УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

ПРО ТРИКУТНУ ФОРМУ МНОГОЧЛЕННОЇ МАТРИЦІ ТА ЇЇ ІНВАРІАНТИ ВІДНОСНО НАПІВСКАЛЯРНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Досліджується структура многочленних матриць у зв'язку з їх звідністю напівскалярно еквівалентними перетвореннями до простіших форм. Одержано систему інваріантів для одного класу матриць відносно напівскалярної еквівалентності. На цій основі встановлено майже канонічну форму матриці стосовно напівскалярної еквівалентності.

Вступ. Напівскалярна еквівалентність многочленних матриць вперше була введена і вивчалася у працях [3, 4]. Там, зокрема, доведена звідність многочленної матриці над полем комплексних чисел напівскалярно еквівалентними перетвореннями до трикутного вигляду з інваріантними множниками на головній діагоналі. Пізніше така ж трикутна форма була отримана в праці [9]. Також аналогічний результат відносно так званої PS-еквівалентності одержано у роботі [11] для многочленних матриць над довільним нескінченним полем. Слід зазначити, що загальніший результат, який стосується скінченних наборів многочленних матриць над нескінченними полями та деякими скінченними полями, встановлено у праці [5]. У роботах автора [6, 7] розв'язано задачу зведення до канонічної форми щодо напівскалярної еквівалентності окремих класів многочленних матриць над полем комплексних чисел. У запропонованій праці досліджується вказана еквівалентність многочленних матриць над довільним полем за умови, що елементарні дільники цих матриць є різними степенями лінійного многочлена та відносяться до одного і того ж характеристичного кореня. Відомо, що задача напівскалярної еквівалентності тісно пов'язана з проблемою пар матриць. Цій проблемі присвячено значну кількість праць (див., наприклад, [1, 2, 12]). До неї зводиться багато класифікаційних задач, зокрема задача про еквівалентність просторових матриць [10].

1. Означення та допоміжні твердження. Нехай F – довільне поле. Розглянемо многочленну матрицю $N(x) \in M(n, F[x])$, яку запишемо у вигляді матричного многочлена

$$N(x) = N_0 x^s + N_1 x^{s-1} + \ldots + N_{s-1} x + N_s ,$$

де матриця N_0 є ненульовою. Тоді, як звичайно, число s називають степенем, доданок $N_0 x^s$ – старшим членом, матрицю N_0 – старшим коефіцієнтом матричного многочлена або многочленної матриці $N(x)$. Найменший степінь (ненульового) монома серед усіх мономів, що утворюють задану многочленну матрицю, назвемо її *молодшим степенем* і позначимо через $\operatorname{codeg} N(x)$. Моном мінімального степеня і його коефіцієнт назвемо відповідно *молодшим членом* і *молодшим коефіцієнтом* многочленної матриці. Таку саму термінологію будемо застосовувати і до звичайних (із кільця $F[x]$) многочленів. Молодший степінь нульової матриці за означенням дорівнює символу $+\infty$. Позначимо через h кількість попарно різних інваріантних множників матриці $N(x)$, $2 \le h \le n$ (випадок $h = 1$ є тривіальним). Надалі припускатимемо, що характеристичний многочлен $\det N(x)$ має вигляд $\det N(x) = a(x - \alpha)^{s_0}$, $s_0 > 0$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $a = 1$, $\alpha = 0$. Згідно з твердженням 1 з [8], матриця $N(x)$ напівскалярно еквівалентним перетворенням $N(x) \to CN(x)Q(x)$, $C \in GL(n, F)$, $Q(x) \in$

$\in GL(n, F[x])$ зводиться до блочно-трикутної форми

$$A(x) = \begin{Vmatrix} E_{\ell_1} x^{s_1} & & & \\ A_{21}(x) & E_{\ell_2} x^{s_2} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ A_{h1}(x) & A_{h2}(x) & \ldots & E_{\ell_h} x^{s_h} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

де E_{ℓ_i} – одинична матриця порядку ℓ_i, $A_{uv}(x) \in M(\ell_u, \ell_v, F[x])$, $\deg A_{uv}(x) <$ $< s_u$, $\operatorname{codeg} A_{uv}(x) > s_v$, $s_{u-1} < s_u$, $u = 2, \ldots, h$, $v < u$. Зрозуміло, що матриця $A(x)$ визначається неоднозначно. Нехай $N(x)$ зведена до матриці

$$B(x) = \begin{Vmatrix} E_{\ell_1} x^{s_1} & & & \\ B_{21}(x) & E_{\ell_2} x^{s_2} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ B_{h1}(x) & B_{h2}(x) & \cdots & E_{\ell_h} x^{s_h} \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

де $\deg B_{uv}(x) < s_u$, $\operatorname{codeg} B_{uv}(x) > s_v$, $u = 2, \ldots, h$, $v < u$. Тоді справджується таке

Твердження 1. *Нехай матриці* $A(x)$, $B(x)$ *вигляду* (1) *і* (2) *напівскалярно еквівалентні, тобто*

$$SA(x) = B(x)R(x), \tag{3}$$

де $S \in GL(n, F)$, $R(x) \in GL(n, F[x])$. *Тоді в блочних матрицях* $S = \left\| S_{ij} \right\|_1^h$, $S_{ij} \in M(\ell_i, \ell_j, F)$, *і* $R(x) = \left\| R_{ij}(x) \right\|_1^h$, $R_{ij}(x) \in M(\ell_i, \ell_j, F[x])$, *маємо* $S_{uv} = 0$, $u = 2, \ldots, h$, $v < u$, *тобто матриця* S *є верхньою блочно-трикутною*:

$$S = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} & \ldots & S_{1h} \\ 0 & S_{22} & \ldots & S_{2h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & S_{hh} \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

а $\operatorname{codeg} R_{uv}(x) \ge s_u - s_v$.

Д о в е д е н н я. Порівняння молодших степенів блоків в позиціях $(1, u)$, $u = 2, \ldots, h$, в обох частинах рівності (3) показує, що $\operatorname{codeg} R_{1u}(x) \ge$ $\ge s_u - s_1$. На основі цього, порівнюючи блоки в позиціях $(2, u)$, $u = 3, \ldots, h$, в обох частинах рівності (3), дістанемо $\operatorname{codeg} R_{2u}(x) \ge s_u - s_2$. Продовжуючи так і далі, врешті-решт прийдемо до нерівності $\operatorname{codeg} R_{h-1,h}(x) \ge s_h - s_{h-1}$.

Зі співвідношення (3) для довільної пари індексів v, u, $v < u$, можемо записати

$$S_{uv} x^{s_u} + \sum_{m=v+1}^{h} S_{um} A_{mv}(x) = \sum_{k=1}^{v-1} B_{uk}(x) R_{kv}(x) + \\ + \sum_{\ell=v}^{u-1} B_{u\ell}(x) R_{\ell v}(x) + x^{s_u} R_{uv}(x). \tag{5}$$

Оскільки в рівності (5) $\operatorname{codeg} B_{uk}(x) > s_k$, а $\operatorname{codeg} R_{kv}(x) \ge s_v - s_k$ згідно з доведеним вище, то $\operatorname{codeg}(B_{uk}(x) R_{kv}(x)) > s_v$. Крім того, $\operatorname{codeg} A_{mv}(x)$, $\operatorname{codeg} B_{u\ell}(x)$ і s_u більші від s_v. Отже, в рівності (5) всі доданки, крім першого у лівій частині, мають молодший степінь, більший від s_v. Тому $S_{uv} = 0$. ♦

2. Інваріанти многочленної матриці відносно напівскалярної еквівалентності: загальний випадок.

Теорема 1. *Напівскалярно еквівалентні матриці вигляду* (1) *мають одні й ті ж найбільші спільні дільники* (*зі старшим коефіцієнтом* 1) *мінорів порядку* k_i $(k_i = 1,\dots,\ell_{h-i+1} + \dots + \ell_h)$, *які містяться в останніх* i $(i = 1,2,\dots,h)$ *блочних рядках.*

Д о в е д е н н я теореми для $i = 1,2,\dots,h-1$ випливає із рівності

$$\left\| \begin{matrix} S_{h-i+1,h-i+1} & \dots & S_{h-i+1,h} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & S_{hh} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} A_{h-i+1,1}(x) & \dots & A_{h-i+1,h-i}(x) & E_{\ell_{h-i+1}} x^{s_{h-i+1}} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{h1}(x) & \dots & A_{h,h-i}(x) & A_{h,h-i+1}(x) & \dots & E_{\ell_h} x^{s_h} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} B_{h-i+1,1}(x) & \dots & B_{h-i+1,h-i}(x) & E_{\ell_{h-i+1}} x^{s_{h-i+1}} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ B_{h1}(x) & \dots & B_{h,h-i}(x) & B_{h,h-i+1}(x) & \dots & E_{\ell_h} x^{s_h} \end{matrix} \right\| R(x),$$

записаної на основі співвідношення (3) з урахуванням твердження 1. При цьому треба мати на увазі, що блоки $S_{h-i+1,h-i+1},\dots,S_{hh}$ є неособливі, а матриця $R(x)$ оборотна. Для випадку $i = h$ доведення очевидне. ♦

Наслідок 1. *Інваріантні множники підматриці, що складається з* i $(i = 1,2,\dots,h)$ *останніх блочних рядків матриці* (1), *є інваріантами матриці* $N(x)$ *відносно напівскалярної еквівалентності.*

Молодший степінь останнього блочного рядка матриці (1) співпадає зі степенем першого його інваріантного множника і, таким чином, є інваріантом матриці $N(x)$ стосовно напівскалярної еквівалентності. Проте цього не можна сказати про інші блочні рядки цієї матриці.

Приклад 1. У напівскалярно еквівалентних матрицях

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 + x^3 & x^4 & 0 \\ x^3 & 0 & x^5 \end{matrix} \right\| \quad \text{і} \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ x^3 & x^4 & 0 \\ x^3 & 0 & x^5 \end{matrix} \right\|$$

молодші степені других рядків дорівнюють відповідно 2 і 3. ◄

Щоб зменшити неоднозначність матриці вигляду (1), необхідно збільшити молодші степені всіх її блочних рядків, оскільки степені цих рядків обмежені зверху степенями відповідних діагональних елементів (інваріантних множників). У зв'язку з цим виникає питання: чи можна збільшити молодший степінь одного блочного рядка, не зменшуючи при цьому молодші степені інших рядків? Позитивну відповідь на це питання дає наступна

Теорема 2. *У класі* $\{CA(x)Q(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць вигляду* (1) *існує матриця, в якій кожен із блочних рядків має максимально можливий для цього класу молодший степінь.*

Д о в е д е н н я. Якщо матриці $A(x)$ і $B(x)$ вигляду (1) і (2) напівскалярно еквівалентні, то з очевидної рівності (3) згідно з твердженням 1 можна записати

$$S_{hh}\left\| A_{h1}(x) \ \ \ldots \ \ A_{h,h-1}(x) \ \ E_{\ell_h}x^{s_h} \right\| =$$

$$= \left\| B_{h1}(x) \ \ \ldots \ \ B_{h,h-1}(x) \ \ E_{\ell_h}x^{s_h} \right\| R(x).$$

З огляду на оборотність матриць S_{hh} і $R(x)$ дістанемо, що

$$\operatorname{codeg}\left\| A_{h1}(x) \ \ \ldots \ \ A_{h,h-1}(x) \ \ E_{\ell_h}x^{s_h} \right\| =$$

$$= \operatorname{codeg}\left\| B_{h1}(x) \ \ \ldots \ \ B_{h,h-1}(x) \ \ E_{\ell_h}x^{s_h} \right\|.$$

Таким чином, молодший степінь останнього блочного рядка матриці $A(x)$ вже є максимально можливим. Припустимо за індукцією, що в цій матриці кожен із останніх k, $1 \le k < h-1$, блочних рядків має максимально можливий молодший степінь, а $(h-k)$-й блочний рядок таким не є. Нехай також в матриці $B(x)$ вигляду (2) із множини $\{CA(x)Q(x)\}$ блочний рядок з номером $h-k$ має максимально можливий молодший степінь. Тоді з рівності (3), зважаючи на оборотність вільного члена підматриці $\left\| R_{ij}(x) \right\|_1^{h-k}$ перетворювальної матриці $R(x)$, випливає, що

$$\operatorname{codeg}\left(\left\| S_{h-k,h-k} \ \ \ldots \ \ S_{h-k,h} \right\| \left\| \begin{matrix} A_{h-k,1}(x) & \ldots & A_{h-k,h-k-1}(x) & E_{\ell_{h-k}}x^{s_{h-k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{h1}(x) & \ldots & A_{h,h-k-1}(x) & A_{h,h-k}(x) \end{matrix} \right\| \right) =$$

$$= \operatorname{codeg}\left\| B_{h-k,1}(x) \ \ \ldots \ \ B_{h-k,h-k-1}(x) \ \ E_{\ell_{h-k}}x^{s_{h-k}} \right\|. \qquad (6)$$

Замінимо в матриці S вигляду (4) із рівності (3) всі наддіагональні блоки, крім $(h-k)$-го блочного рядка, нульовими блоками і позначимо отриману таким чином матрицю через S'. На основі твердження 2 з [8] за допомогою цієї неособливої матриці S' і деякої оборотної матриці $R'(x)$ можна перейти від матриці $A(x)$ до деякої іншої матриці $A'(x)$ так, що

$$S'A(x) = A'(x)R'(x), \qquad (7)$$

де

$$A'(x) = \left\| \begin{matrix} E_{\ell_1}x^{s_1} & & & \\ A'_{21}(x) & E_{\ell_2}x^{s_2} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ A'_{h1}(x) & A'_{h2}(x) & \cdots & E_{\ell_h}x^{s_h} \end{matrix} \right\|,$$

$$R'(x) = \left\| R'_{ij}(x) \right\|_1^h \in GL(n, F[x]).$$

Виходячи зі співвідношення (7), аналогічно до рівності (6) можемо записати

$$\operatorname{codeg}\left(\left\| S_{h-k,h-k} \ \ \ldots \ \ S_{h-k,h} \right\| \left\| \begin{matrix} A_{h-k,1}(x) & \ldots & A_{h-k,h-k-1}(x) & E_{\ell_{h-k}}x^{s_{h-k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{h1}(x) & \ldots & A_{h,h-k-1}(x) & A_{h,h-k}(x) \end{matrix} \right\| \right) =$$

$$= \operatorname{codeg}\left\| A'_{h-k,1}(x) \ \ \ldots \ \ A'_{h-k,h-k-1}(x) \ \ E_{\ell_{h-k}}x^{s_{h-k}} \right\|. \qquad (8)$$

З рівностей (6) і (8) випливає, що в матриці $A'(x)$, так само, як і в матриці $B(x)$, молодший степінь $(h-k)$-го блочного рядка є максимально можливим. При цьому молодші степені останніх k блочних рядків матриці $A'(x)$ залишаться такими, як у $A(x)$. ♦

Звернемо увагу, що напівскалярно еквівалентні матриці вигляду (1) мають одні й ті самі найбільші спільні дільники кожного блочного стовпця. Ними є інваріантні множники $x^{s_1},\ldots,x^{s_h}$. У цьому контексті цікавим буде наступний наслідок.

Наслідок 2. *Напівскалярно еквівалентні матриці вигляду* (1) *з максимально можливими молодшими степенями блочних рядків, існування яких стверджує теорема* 2, *мають одні й ті ж найбільші спільні дільники елементів кожного блочного рядка і, значить, одне й те ж розміщення блочних рядків, що містять лише один ненульовий* (*діагональний*) *блок.*

3. Інваріанти многочленної матриці відносно напівскалярної еквівалентності: випадок відсутності однакових інваріантних множників. Розглянемо детальніше випадок, коли вихідна матриця $N(x)$ не містить однакових інваріантних множників. Тоді матриця $A(x)$ із (1) буде мати вигляд

$$A(x)=\begin{Vmatrix} x^{s_1} & & & \\ a_{21}(x) & x^{s_2} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & x^{s_n}\end{Vmatrix}, \tag{9}$$

де $\deg a_{uv}(x)<s_u$, $\operatorname{codeg} a_{uv}(x)>s_v$, $s_{u-1}<s_u$, $u=2,\ldots,n$, $v<u$. Припустимо, що в цій матриці згідно з теоремою 2 молодші степені рядків є максимально можливими.

Елемент $a_{uv}(x)\neq 0$ назвемо *ключовим елементом* u*-го рядка* матриці (9), якщо $\operatorname{codeg} a_{uv}(x)=\operatorname{codeg}\begin{Vmatrix} a_{u1}(x) & \ldots & a_{u,\,u-1}(x)\end{Vmatrix}$ і $\operatorname{codeg} a_{uv}(x)<$ $<\operatorname{codeg} a_{uw}(x)$ для $w>v$ ($2\le u\le n$, $v<u$). У випадку рівності нулеві всіх недіагональних елементів u-го рядка ключовим елементом назвемо діагональний елемент x^{s_u} цього рядка.

Твердження 2. *У класі* $\{CA(x)Q(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць вигляду* (9) *з максимально можливими молодшими степенями рядків існує матриця, в якій ключові елементи рядків однакових молодших степенів розміщені в різних стовпцях.*

Д о в е д е н н я. Нехай в матриці (9) ключові елементи $a_{kq}(x)$ і $a_{pq}(x)$, $k<p$, відповідно k-го і p-го рядків належать одному q-му стовпцю, мають однакові молодші степені і a_{kq0}, a_{pq0} – молодші їх коефіцієнти. Побудуємо матрицю S, яка відрізняється від одиничної E_n тільки елементом $s_{kp}\neq 0$ в позиції (k,p), який задовольняє умову $a_{kq0}+s_{kp}a_{pq0}=0$. За допомогою цієї матриці, на основі твердження 2 з [8], від матриці $A(x)$ можна перейти до напівскалярно еквівалентної матриці $B(x)$ вигляду

$$B(x)=\begin{Vmatrix} x^{s_1} & & & \\ b_{21}(x) & x^{s_2} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \cdots & x^{s_n}\end{Vmatrix}, \tag{10}$$

де $\deg b_{uv}(x) < s_u$, $\operatorname{codeg} b_{uv}(x) > s_v$, $s_{u-1} < s_u$, $u = 2,\dots,n$, $v < u$. При цьому для деякої оборотної матриці $R(x)$ повинна виконуватися рівність (3), яку запишемо у вигляді

$$S^{-1}B(x) = A(x)R^{-1}(x). \tag{11}$$

Покажемо, що в отриманій матриці $B(x)$ молодші степені рядків не змінятьcя порівняно з $A(x)$ і, більше того, залишаться попередніми також позиції ключових елементів рядків, крім k-го рядка. Ключовий елемент k-го рядка матриці $B(x)$ буде розміщений лівіше від q-ї позиції цього рядка.

Якщо позначити $R^{-1}(x) = \left\| t_{ij}(x) \right\|_1^n$, то з (11) запишемо

$$b_{uv}(x) = a_{u1}(x)t_{1v}(x) + \ldots + a_{u,u-1}(x)t_{u-1,v}(x) + x^{s_u} t_{uv}(x),$$
$$v = 1,\dots,n-1, \qquad u \neq k, \tag{12}$$

$$b_{kw}(x) - s_{kp}b_{pw}(x) = a_{k1}(x)t_{1w}(x) + \ldots + a_{k,k-1}(x)t_{k-1,w}(x) + x^{s_k} t_{kw}(x),$$
$$w = 1,\dots,k-1. \tag{13}$$

З рівностей (12) і (13) випливає, що

$$\operatorname{codeg} b_{uv}(x) \geq \operatorname{codeg} \left\| a_{u1}(x) \quad \ldots \quad a_{u,u-1}(x) \right\|, \quad u = 2,\dots,n, \quad v < u.$$

Оскільки молодші степені рядків матриці $A(x)$ є максимально можливими, то насправді

$$\operatorname{codeg} \left\| b_{u1}(x) \quad \ldots \quad b_{u,u-1}(x) \right\| = \operatorname{codeg} \left\| a_{u1}(x) \quad \ldots \quad a_{u,u-1}(x) \right\|,$$
$$u = 2,\dots,n.$$

Із твердження 1 випливає, що $\operatorname{codeg} t_{vu}(x) > 0$ для $v = 1,\dots,n-1$, $v < u$, і, отже, $\operatorname{codeg} t_{vv}(x) = 0$. Тому, якщо $a_{uh}(x)$ − ключовий елемент u-го рядка матриці $A(x)$, то $b_{uh}(x)$ − ключовий елемент u-го рядка матриці $B(x)$ для $u \neq k$. Крім того, молодші коефіцієнти всіх відповідних ключових елементів рядків, за винятком k-х рядків, у матрицях $A(x)$ і $B(x)$ співпадають. Враховуючи це, а також співвідношення $a_{kq0} + s_{kp}a_{pq0} = 0$, із рівностей (13) знаходимо, що для всіх $\ell \geq q$ маємо $\operatorname{codeg} b_{k\ell}(x) > \operatorname{codeg} a_{kq}(x)$. Отже, ключовий елемент в k-му рядку матриці $B(x)$ займає місце лівіше від позиції (k, q).

Таким чином, якщо почати з крайнього правого стовпця матриці $A(x)$, що містить ключові елементи однакових молодших степенів, і рухатися стовпцями вліво, багаторазово застосовуючи вказаний вище прийом, то через скінченне число кроків можна отримати матрицю, в якій ключові елементи однакових молодших степенів будуть розміщені в різних стовпцях. ♦

Будемо говорити, що k-й і p-й рядки $\overline{a}_k(x)$ і $\overline{a}_p(x)$ матриці, що задовольняє умови твердження 2, *утворюють інверсію*, якщо при $k < p$ маємо $\operatorname{codeg} \overline{a}_k(x) > \operatorname{codeg} \overline{a}_p(x)$ або $\operatorname{codeg} \overline{a}_k(x) = \operatorname{codeg} \overline{a}_p(x)$, але ключові елементи $a_{kv}(x)$ і $a_{pw}(x)$ цих рядків розміщені так, що $v < w$.

Твердження 3. *У напівскалярно еквівалентних матрицях $A(x)$ і $B(x)$, які задовольняють умови твердження 2, позиції ключових елементів відповідних рядків і їх молодші степені співпадають. Матриця перетворення S верхньотрикутної форми у співвідношенні* (3) *має нульовий елемент в позиції (k, p), якщо k-й і p-й рядки матриць $A(x)$ і $B(x)$ утворюють інверсію.*

Д о в е д е н н я. Інваріантність молодших степенів ключових елементів не викликає сумніву, оскільки вони дорівнюють молодшим степеням відповідних рядків, які є максимально можливими.

Нехай матриці $A(x)$ і $B(x)$ мають вигляд (9) і (10) відповідно, а елемент $b_{nh_n}(x)$ є ключовим в n-му рядку матриці $B(x)$. Із рівності (3), в якій матриця перетворення $S = \| s_{ij} \|_1^n$, згідно з твердженням 1, має верхньотрикутну форму ($s_{uv} = 0$, $u > v$), а $R(x) = \| r_{ij}(x) \|_1^n$, запишемо

$$s_{nn}a_{nq}(x) = b_{n1}(x)r_{1q}(x) + \ldots + b_{n,n-1}(x)r_{n-1,q}(x) + x^{s_n}r_{nq}(x),$$
$$q = 1, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Оскільки h_n-й доданок для $q = h_n < n$ у правій частині рівності (14) є молодшого степеня $\operatorname{codeg} b_{nh_n}(x)$, а молодші степені всіх інших доданків перевищують $\operatorname{codeg} b_{nh_n}(x)$, то $\operatorname{codeg} a_{nh_n}(x) = \operatorname{codeg} b_{nh_n}(x)$. З огляду на те, що для всіх $q > h_n$ молодший степінь правої частини рівності (14) перевищує $\operatorname{codeg} b_{nh_n}(x)$, маємо нерівність $\operatorname{codeg} a_{nh_n}(x) < \operatorname{codeg} a_{nq}(x)$. Отже, $a_{nh_n}(x)$ − ключовий елемент останнього рядка матриці $A(x)$, якщо $h_n < n$. Для випадку $h_n = n$ твердження випливає з наслідку 2.

Припустимо за індукцією, що в останніх m, $1 \le m < n-1$, рядках матриць $A(x)$ і $B(x)$ ключові елементи займають однакові позиції. Нехай також в матриці S маємо $s_{kp} = 0$ при $n - m < k < p \le n$, якщо k-й і p-й рядки матриці $A(x)$ (і, отже, $B(x)$) утворюють інверсію. Тоді на основі рівності (3) можемо записати

$$s_{n-m,n-m}a_{n-m,q}(x) + \ldots + s_{n-m,n}a_{nq}(x) = b_{n-m,1}(x)r_{1q}(x) + \ldots +$$
$$+ b_{n-m,n-m-1}(x)r_{n-m-1,q}(x) + x^{s_{n-m}}r_{n-m,q}(x),$$
$$q = 1, \ldots, n-m-1. \tag{15}$$

Якщо $(n-m)$-й рядок матриці $B(x)$ (чи $A(x)$) не утворює інверсію з кожним із m останніх її рядків і $b_{n-m,h_{n-m}}(x)$ − ключовий його елемент, $h_{n-m} < n-m$, то з рівностей (15) для $q = h_{n-m}$ випливає, що

$$\operatorname{codeg} a_{n-m,h_{n-m}}(x) = \operatorname{codeg} b_{n-m,h_{n-m}}(x).$$

Із рівностей (15) для всіх $q > h_{n-m}$ випливає, що

$$\operatorname{codeg} a_{n-m,h_{n-m}}(x) < \operatorname{codeg} a_{n-m,q}(x).$$

Отже, $a_{n-m,h_{n-m}}(x)$ − ключовий елемент $(n-m)$-го рядка матриці $A(x)$. Для випадку $h_{n-m} = n-m$ твердження випливає з наслідку 2.

Припустимо тепер, що $(n-m)$-й рядок матриці $A(x)$ утворює інверсію з деяким із m останніх її рядків. Нехай $((i_1, j_1), \ldots, (i_\ell, j_\ell)$ − послідовність позицій ключових елементів у всіх таких рядках, впорядкована за зростанням молодших степенів, а у випадку їх рівності − за спаданням других компонент ($n - m < i_1, \ldots, i_\ell \le n$, $1 \le j_1, \ldots, j_\ell \le n-m$). Якщо в (15) почергово покладати $q = j_1$, …, $q = j_\ell$, то можна отримати $s_{n-m,i_1} = \ldots = s_{n-m,i_\ell} = 0$.

Якщо $b_{n-m,h_{n-m}}(x)$ – ключовий елемент $(n-m)$-го рядка матриці $B(x)$, то із (15), покладаючи $q = h_{n-m}$, встановлюємо, що

$$\operatorname{codeg} a_{n-m,h_{n-m}}(x) = \operatorname{codeg} b_{n-m,h_{n-m}}(x),$$

а для всіх $q > h_{n-m}$ із (15) випливає, що

$$\operatorname{codeg} a_{n-m,h_{n-m}}(x) < \operatorname{codeg} a_{n-m,q}(x).$$

Таким чином, і в цьому випадку $a_{n-m,h_{n-m}}(x)$ – ключовий елемент $(n-m)$-го рядка матриці $A(x)$.

Для випадку $h_{n-m} = n-m$ доведення випливає з наслідку 2. ♦

Твердження 4. *Нехай матриця $A(x)$ задовольняє умови твердження 2 і S – довільна верхньотрикутна того ж порядку неособлива матриця над полем F з нульовими елементами у всіх позиціях (k, p), якщо k-й і p-й рядки матриці $A(x)$ утворюють інверсію. Тоді добуток $SA(x)$ є правоеквівалентним до матриці, яка задовольняє умови твердження 2.*

Д о в е д е н н я. Права еквівалентність добутку $SA(x)$ до деякої матриці $B(x)$ вигляду (10) гарантована твердженням 2 з [8]. Якщо $\| 0 \ \ \ldots \ \ 0 \ \ s_{uu} \ \ \ldots \ \ s_{un} \|$, $\bar{a}_u(x)$ і $\bar{b}_u(x)$ є u-ми рядками, $u = 2, \ldots, n$, відповідно матриць S, $A(x)$ і $B(x)$, то для деякої оборотної матриці $R(x)$ повинна виконуватися рівність

$$s_{uu}\bar{a}_u(x) + \ldots + s_{un}\bar{a}_n(x) = \bar{b}_u(x)R(x). \tag{16}$$

Якщо $\operatorname{codeg} \bar{a}_v(x) < \operatorname{codeg} \bar{a}_u(x)$, $u < v$, тоді ліва частина (16) не містить доданка $s_{uv}\bar{a}_v(x)$ $(s_{uv} = 0)$, і, отже, $\operatorname{codeg} \bar{a}_u(x) \le \operatorname{codeg} \bar{b}_u(x)$. Однак строга нерівність неможлива з огляду на максимальність молодшого степеня рядка $\bar{a}_u(x)$. Тому насправді виконується рівність $\operatorname{codeg} \bar{a}_u(x) = \operatorname{codeg} \bar{b}_u(x)$.

Із рівності (16) для $u = n$ випливає, що позиції ключових елементів останніх рядків матриць $A(x)$ і $B(x)$ співпадають. Припустимо за індукцією, що в останніх m, $1 \le m < n-1$, рядках цих матриць співпадають позиції відповідних ключових елементів, а в $(n-m)$-х рядках такого збігу немає. Нехай k і p – номери ключових елементів в $(n-m)$-х рядках матриць $A(x)$ і $B(x)$ відповідно, причому $k < p$. Порівнюючи p-ті елементи в лівій і правій частинах рівності (16) при $u = n-m$, дістанемо нерівність їх молодших степенів, що неможливо. Аналогічно можна дістати нерівність молодших степенів k-х елементів рядків у лівій і правій частинах рівності (16) у випадку $k > p$. Тому в $(n-m)$-х рядках матриць $A(x)$ і $B(x)$ ключові елементи займають однакові позиції. ♦

Нагадаємо, що взаємною (або приєднаною) матрицею до квадратної матриці $G = \| g_{ij} \|_1^n$ називають матрицю $G_* = \| G_{ij} \|_1^n$, де G_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента g_{ji} матриці G.

Теорема 3. *У класі $\{CA(x)Q(x)\}$ напівскалярно еквівалентних матриць, які задовольняють умови твердження 2, існує матриця, кожний стовпець взаємної до якої має максимально можливий для цього класу молодший степінь.*

Д о в е д е н н я. Зауважимо спочатку, що перші стовпці взаємних для матриць із класу $\{CA(x)Q(x)\}$, які задовольняють умови твердження 2, мають однакові молодші степені і, таким чином, є максимально можливими. Це нескладно показати, якщо у рівності (3), записаній для довільних двох таких матриць $A(x)$ і $B(x)$, перейти до взаємних матриць і порівняти молодші степені перших стовпців у лівій і правій частинах отриманої рівності. Припустимо за індукцією, що кожен із перших m, $1 \le m < n-1$, стовпців матриці $A_*(x)$ і $(m+1)$-й стовпець взаємної $B_*(x)$ для деякої матриці $B(x)$ із класу $\{CA(x)Q(x)\}$ мають максимально можливі молодші степені. На основі верхньотрикутної матриці S зі співвідношення (3), яке зв'язує матриці $A(x)$ і $B(x)$, побудуємо матрицю S_1 так, що взаємна матриця S_{1*} має однакові з матрицею S_* елементи на головній діагоналі і в $(m+1)$-му стовпці, а всі решта її елементів дорівнюють нулеві. Оскільки матриця S, згідно з твердженням 3, має нульовий елемент в позиції (k, p), $k < p$, якщо k-й і p-й рядки матриці $A(x)$ утворюють інверсію, то таку ж властивість, як нескладно переконатися, має і матриця S_1. Твердження 4 забезпечує існування матриці $A_1(x)$, яка задовольняє умови твердження 2, так що для деякої оборотної матриці $R_1(x)$ запишемо

$$S_1A(x) = A_1(x)R_1(x).$$

Із очевидної рівності

$$A_*(x)S_{1*} = R_{1*}(x)A_{1*}(x),$$

враховуючи вигляд матриці S_{1*} і оборотність матриці $R_{1*}(x)$, випливає, що молодші степені перших m стовпців матриці $A_*(x)$ співпадають з молодшими степенями відповідних стовпців матриці $A_{1*}(x)$. Беручи до уваги рівність

$$A_*(x)S_* = R_*(x)B_*(x),$$

робимо висновок також, що молодші степені $(m+1)$-х стовпців матриць $A_{1*}(x)$ і $B_*(x)$ співпадають. ♦

На перший погляд може здатися, що твердження теореми 3 є тривіальним. Однак наступний приклад показує, що це не так.

Приклад 2. Напівскалярно еквіваленті матриці

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x^5 & 0 \\ x & x^6 & x^7 \end{Vmatrix},$$

$$B(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x^5 & 0 \\ x - x^3 + x^5 & 0 & x^7 \end{Vmatrix}$$

мають максимально можливі молодші степені всіх рядків, але другі стовпці взаємних до цих матриць мають різні молодші степені. ◄

Надалі будемо припускати, що матриця $A(x)$ вигляду (9) задовольняє умови теореми 3, тобто кожен її рядок і кожен стовпець взаємної до неї матриці $A_*(x)$ мають максимально можливі молодші степені. Назвемо елемент $a_{uv*}(x) \ne 0$ $(2 \le u \le n,\ v < u)$ *ключовим елементом* v*-го стовпця взаємної матриці* $A_*(x)$, якщо

$$\operatorname{codeg} a_{uv*}(x) = \operatorname{codeg} \left\| a_{v+1,v*}(x) \quad \ldots \quad a_{nv*}(x) \right\|^{\top}$$

і

$$\operatorname{codeg} a_{uv*}(x) < \operatorname{codeg} a_{wv*}(x)$$

для $w < u$. Тут символ « $\top$ » означає операцію транспонування. У випадку, коли всі піддіагональні елементи деякого стовпця матриці $A_*(x)$ дорівнюють нулеві, ключовим будемо вважати діагональний елемент цього стовпця.

Твердження 5. *Нехай $\{CA(x)Q(x)\}$ − клас напівскалярно еквівалентних матриць, які задовольняють умови теореми 3. У цьому класі існує матриця $B(x)$ така, що кожна пара ключових елементів стовпців матриці $B_*(x)$ однакових молодших степенів не міститься в одному рядку, якщо відповідна (з тими ж номерами) пара рядків матриці $B(x)$ не утворюють інверсію.*

Д о в е д е н н я достатньо провести для довільної одної пари ключових елементів стовпців однакових молодших степенів. Нехай в матриці $A_*(x)$ ключові елементи $a_{qk*}(x)$, $a_{qp*}(x)$ відповідно k-го і p-го стовпців, $k < p$, мають однакові молодші степені та розміщені в одному q-му рядку. Позначимо через a_{qk0} і a_{qp0} молодші коефіцієнти цих елементів і побудуємо матрицю S_2 так, що взаємна S_{2*} відрізняється від одиничної E_n лише одним ненульовим елементом s_{kp*}, який задовольняє таке співвідношення: $a_{qp0} + s_{kp*}a_{qk0} = 0$. Згідно з твердженням 4, для $A(x)$ за допомогою матриці S_2 і деякої оборотної $R_2(x)$ можна побудувати матрицю $A_2(x)$, яка задовольняє умови твердження 2:

$$S_2 A(x) = A_2(x) R_2(x)\,.$$

При цьому, на основі твердження 3, позиції ключових елементів рядків матриці $A_2(x)$ та їх молодші степені не зміняться порівняно з матрицею $A(x)$. Якщо в цій рівності перейти до взаємних матриць, то неважко показати, що в матриці $A_{2*}(x)$ залишаться попередніми молодші степені ключових елементів усіх стовпців. Не зазнають змін також і позиції всіх ключових елементів стовпців цієї матриці, за винятком позиції ключового елемента p-го стовпця. У матриці $A_{2*}(x)$ цей елемент займе місце нижче від q-го рядка. ♦

Нехай матриця $A(x)$ вигляду (9) задовольняє умови твердження 5. Це означає, що її рядки мають максимально можливі молодші степені та ніякі два ключові елементи рядків однакових молодших степенів не містяться в одному стовпці. Крім того, стовпці взаємної матриці $A_*(x)$ мають максимально можливі молодші степені та ключові елементи довільних двох стовпців однакових молодших степенів розміщені в різних рядках, якщо відповідні рядки матриці $A(x)$ не утворюють інверсію.

Будемо говорити, що k-й і p-й стовпці матриці $A_*(x)$ *утворюють інверсію*, якщо при $k < p$ молодший степінь k-го стовпця менший від молодшого степеня p-го стовпця або ці степені рівні, але ключовий елемент k-го стовпця розміщений вище від ключового елемента p-го стовпця.

Твердження 6. *Нехай матриці $A(x)$ і $B(x)$, які задовольняють умови твердження 5, напівскалярно еквівалентні. Тоді в цих матрицях та у* *взаємних до них* $A_*(x)$ *і* $B_*(x)$ *співпадають позиції і молодші степені відповідних ключових елементів рядків і стовпців. Перетворювальна верхньотрикутна матриця* S *у співвідношенні* (3) *має нульовий елемент в позиції* (k, p), $k < p$, *якщо* k*-й і* p*-й рядки матриці* $A(x)$ *або* k*-й і* p*-й стовпці матриці* $A_*(x)$ *утворюють інверсію.*

Д о в е д е н н я. Частина твердження, яка стосується ключових елементів рядків матриць $A(x)$ і $B(x)$, обґрунтована у твердженні 3. Інша частина доводиться аналогічно. ♦

Твердження 7. *Нехай матриця* $A(x)$ *задовольняє умови твердження* 5 *і* S *− верхньотрикутна неособлива матриця того ж порядку над полем* F *з нульовими елементами у всіх позиціях* (k, p), *якщо* k*-й і* p*-й рядки матриці* $A(x)$ *або* k*-й і* p*-й стовпці матриці* $A_*(x)$ *утворюють інверсію. Тоді добуток* $SA(x)$ *є правоеквівалентним до матриці, яка задовольняє умови твердження* 5.

Д о в е д е н н я. Зважаючи на твердження 4, добуток $SA(x)$ є правоеквівалентним до матриці $B(x)$, яка задовольняє умови твердження 2. Аналогічно до доведення твердження 4 можна показати, що матриця $B(x)$ задовольняє умови твердження 5. ♦

Твердження 8. *Множина матриць* S, *вказаної у твердженні* 7 *будови, утворює підгрупу в мультиплікативній групі неособливих верхньотрикутних матриць фіксованого порядку.*

Д о в е д е н н я. Нехай M − множина матриць S порядку n вказаної в твердженні 7 будови. Якщо $S_1, S_2 \in M$, то за твердженням 7

$$S_1A(x) = B_1(x)R_1(x), \tag{17}$$

де $B_1(x)$ − матриця, яка задовольняє умови твердження 5, $R_1(x) \in GL(n, F[x])$. Множенням зліва обох частин рівності (17) на S_2 дістанемо

$$S_2S_1A(x) = S_2B_1(x)R_1(x). \tag{18}$$

Оскільки, за твердженням 6, позиції та молодші степені ключових елементів рядків матриць $A(x)$ і $B_1(x)$, а також позиції та молодші степені ключових елементів стовпців матриць $A_*(x)$ і $B_{1*}(x)$ співпадають, то до добутку $S_2B_1(x)$ можна застосувати твердження 7. Згідно з ним маємо

$$S_2B_1(x) = B_2(x)R_2(x), \tag{19}$$

де матриця $B_2(x)$ задовольняє умови твердження 5, $R_2(x) \in GL(n, F[x])$. Підстановкою (19) у (18) будемо мати

$$S_2S_1A(x) = B_2(x)R_2(x)R_1(x).$$

Оскільки $R_2(x)R_1(x) \in GL(n, F[x])$, то, за твердженням 6, маємо $S_2S_1 \in M$. Зрозуміло, що одинична матриця E_n належить до M і, якщо записати співвідношення (17) у вигляді

$$S_1^{-1}B_1(x) = A(x)R_1^{-1}(x),$$

то, згідно з твердженням 6, маємо $S_1^{-1} \in M$. ♦

Таким чином, кожному класу $\{CA(x)Q(x)\}$ напівскалярно еквівалентних матриць відповідає деяка підгрупа мультиплікативної групи неособливих матриць над полем F верхніх трикутних матриць того самого порядку. Крім того, різні підгрупи відповідають матрицям, які не є напівскалярно еквівалентними.

Як випливає із твердження 6, позиції ключових елементів матриць $A(x)$, $A_*(x)$ та молодші їх степені є інваріантами вихідної матриці $N(x)$ стосовно напівскалярної еквівалентності. Однак система цих інваріантів не є повною, оскільки матриця $A(x)$ визначається, взагалі кажучи, неоднозначно. І ця неоднозначність є тим більшою, чим менше інверсій утворюють рядки та стовпці матриць $A(x)$ і $A_*(x)$. Сумарне число інверсій в цих матрицях є мірою «канонічності» матриці $A(x)$. Цікаво виділити такий клас матриць, в якому матриця $A(x)$ буде канонічною або майже канонічною. Для цього зупинимося детальніше на ситуації, коли в матриці $A(x)$ вигляду (9), яка задовольняє умови твердження 5, кожна пара рядків або у взаємної матриці $A_*(x)$ відповідна пара стовпців утворюють інверсію. Тоді кожен ненульовий елемент першого стовпця матриці $A(x)$ є ключовим елементом відповідного рядка. З молодших степенів елементів $a_{i+1,1}(x)$, $i = 1,\ldots,n-1$, першого стовпця матриці $A(x)$ та степенів s_{i+1} її діагональних елементів складемо дві послідовності:

$$p_1, \ldots, p_{n-1}, \tag{20}$$

$$q_1, \ldots, q_{n-1}, \tag{21}$$

де $p_1 = \operatorname{codeg} a_{i+1,i}(x) + \operatorname{codeg} a_{n1}(x) - s_1$, $q_i = s_{i+1}$. Послідовність (21) є числовою. Перший член послідовності (20), можливо, є символом $+\infty$. Це буде тоді, коли в матриці $A(x)$ елемент $a_{21}(x) \equiv 0$.

Теорема 4. *Якщо кожен член послідовності* (20) *є не меншим від відповідного члена послідовності* (21), *то матриця* $A(x)$ *визначається з точністю до діагональної подібності. Якщо в послідовності* (20) *деякі члени менші, ніж відповідні члени послідовності* (21), *і* m *— найменший номер такого члена* ($p_m < q_m$), *то матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна до матриці* $B(x)$, *в якій в* $(m+1)$*-му елементі першого стовпця немає монома степеня* p_m. *Матриця* $B(x)$ *визначається з точністю до діагональної подібності.*

Д о в е д е н н я. Припустимо спочатку, що в напівскалярно еквівалентних матрицях $A(x)$ і $B(x)$ вигляду (9) і (10) кожен член послідовності (20) не менший від відповідного члена послідовності (21). Ліва перетворювальна матриця S у співвідношенні (3), згідно з твердженням, 6 має вигляд

$$S = \begin{Vmatrix} s_{11} & 0 & \ldots & 0 & s_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & s_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Тому, порівнюючи елементи в позиціях $(2,1)$ у лівій та правій частинах рівності (3), запишемо

$$s_{22}a_{21}(x) - s_{11}b_{21}(x) - s_{1n}a_{n1}(x)\tilde{b}_{21}(x) \equiv 0 \pmod{x^{s_2}},$$

де $x^{s_1}\tilde{b}_{21}(x) = b_{21}(x)$. Звідси випливає, що $s_{22}a_{21}(x) = s_{11}b_{21}(x)$. Зіставляючи далі елементи в позиціях $(3,1)$, рекурентно дістаємо, що $s_{33}a_{31}(x) = s_{11}b_{21}(x)$. Для елементів в позиціях $(3,2)$ будемо мати

$$s_{33}a_{32}(x) - s_{22}b_{32}(x) + s_{1n}a_{n2}(x)\begin{Vmatrix} \tilde{b}_{21}(x) & 1 \\ \tilde{b}_{31}(x) & \tilde{b}_{32}(x) \end{Vmatrix} \equiv 0 \pmod{x^{s_3}},$$

де $x^{s_1}\tilde{b}_{31}(x) = b_{31}(x)$, $x^{s_2}\tilde{b}_{32}(x) = b_{32}(x)$. Із цієї конгруенції рекурентно дістаємо, що $s_{33}a_{32}(x) = s_{22}b_{32}(x)$ і т.д. Отже,

$$\operatorname{diag}(s_{11},\ldots,s_{nn})A(x) = B(x)\operatorname{diag}(s_{11},\ldots,s_{nn}).$$

Якщо ж у послідовностях (20), (21) $p_\ell \ge q_\ell$, $\ell = 1,\ldots,m-1$, $m < n$, і $p_m < q_m$, то побудуємо матрицю

$$S_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & s_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

в якій елемент s_{12} задовольняє співвідношення

$$s_{1n}a_{m+1,1r}a_{n1t} - a_{m+1,1p_m} = 0,$$

де $a_{m+1,1r}$, a_{n1t} – молодші коефіцієнти елементів $a_{m+1,1}(x)$, $a_{n1}(x)$ відповідно і $a_{m+1,1p_m}$ – коефіцієнт монома степеня p_m елемента $a_{m+1,1}(x)$ матриці $A(x)$. За твердженням 7, добуток $S_0A(x)$ є правоеквівалентним до матриці $B(x)$, яка задовольняє умови твердження 5. Без труднощів можна переконатися, що в матриці $B(x)$ елемент у позиції $(m+1, 1)$ не містить монома степеня p_m.

Нехай m – мінімальний індекс, для якого порушується нерівність $p_\ell \ge q_\ell$ і в напівскалярно еквівалентних матрицях $A(x)$ і $B(x)$ $(m+1)$-ші елементи перших стовпців не містять монома степеня p_m. Згідно з твердженням 6, всі недіагональні елементи матриці S у співвідношенні (3), крім елемента в позиції $(1, n)$, дорівнюють нулеві. Тоді із рівності (3), порівнюючи елементи в позиціях $(m+1, 1)$, дістанемо, що матриця S насправді є діагональною. Нескладні міркування приводять до рівності $S = R(x)$. Тому матриці $A(x)$ і $B(x)$ діагонально подібні.

Теорему доведено. ♦

1. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
   Те саме: *Bondarenko V. M., Drozd Yu. A.* Representation type of finite groups // J. Soviet Math. – 1982. – **20**, No. 6. – P. 2515–2528.
2. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
5. *Петричкович В. М.* Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.
   Те саме: *Petrichkovich V. M.* Semiscalar equivalence and the factorization of polynomial matrices // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, No. 5. – P. 570–574.

6. *Шаваровский Б. З.* О некоторых «ручных» и «диких» аспектах проблемы полускалярной эквивалентности многочленных матриц // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 1. – С. 119–132.
Те саме: *Shavarovskii B. Z.* On some «tame» and «wild» aspects of the problem of semiscalar equivalence of polynomial matrices // Math. Notes. – 2004. – **76**, No. 1-2. – P. 111–123.
7. *Шаваровский Б. З.* Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Мат. заметки. – 1998. – **64**, № 5. – С. 769–782.
Те саме: *Shavarovskii B. Z.* Reduction of matrices by means of equivalent transformations and similarity transformations // Math. Notes. – 1998. – **64**, No. 5. – P. 663–673.
8. *Шаваровський Б. З.* Канонічна форма многочленних матриць з усіма рівними елементарними дільниками // Укр. мат. журн. – 2012. – **64,** № 2. – С. 253–267.
Те саме: *Shavarovskii B. Z.* Canonical form of polynomial matrices with all identical elementary divisors // Ukr. Math. J. – 2012. – **64**, No. 2. – P. 282–297.
9. *Baratchart L.* Un theoreme de factorisation et son application a la representation des systemes cuclique causaux // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. Math. – 1982. – **295**, No. 3. – P. 223–226.
10. *Belitskii G., Bershadsky M., Sergeichuk V. V.* Normal form of m-by-n-by-2 matrices for equivalence // J. Algebra. – 2008. – **319.** – P. 2259–2270.
11. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra Appl. – 1999. – **291**. – P. 167–184.
12. *Sergeichuk V. V.* Canonical matrices for linear matrix problems // Linear Algebra Appl. – 2000. – **317**. – P. 53–102.

О ТРЕУГОЛЬНОЙ ФОРМЕ МНОГОЧЛЕННОЙ МАТРИЦЫ И ЕЕ ИНВАРИАНТАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУСКАЛЯРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Исследуется структура многочленных матриц в связи с их сводимостью полускалярно эквивалентными преобразованиями к более простым формам. Получена система инвариантов для одного класса матриц относительно полускалярной эквивалентности. На этой основе установлена почти каноническая форма матрицы относительно полускалярной эквивалентности.

ON A TRIANGULAR FORM OF POLYNOMIAL MATRIX AND ITS INVARIANTS WITH RESPECT TO SEMISCALAR EQUIVALENCE

The structure of polynomial matrices in connection with their reducibility by semiscalar-equivalent transformations to simpler forms is considered. A system of invariants for one class of matrices with respect to semiscalar equivalence is obtained. On this base, a near canonical form with respect to semiscalar equivalence is presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.02.12