформации через M, $\dim M = n$, где M − гладкое многообразие.

K-обобщенной G-структурой $B_G(x)$ на многообразии M назовем подмногообразие в расслоении $\mathcal{F}(M)$ реперов многообразия M такое, что для любой точки p из $B_G(x)$ и для любого g из $GL(n)$ точка $p \cdot g$ принадлежит $B_G(x)$ тогда и только тогда, когда $g \in G(x)$, где $x = \pi(p)$. При этом, как и выше, $p \cdot g(v) = p(gv)$, $v \in V$, а все $G(x)$ действуют в некотором фиксированном n-мерном векторном пространстве V со стандартным базисом.

Структурные уравнения G-структуры B_G найдены, например, в [1]. Аналогичным образом получим структурные уравнения K-обобщенной G-структуры $B_G(x)$.

Пусть ω^i_{jk}, $i,j,k,\ldots = 1,\dots,n$, − базисные формы многообразия M, зависящие от дифференциалов параметров x^i − локальных координат на M и одновременно параметров деформации $G(x)$. Согласно [3], формы ω^i удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j\,,\\
&\omega d^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

причем формы ω^i_{jk} удовлетворяют соотношениям $\omega^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0$. Отсюда

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2012. − 55, № 3. − С. 44-48.

следуют равенства

$$\omega^i_{[jk]} = R^i_{jk\ell}\omega^\ell$$

и

$$R^i_{[jk\ell]} = 0\,.$$

Если фиксировать точку многообразия M, то значения форм ω^i в этой точке станут равными нулю, и уравнения (1) перейдут в следующие:

$$\delta\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k\,. \tag{2}$$

Здесь δ означает дифференцирование по вторичным параметрам, от которых зависит положение корепера в фиксированной точке многообразия M. Уравнения (2) представляют собой структурные уравнения группы $GL(n)$, действующей в касательном пространстве многообразия M, а формы π^i_j являются инвариантными формами этой группы [3] (см. также [5, 8]).

Пусть $\theta^\alpha(a,x)$ − базисные инвариантные формы группы $G(x)$, зависящие от локальных групповых координат a^α и локальных параметров деформации x^i. Фиксируя $x = x_0$, получим инвариантные формы группы $G(x_0)$:

$$\pi^\alpha \equiv \theta^\alpha(a, x_0)\,,$$

которые должны удовлетворять структурным уравнениям Маурера − Картана

$$\delta\pi^\alpha = \frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}(x_0)\pi^\beta \wedge \pi^\gamma\,. \tag{3}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \ldots = 1, 2, \ldots, r$, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x_0)$ − структурные постоянные группы $G(x_0)$, кососимметричные по нижним индексам и удовлетворяющие тождествам Якоби

$$C^\alpha_{\varepsilon[\beta}(x_0)C^\varepsilon_{\gamma\sigma]}(x_0) = 0\,. \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) выполняются при условии $x = x_0$, которое эквивалентно условию $\omega^i = 0$. Следовательно, на многообразии P будут выполняться уравнения

$$d\theta^\alpha = \frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}(x)\theta^\beta \wedge \theta^\gamma + \omega^k \wedge \theta^\alpha_k\,, \tag{5}$$

которые при $\omega^k = 0$ переходят в уравнения (3). При этом, согласно (4), для любых x будут выполняться тождества Якоби

$$C^\alpha_{\varepsilon[\beta}(x)C^\varepsilon_{\gamma\sigma]}(x) = 0\,. \tag{6}$$

Поскольку группа $G(x_0)$ является подгруппой группы $GL(n)$, то должны выполняться соотношения

$$\pi^i_j = a^i_{j\alpha}(x_0)\pi^\alpha\,. \tag{7}$$

Дифференцируя эти уравнения с помощью символа δ (то есть при фиксированной точке $x = x_0$) и используя структурные уравнения (2) и (3), получим соотношения

$$a^k_{j[\alpha}(x_0)a^i_{|k|\beta]}(x_0) = c^\gamma_{\alpha\beta}(x_0)a^i_{j\gamma}(x_0)\,. \tag{8}$$

Уравнения (7) выполняются при условии $x = x_0$, которое эквивалентно условию $\omega^i = 0$. Следовательно, на многообразии M будут выполняться уравнения

$$\omega_j^i = a_{j\alpha}^i(x)\theta^\alpha + \bar{b}_{jk}^i\omega^k, \tag{9}$$

где функции $\bar{b}_{jk}^i$ зависят от параметров a^α, x^i и вторичных параметров. С учетом соотношения (9) первая серия уравнений (1) примет вид

$$d\omega^i = a_{j\alpha}^i(x)\omega^j \wedge \theta^\alpha + b_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k, \tag{10}$$

где обозначено $b_{jk}^i = \bar{b}_{[jk]}^i$.

В соответствии с [1], назовем уравнения (5) и (10) структурными уравнениями K-обобщенной G-структуры $B_G(x)$, а величины b_{jk}^i – компонентами ее первого структурного объекта.

Уравнения (8) на многообразии M примут вид

$$a_{j[\alpha}^k(x)a_{|k||\beta]}^i(x) = c_{\alpha\beta}^\gamma(x)a_{j\gamma}^i(x). \tag{11}$$

Поскольку функции $a_{j\alpha}^i(x)$ зависят только от переменной x, то их дифференциалы можно записать так:

$$da_{j\alpha}^i(x) = a_{j\alpha,k}^i(x)\omega^k. \tag{12}$$

Продифференцируем внешним образом уравнения (10). После преобразований, учитывающих уравнения (5), (10), (12), получим квадратичные уравнения

$$(\nabla b_{jk}^i - a_{[j|\alpha|}^i\theta_{k]}^\alpha - a_{[j|\alpha|,k]}^i\theta^\alpha) \wedge \omega^j \wedge \omega^k + 2b_{jk}^m b_{m\ell}^i\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^\ell = 0, \tag{13}$$

где

$$\nabla b_{jk}^i = db_{jk}^i - b_{\ell k}^i a_{j\alpha}^\ell\theta^\alpha - b_{j\ell}^i a_{k\alpha}^\ell\theta^\alpha + b_{jk}^\ell a_{\ell\alpha}^i\theta^\alpha.$$

Отсюда следует, что форма, заключенная в скобках левой части уравнения (13), является главной, то есть можем записать

$$\nabla b_{jk}^i - a_{[j|\alpha|}^i\theta_{k]}^\alpha - a_{[j|\alpha|,k]}^i\theta^\alpha = b_{jk\ell}^i\omega^\ell. \tag{13'}$$

Подставляя (13′) в (13), придем к соотношениям

$$b_{[jk\ell]}^i + 2b_{[jk}^m b_{|m|\ell]}^i = 0. \tag{14}$$

Следуя [1], назовем совокупность величин $\{b_{jk}^i, b_{jk\ell}^i\}$ вторым структурным объектом K-обобщенной G-структуры $B_G(x)$, а соотношения (14) – тождествами Бианки – Картана этой структуры.

2. Функции $C_{\beta\gamma}^\alpha(x)$ задают деформацию $g(x)$ алгебры Ли, соответствующую деформации группы Ли $G(x)$. Их дифференциалы запишем в виде

$$dC_{\beta\gamma}^\alpha(x) = C_{\beta\gamma,k}^\alpha(x)\omega^k. \tag{15}$$

Продифференцировав это уравнение внешним образом и воспользовавшись уравнениями (1), получим

$$(dC_{\beta\gamma,k}^\alpha - C_{\beta\gamma,\ell}^\alpha\omega_k^\ell) \wedge \omega^k = 0.$$

Отсюда по лемме Картана находим

$$dC^{\alpha}_{\beta\gamma,k} - C^{\alpha}_{\beta\gamma,\ell}\omega^{\ell}_{k} = C^{\alpha}_{\beta\gamma,k\ell}\omega^{\ell}, \tag{16}$$

причем величины $C^{\alpha}_{\beta\gamma,k\ell}$ симметричны по индексам k и ℓ. Дальнейшее дифференцирование уравнений (16) приведет к уравнениям

$$dC^{\alpha}_{\beta\gamma,k\ell} - C^{\alpha}_{\beta\gamma,p\ell}\omega^{p}_{k} - C^{\alpha}_{\beta\gamma,kp}\omega^{p}_{\ell} - C^{\alpha}_{\beta\gamma,p}\omega^{p}_{k\ell} = C^{\alpha}_{\beta\gamma,k\ell p}\omega^{p} \tag{17}$$

и т. д. Таким образом, система (15) является правильно продолжаемой.

Выясним смысл функций, которые появляются при продолжении структурных функций $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$. Предполагаем, что деформация $g(x)$ существует, то есть тождества Якоби (6) выполняются тождественно относительно x. Дифференцируя (6), получим серии соотношений:

$$\mathrm{Alt}\,(C^{\alpha}_{\varepsilon\beta,k}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma} + C^{\alpha}_{\varepsilon\beta}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma,k}) = 0\,,$$

$$\mathrm{Alt}\,(C^{\alpha}_{\varepsilon\beta,k\ell}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma} + C^{\alpha}_{\varepsilon\beta,k}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma,\ell} + C^{\alpha}_{\varepsilon\beta,\ell}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma,k} + C^{\alpha}_{\varepsilon\beta}C^{\varepsilon}_{\gamma\sigma,k\ell}) = 0\,, \tag{18}$$

и т. д., где символ Alt означает альтернацию по индексам β, γ, σ. Если деформация существует (и только в этом случае), соотношения (18) должны выполняться тождественно. Таким образом, левые части соотношений (18) можно рассматривать как препятствия к существованию деформации. Как известно, эти препятствия связаны с когомологиями алгебр Ли [6].

В рассматриваемой конструкции деформация существует по определению, то есть соотношения (6) и все их дифференциальные следствия (18) выполняются тождественно.

Результаты обобщает следующая

Теорема 1. *Пусть M — гладкое многообразие. На M задана K-обобщенная G-структура $B_G(x)$ тогда и только тогда, когда базисные формы ω^i этого многообразия удовлетворяют структурным уравнениям вида* (10), *причем формы θ^{α}, входящие в* (10), *удовлетворяют уравнениям вида* (5), *а функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ и $a^{i}_{j\alpha}(x)$, входящие соответственно в уравнения* (5) *и* (10), *связаны соотношениями* (11). *Функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ кососимметричны по нижним индексам и удовлетворяют пфаффовой системе* (16), *которая является правильно продолжаемой. Кроме того, функции $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ удовлетворяют тождествам Якоби* (6) *и всем соотношениям, которые получаются из них при дифференцировании.*

В случае, если величины $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ являются постоянными, то постоянными будут и величины $a^{i}_{j\alpha}(x)$, и K-обобщенная G-структура становится обычной G-структурой, а структурные уравнения первой превращаются в структурные уравнения второй, найденные в [1].

3. Непосредственным вычислением доказывается следующая

Теорема 2. *Структурные уравнения* (5) *и* (10) *сохраняют свой вид только при следующих допустимых преобразованиях корепера ω^i, θ^{α}:*

$$\tilde{\omega}^{i} = A^{i}_{j}(x)\omega^{j}, \qquad \tilde{\theta}^{\alpha} = B^{\alpha}_{\beta}(x)\theta^{\beta} + D^{\alpha}_{k}\omega^{k}, \tag{19}$$

где функции D^{α}_{k} зависят от главных и вторичных параметров многообразия M и параметров группы. При этом функции, входящие в структурные уравнения, преобразуются следующим образом:

$$\tilde{a}^i_{j\alpha} = A^i_k \tilde{A}^\ell_j a^k_{\ell\alpha},$$

$$b^i_{jk} = A^i_\ell \tilde{A}^{[m}_{[j} \tilde{A}^{p]}_{k]} b^\ell_{mp} + A^i_{m,[j} A^m_{k]},$$

$$C^\alpha_{\beta\gamma} = B^\alpha_\xi \tilde{B}^\eta_\beta \tilde{B}^\zeta_\gamma C^\xi_{\eta\zeta},$$

где матрицы $(\tilde{A})$ *и* $(\tilde{B})$ *обратны матрицам* (A) *и* (B) *соответственно и положено*

$$dA^i_j = A^i_{j,k}\omega^k.$$

1. *Акивис М. А.* О замкнутых G-структурах на дифференцируемом многообразии // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. – 1975. – **7**. – С. 69–79.
2. *Кузаконь В. М.* Обобщенные расслоенные пространства // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 2. – С. 58–63.
3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Итоги науки и техники. Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР. – 1966. – **1**. – С. 139–189.
4. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. – Москва: Мир, 1970. – 412 с.
   То же: *Sternberg S.* Lectures on differential geometry. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, Inc., 1964.
5. *Distler J., Sharpe E.* Heterotic compactifications with principal bundles for general groups and general levels // Adv. Theor. Math. Phys. – 2010. – **14**, No. 2. – P. 335–398.
6. *Hochschild G., Serre J.-P.* Cohomology of Lie algebras // Ann. Math. – 1953. – **57**, No. 2. – P. 591–603.
7. *Kuzakon' V. M.* Generalized fibre bundles with connections // Укр. фіз. журн. – 1998. – **43**, № 7. – С. 814–817.
8. *Weiß S.* Deformation quantization of principal fibre bundles and classical gauge theories. – 2010. – http://arxiv.org/abs/1003.1028v1.

K-УЗАГАЛЬНЕНІ G-СТРУКТУРИ

У працях [2, 7] *введено поняття узагальненого розшарованого простору. Цим терміном позначено структуру, аналогічну головному розшаруванню, в якій група, що діє в шарі, залежить від шару. В цій статті цю ідею розвинуто стосовно до* G*-структур і знайдено структурні рівняння* K*-узагальненої* G*-структури.*

K-GENERALIZED G-STRUCTURES

One of the authors of this article has introduced the concept of a generalized bundle space in [2, 7]. *This term refers to a structure similar to a principal bundle, in which the group acting in a leaf, dependents on the leaf. In this paper, this idea is developed with respect to* G*-structures and the structure equations of* K*-generalized* G*-structure are obtained.*

[1] Одес. нац. акад. пищевых технологий, Одесса,
[2] Твер. гос. ун-т, Тверь, Россия

Получено
21.03.12