

**ВПЛИВ БІЧНОЇ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ  
МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ НА КОНТАКТ БЕРЕГІВ**

*В умовах плоскої деформації методом Вінера – Гопфа виконано розрахунок маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини за умови утворення в її околі бічної зони передруйнування. В області контакту передбачається сухе тертя берегів за законом Кулона. Визначено розміри контактної зони, знайдено вираз для контактного напруження та рівняння для розрахунку показника сингулярності напружень біля вершини тріщини. Досліджено вплив навантаження, коефіцієнта тертя і пружних характеристик з'єднаних матеріалів на розміри контактної зони. Показано, що при наявності зони передруйнування довжина контактної зони стає залежною не лише від конфігурації, але й від величини зовнішнього навантаження.*

Дослідження класичної моделі міжфазної тріщини [22, 23, 25, 26] виявили протиріччя між вихідним припущенням про розкриття берегів тріщини по всій її довжині і передбачуванім у кінцевому розв'язку їх частковим перекриттям. Для усунення цієї суперечності М. Сомніноу запропонував модель, у якій вводиться область контакту берегів біля вершини тріщини [2, 12, 19–21, 24]. Розрахунки параметрів області контакту показали, що її довжина визначається конфігурацією зовнішнього навантаження (співвідношенням дотичного і нормального напружень) і практично не залежить від його абсолютної величини. При цьому концентрація напружень у вершині тріщини призводить до утворення в її околі зони передруйнування.

У рамках комплексної моделі зони передруйнування [6, 7], у якій враховано наявність контакту берегів міжфазної тріщини, встановлено [3], що в той час, як довжина контактної зони зі збільшенням величини зовнішнього навантаження при збереженні його конфігурації залишається сталою, розміри зони передруйнування зростають. Одночасно змінюється напружено-деформований стан в околі вершини тріщини, що, в свою чергу, повинно впливати на розміри контактної зони. При подальшому збільшенні навантаження довжина зони передруйнування може значно перевищити довжину контактної зони. Метою роботи є розрахунок параметрів маломасштабної контактної зони на цьому етапі та дослідження їх залежності від навантаження. Зона передруйнування відповідно до гіпотези локалізації [10, 13, 14] моделюється бічною лінією розриву нормального переміщення, яка виходить з вершини тріщини у менш тріщиностійкий матеріал під певним кутом до плоскої межі поділу матеріалів, який визначається згідно з [4, 5] незалежно від наступного розрахунку контактної зони.

**Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок області фрикційного контакту берегів міжфазної тріщини, яка лежить на прямолінійній межі поділу двох однорідних ізотропних пружних матеріалів з модулями Юнга  $E_1$ ,  $E_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ . Контактна зона моделюється розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя Кулона. На розрізі передбачається стискувальне нормальне напруження і допускається стрибок лише дотичної складової переміщення. Довжина контактної зони і контактне напруження визначаються в ході розв'язання задачі.

З огляду на концентрацію напружень біля вершини тріщини передбачається існування вузької бічної зони передруйнування у матеріалі з пружними сталими  $E_1$ ,  $\nu_1$ , який припускаємо менш тріщиностійким. Відповідно до моделі Леонова – Панасюка [10, 13] зону передруйнування подамо прямою лінією розриву нормального переміщення, що виходить з вер-

щини тріщини під кутом  $\alpha$  до межі поділу матеріалів. На лінії розриву нормальне напруження дорівнює опору відриву першого матеріалу  $\sigma_1$ .

У цій роботі дослідимо випадок, коли довжина контактної зони  $s$  є значно меншою і від довжини тріщини  $L$ , і від довжини зони передруйнування  $\ell$  та всіх інших суттєвих розмірів тіла. Це дає змогу розглядати тіло як кусково-однорідну площину з напівнескінченим розрізом на межі поділу, частина берегів якого, прилегла до вершини, перебуває у контакті з тертям, а з вершини виходить напівнескінченна лінія розриву (рис. 1). На нескінченності реалізується асимптотика, яка є розв'язком аналогічної задачі без зони контакту [4, 5]. В результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

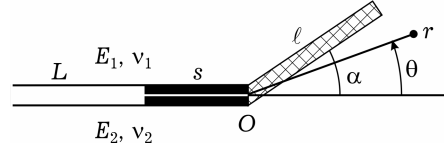


Рис. 1

$$\theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0,$$

$$\theta = \alpha: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_1, \quad (1)$$

$$\theta = \pm \pi, \quad r > s: \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0,$$

$$\theta = \pm \pi, \quad r < s: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu \sigma_\theta, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\theta = \pm \pi, \quad r \rightarrow \infty: \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \sigma_1 \left\{ C_0 + \sum_i C_i r^{\lambda_i} \right\}, \quad (3)$$

$\langle f \rangle$  – стрибок величини  $f$ ;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між берегами тріщини;  $C_i$  – сталі, визначені з розв'язку задачі [4, 5]:

$$C_0 = \frac{\pi u_0}{D_1'(-1)}, \quad C_i = \frac{\sin \lambda_i \pi}{D_1'(-1-\lambda_i)} \frac{4(1+\lambda_i)u(\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)}{\sigma_1 \lambda_i \ell^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-1-\lambda_i)} \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left[ \frac{1-2i\omega}{1+2i\omega} \frac{F(\alpha) \ell^{-0.5+i\omega}}{1-2i\omega+2\lambda_i} \frac{\mathcal{K}^+(-0.5-i\omega)}{G^+(-0.5-i\omega)} \right],$$

$$u_0(p) = (e + x_1 + 1 + ex_2)^2,$$

$$u(\lambda) = (e + x_1)^2 \cos \lambda(\pi - \alpha) + 2(e + x_1)(1 + ex_2) \times$$

$$\times [\lambda \sin \alpha \sin(\lambda(\pi + \alpha) + \alpha) + \cos \lambda(\pi + \alpha)] -$$

$$- (1 + ex_2)^2 [2\lambda \sin \alpha \sin(\lambda(\pi - \alpha) - \alpha) - \cos \lambda(\pi - \alpha)],$$

$$G^+(p) = \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right], \quad \operatorname{Re} p < 0, \quad G(p) = -\frac{D_1(p) \cos p\pi}{D_0(p) \sin^2 p\pi},$$

$$D_0(p) = (e + x_1)^2 + (1 + ex_2)^2 + 2(e + x_1)(1 + ex_2) \cos 2p\pi,$$

$$D_1(p) = (1 + ex_2)^2 \Delta_1(p) - 2(1-e)(1 + ex_2) \Delta_2(p) + 2(e + x_1)(1 +$$

$$+ ex_2) \Delta_3(p) - 2(1-e)(e + x_1) \Delta_4(p) - (e + x_1)^2 \Delta_5(p),$$

$$\Delta_1(p) = 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) -$$

$$- 2 \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(3\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \cos p(2\pi - \alpha) \sin p(\pi - \alpha) + \\ + \cos p\pi \sin^2 p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi + 2\alpha) - p \sin 2\alpha \sin p\alpha \cos p(\pi + \alpha) - \\ - \sin p(\pi - \alpha) [\sin p(2\pi + \alpha) - \sin p\pi \cos p(\pi - \alpha)],$$

$$\Delta_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \cos p\alpha \sin p(\pi - \alpha) + \\ + \cos p\pi \sin^2 p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_5(p) = \sin p\pi [\sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha],$$

$$\mathcal{K}^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(0.5-p)},$$

$$F(\alpha) = -ie' KL^{-i\omega} F_1(\alpha), \quad e' = \frac{\sqrt{(e+x_1)(1+ex_2)}}{2\sqrt{2\pi} [(e+x_1)^2 - (1+ex_2)^2]},$$

$$F_1(\alpha) = -[a_1 \sin(\lambda+2)\alpha + a_2 \sin \lambda\alpha + a_3 \cos(\lambda+2)\alpha + \\ + a_4 \cos \lambda\alpha]_{\lambda=-0.5+i\omega},$$

$$a_1 = \frac{e+x_1}{2} - 1 - ex_2 + \left(e+x_1 - \frac{1+ex_2}{2}\right) \operatorname{ch} 2\pi\omega + \\ + i\omega [e+x_1 - (1+ex_2) \operatorname{ch} 2\pi\omega],$$

$$a_2 = \left(\frac{3}{2} + i\omega\right) [(1+ex_2) \operatorname{ch} 2\pi\omega - e - x_1],$$

$$a_3 = -\omega(1+ex_2) \operatorname{sh} 2\pi\omega - i \left(e+x_1 - \frac{1+ex_2}{2}\right) \operatorname{sh} 2\pi\omega,$$

$$a_4 = \left(\omega - \frac{3i}{2}\right) (1+ex_2) \operatorname{sh} 2\pi\omega,$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \beta = \frac{(1+ex_2) - (e+x_1)}{(1+ex_2) + (e+x_1)},$$

$$e = \frac{1+v_2}{1+v_1} \frac{E_1}{E_2}, \quad E_1 < E_2, \quad x_{1(2)} = 3 - 4v_{1(2)}.$$

Тут  $K = K_I + iK_{II}$  – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень, який характеризує величину і конфігурацію зовнішнього навантаження [25] і який вважаємо заданим за умовою задачі;  $D'_1(p) = \partial D_1(p)/\partial p$ ;  $\lambda_i$  – корені рівняння  $D_1(-1-x) = 0$  зі смуги  $-1 < \operatorname{Re} x < 0$ , яких за числовими розрахунками згідно з [4, 5] є два і вони є дійсними;  $\Gamma(z)$  – гамма-функція. На коефіцієнт інтенсивності  $K$  накладаємо вимогу стискувального характеру нормального напруження на берегах тріщини ( $\sigma_\theta(r, \pm\pi) < 0$  при  $r < s$ ) після утворення зони переддруїнування, яка є необхідною для контакту берегів.

Згідно із загальними положеннями про поведінку напружень і деформацій біля концентраторів [15, 18] вони мають сингулярний характер в кінці контактної зони:

$$\sigma_\theta(r, \pm\pi) \sim M_1(s-r)^{-1-\lambda}, \quad r \rightarrow s-0,$$

$$\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=\pm\pi} \sim M_2(r-s)^{-1-\lambda}, \quad r \rightarrow s+0, \quad (4)$$

де  $M_1, M_2$  – деякі сталі,  $\lambda = -\pi^{-1} \arctg(\mu\beta)^{-1}$ .

Розв'язок сформульованої крайової задачі шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша задача відрізняється від початкової тим, що замість останніх умов в (1) і (2) використовуємо умови

$$\theta = \alpha: \quad \sigma_\theta = 0,$$

$$\theta = \pm\pi, \quad r < s: \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \sigma_1 \left\{ C_0 + \sum_i C_i r^{\lambda_i} \right\}. \quad (5)$$

Друга задача – аналогічна задача, але без зони контакту, розв'язок якої відомий [4, 5]. Тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

**Розв'язання задачі методом Вінера – Гопфа.** Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [17] і використовуючи умови (2) і (5), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Гопфа першої задачі у смугі  $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$  (де  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – достатньо малі додатні числа):

$$\Phi^+(p) + \frac{C_0 \sigma_1}{p+1} + \sum_i \frac{C_i \sigma_1 s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} =$$

$$= \frac{(e+x_1) + (1+ex_2)}{2(1+x_1)} (\operatorname{ctg} p\pi - \mu\beta) G_1(p) \Phi^-(p), \quad (6)$$

де

$$\Phi^+(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_1^\infty \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=\pm\pi} \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho s, \pi) \rho^p d\rho,$$

$$G_1(p) = \frac{2 \sin p\pi}{[(e+x_1) + (1+ex_2)] (\operatorname{ctg} p\pi - \mu\beta) D_1(p)} D(p),$$

$$D(p) = \bar{D}(p) + \mu \hat{D}(p),$$

$$\bar{D}(p) = 2e(1+x_2)(1-e)(1+ex_2) \cos p\pi \Delta_1(p) - (1+x_1)[2(1-e)^2 \bar{\Delta}_1(p) +$$

$$+ e^2(1+x_2)^2 \bar{\Delta}_2(p) + e(1+x_2)(1+x_1) \bar{\Delta}_3(p) + 2e(1+x_2)(1-e) \bar{\Delta}_4(p) + (1-e)(1+x_1) \bar{\Delta}_5(p) + (1+x_1)^2 \bar{\Delta}_6(p)],$$

$$\bar{\Delta}_1(p) = 2p^2 \sin^2 \alpha \sin^2 p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha \sin p\pi \cos p(\pi - 2\alpha) -$$

$$- 2 \sin p\alpha [\sin^2 \alpha \sin p\alpha - \sin p\pi \cos p(\pi - \alpha)],$$

$$\bar{\Delta}_2(p) = 4p^2 \sin^2 \alpha \cos^2 p\alpha - p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha + \cos^2 \alpha -$$

$$- \sin p(\pi - \alpha) [\sin p(\pi + \alpha) + 2 \cos p\pi \sin p\alpha],$$

$$\bar{\Delta}_3(p) = p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - 2(\sin^2 p\pi - \cos^2 p\alpha + \sin^2 \alpha \cos 2p\alpha),$$

$$\bar{\Delta}_4(p) = 2p^2 \sin^2 \alpha [\sin^2 p(\pi - \alpha) + \cos^2 p\alpha] - p \sin 2\alpha [\sin 2p\alpha +$$

$$+ 0.5 \sin 2p(\pi - \alpha)] + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 p\alpha,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_5(p) &= p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - 4 \sin p\alpha [\sin p\pi \cos p(\pi - \alpha) - \sin^2 \alpha \sin p\alpha], \\
\bar{\Delta}_6(p) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha), \\
\bar{D}(p) &= -2(1 - e)(1 + e\alpha_2)(2 - e + e\alpha_2) \sin p\pi \Delta_1(p) + (1 + \alpha_1)[2(1 - e)(1 + \\
&\quad + \alpha_1)\hat{\Delta}_1(p) - 0.5(1 + \alpha_1)^2 \hat{\Delta}_2(p) - 2(1 - e)^2 \hat{\Delta}_3(p) + \\
&\quad + e^2(1 + \alpha_2)^2 \hat{\Delta}_4(p) + 2e(1 + \alpha_2)(1 - e)\hat{\Delta}_5(p) + \\
&\quad + (1 + \alpha_1)e(1 + \alpha_2)\hat{\Delta}_6(p)], \\
\hat{\Delta}_1(p) &= p \sin \alpha [\cos \alpha - \sin \alpha \sin 2p\alpha] + \sin 2\alpha \sin^2 p\alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha) [\cos p\pi \cos p\alpha + 3 \sin p\pi \sin p\alpha], \\
\hat{\Delta}_2(p) &= \sin 2p(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha, \\
\hat{\Delta}_3(p) &= -p^2 \sin^2 \alpha [2 \sin 2p\alpha + \sin 2p(\pi - \alpha)] - p \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + \\
&\quad + p \sin 2\alpha [2 \sin^2 p\alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha)] + \\
&\quad + \sin p\alpha [6 \sin p\pi \sin p(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha \sin p\alpha], \\
\hat{\Delta}_4(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha \cos 2p\alpha - 0.5 \sin 2\alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha) [\cos p\pi \cos p\alpha - 3 \sin p\pi \sin p\alpha], \\
\hat{\Delta}_5(p) &= p^2 \sin^2 \alpha [\sin 2p(\pi - \alpha) + 3 \sin 2p\alpha] + p \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + \\
&\quad + 0.5p \sin 2\alpha [1 + 2 \sin^2 p(\pi - \alpha) - 6 \sin^2 p\alpha] - \sin 2\alpha \sin^2 p\alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha) [\cos p\pi \cos p\alpha - 7 \sin p\pi \sin p\alpha], \\
\hat{\Delta}_6(p) &= 2p \sin \alpha [\cos \alpha - \sin \alpha \sin 2p\alpha] - \sin 2\alpha \cos 2p\alpha + \\
&\quad + 4 \sin p(\pi - \alpha) \sin p\pi \sin p\alpha.
\end{aligned}$$

При виконанні умови  $G_1(0) > 0$  функція  $G_1(it)$  має додатну парну дійсну та непарну уявну частини, які при  $t \rightarrow \pm\infty$  прямують до 1 і 0 відповідно. Тоді індекс функції  $G_1(p)$  по уявній осі дорівнює нулеві та можлива її факторизація за формулою [1]:

$$G_1(p) = \frac{G_1^+(p)}{G_1^-(p)}, \quad \operatorname{Re} p = 0,$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G_1(z)}{z - p} dz \right] = \begin{cases} G_1^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G_1^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases}$$

З властивостей гамма-функції [16] отримаємо також подання

$$\operatorname{ctg} p\pi - \mu\beta = \frac{\sqrt{1 + \mu^2 \beta^2}}{p} Q^+(p) Q^-(p),$$

$$Q^+(p) = \frac{\Gamma(1 - p)}{\Gamma(-\lambda - p)}, \quad Q^-(p) = \frac{\Gamma(1 + p)}{\Gamma(1 + \lambda + p)},$$

де функція  $Q^+(p)$  аналітична і не має нулів у півплощині  $\text{Re } p < -\lambda$ , а  $Q^-(p)$  – у півплощині  $\text{Re } p > -1 - \lambda$ . Використовуючи наведені вище факторизації, перепишемо рівняння (6) у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^+(p)}{Q^+(p)G_1^+(p)} + \frac{C_0\sigma_1}{p+1} \left[ \frac{1}{Q^+(p)G_1^+(p)} - \frac{1}{Q^+(-1)G_1^+(-1)} \right] + \\ & + \sum_i \frac{C_i\sigma_1 s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \left[ \frac{1}{Q^+(p)G_1^+(p)} - \frac{1}{Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)} \right] = \\ & = B \frac{Q^-(p)}{pG_1^-(p)} \Phi^-(p) - \frac{C_0\sigma_1}{(p+1)Q^+(-1)G_1^+(-1)} - \\ & - \sum_i \frac{C_i\sigma_1 s^{\lambda_i}}{(p+1+\lambda_i)Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)}, \quad \text{Re } p = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

де

$$B = \frac{(e + \alpha_1) + (1 + e\alpha_2)}{2(1 + \alpha_1)} \sqrt{1 + \mu^2 \beta^2}.$$

Ліва частина рівняння (7) є аналітичною функцією у півплощині  $\text{Re } p < 0$ , а права – у півплощині  $\text{Re } p > 0$ . Тоді відповідно до принципу аналітичного продовження повинна існувати єдина функція, яка є аналітичною в усій комплексній площині і дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Для її знаходження дослідимо асимптотичну поведінку функцій, що входять у рівняння (7), в околі нескінченно віддаленої точки.

Застосувавши до асимптотик (4) теорему абелевого типу [11], отримуємо

$$\Phi^-(p) \sim M_1 \Gamma(-\lambda) s^{-1-\lambda} p^\lambda, \quad \Phi^+(p) \sim M_2 \Gamma(-\lambda) s^{-1-\lambda} (-p)^\lambda, \quad p \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Формула Стірлінга [16] для гамма-функції приводить при  $p \rightarrow \infty$  до асимптотик  $Q^+(p) \sim (-p)^{1+\lambda}$  і  $Q^-(p) \sim p^{-\lambda}$ . З означення функції  $G_1^\pm(p)$  також випливає, що  $G_1^\pm(\infty) = 1$ . Враховуючи знайдені вище асимптотики у рівнянні (7), отримаємо, що ліва і права його частини на нескінченності прямують до нуля, тому за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулеві в усій комплексній площині. Прирівнюючи обидві частини рівняння (7) до нуля, отримуємо його точний розв'язок:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= -\sigma_1 \left\{ \frac{C_0}{p+1} \left[ 1 - \frac{Q^+(p)G_1^+(p)}{Q^+(-1)G_1^+(-1)} \right] + \sum_i \frac{C_i s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[ 1 - \frac{Q^+(p)G_1^+(p)}{Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)} \right] \right\}, \quad \text{Re } p < 0, \\ \Phi^-(p) &= \sigma_1 \frac{pG_1^-(p)}{BQ^-(p)} \left\{ \frac{C_0}{(p+1)Q^+(-1)G_1^+(-1)} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_i \frac{C_i s^{\lambda_i}}{(p+1+\lambda_i)Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)} \right\}, \quad \text{Re } p > 0. \quad (9) \end{aligned}$$

**Розрахунок параметрів контактної зони.** З формул (9) при  $p \rightarrow \infty$  випливає асимптотика

$$\Phi^-(p) \sim \frac{\sigma_1 p^\lambda}{B \exp(\lambda)} \left\{ \frac{C_0}{Q^+(-1)G_1^+(-1)} + \sum_i \frac{C_i s^{\lambda_i}}{Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)} \right\}.$$

Порівнюючи цей вираз з (8), отримаємо

$$M_1 = \frac{\sigma_1 s^{1+\lambda}}{B \exp(\lambda) \Gamma(-\lambda)} \left\{ \frac{C_0}{Q^+(-1)G_1^+(-1)} + \sum_i \frac{C_i s^{\lambda_i}}{Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)} \right\}.$$

Оскільки в кінці контактної зони нормальне напруження дорівнює нулеві ( $\sigma_\theta(s, \pm\pi) = 0$ ) і концентрація напружень відсутня, то повинна виконуватись умова  $M_1 = 0$ , з якої випливає рівняння для визначення довжини  $s$  контактної зони:

$$\frac{C_0}{Q^+(-1)G_1^+(-1)} + \sum_i \frac{C_i s^{\lambda_i}}{Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)} = 0. \quad (10)$$

Розв'язок (9) рівняння Вінера – Гопфа (6) дає змогу знайти трансформанти Мелліна від напружень, застосувавши до яких зворотне перетворення Мелліна [17], за допомогою теореми про лишки отримаємо вирази для компонент тензора напружень біля вершини тріщини в матеріалах з'єднання у вигляді розвинень за степенями  $r$ :

$$\sigma_{mn}(r, \theta) = \sigma_{mn}^0(\theta) + \sum_k g_{mn}(\theta, \lambda'_k) r^{\lambda'_k}, \quad r \rightarrow 0,$$

де  $\sigma_{mn}^0(\theta)$ ,  $g_{mn}(\theta, \lambda'_k)$  – відомі функції,  $\lambda'_k$  – корені рівняння

$$D(-1-x) = 0, \quad (11)$$

що задовольняють умову  $\text{Re } \lambda'_k > -1$ . Зокрема, для контактного напруження на берегах тріщини маємо

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r, \pi) = \sigma_1 \sum_k \frac{(1+x_1)D_1(-1-\lambda'_k)}{D'(-1-\lambda'_k)} Q^+(-1-\lambda'_k)G_1^+(-1-\lambda'_k) \times \\ \times \sum_i \frac{C_i s^{\lambda_i}}{Q^+(-1-\lambda_i)G_1^+(-1-\lambda_i)} \frac{\lambda_i}{\lambda'_k(\lambda_i - \lambda'_k)} \left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda'_k}, \quad r \leq s, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $D'(p) = \frac{\partial D(p)}{\partial p}$ .

**Аналіз числових результатів.** Відповідно до запропонованої вище моделі визначення параметрів контактної зони здійснюємо у два етапи. Спочатку згідно з [4, 5] розраховуємо орієнтацію і довжину зони передруйнування і напружено-деформований стан в околі вершини тріщини після її появи. Отримані результати використовуємо далі для розрахунку за формулами (10)–(12) довжини контактної зони, показника сингулярності напружень у вершині тріщини та контактного напруження на її берегах.

Для визначеності приймемо, що кусково-однорідна площа з міжфазною тріщиною довжини  $L$  навантажена на нескінченості однорідними нормальним  $p > 0$  і дотичним  $q$  напруженнями. Комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень визначається за формулами [25, 26]

$$K = K_I + iK_{II}, \quad K_I = (p - 2\omega q) \frac{\sqrt{\pi L/2}}{\text{ch } \pi\omega}, \quad K_{II} = (2\omega p + q) \frac{\sqrt{\pi L/2}}{\text{ch } \pi\omega}.$$

Результати числових розрахунків наведено на рис. 2 – рис. 4 для окремих параметрів задачі при  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ . Згідно з рис. 2а, з утворенням зони передруйнування появляється залежність довжини контактної зони від величини навантаження, заданого безрозмірним параметром  $f = \sqrt{p^2 + q^2} / \sigma_1$ : розмір області контакту берегів зростає зі збільшенням навантаження, причому зростання виявляється тим більшим, чим меншим є відношення  $E_1/E_2$ . Розрахунки виконано при  $E_1/E_2 = 0.2, 0.5, 0.8$  для  $\mu = -0.5$  і  $p = -q$ .

З появою бічної зони передруйнування відбувається зміна характеру залежності розмірів контактної зони від конфігурації навантаження, заданої відношенням  $n = q/p$ . Якщо при відсутності зони передруйнування довжина контактної зони експоненціально зростає зі збільшенням вкладу у повне навантаження дотичного напруження  $q$  порівняно з нормальним напруженням  $p$  [7] (рис. 2б, пунктирні лінії), то при наявності зони передруйнування швидкість зростання довжини контактної зони помітно сповільнюється (рис. 2б, суцільні лінії). Розрахунки виконано при  $E_1/E_2 = 0.2, 0.5, 0.8$  для  $\mu = -0.5$  і  $f = 0.3$ .

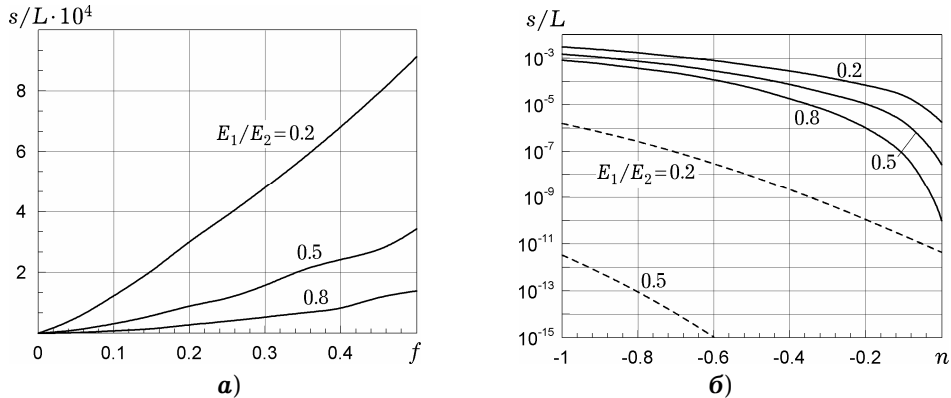


Рис. 2. Залежність довжини контактної зони від безрозмірного параметра навантаження  $f$  і його конфігурації  $n$ .

На розміри контактної зони суттєво впливає співвідношення  $E_1/E_2$  модулів Юнга з'єднаних матеріалів (рис. 3а): вона майже експоненціально спадає при наближенні  $E_1/E_2$  до одиниці. Обчислення виконано при  $\mu = -0.5$ ,  $f = 0.3$ . У той же час вплив коефіцієнта тертя  $\mu$  на параметри зони при  $n = -1$  є незначним (див. рис. 3б): при збільшенні тертя її довжина зростає незначно.

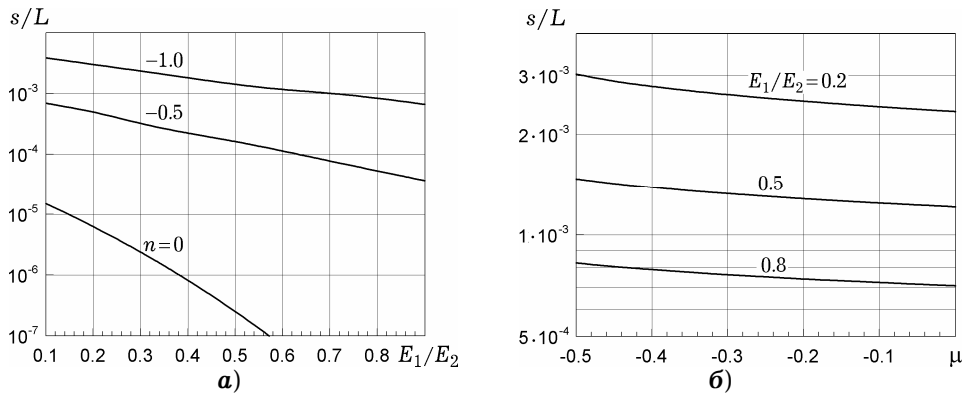


Рис. 3. Залежність довжини контактної зони від відношення  $E_1/E_2$  і коефіцієнта тертя  $\mu$ .

Одночасне утворення зони передруйнування і маломасштабної контактної зони суттєво змінює напружено-деформований стан в околі вершини тріщини. На рис. 4 наведено графіки залежності від  $E_1/E_2$  показників степеня сингулярності напружень у вершині при наявності лише контактної зони ( $\lambda$ ), лише зони передруйнування ( $\lambda_1, \lambda_2$ ), а також при наявності одночасно як зони передруйнування, так і маломасштабної контактної зони ( $\lambda'_1, \lambda'_2$ ). Порівняння  $\lambda$  і  $\lambda_1$  з  $\lambda'_1$  показує, що одночасне існування обох зон при-



зводить до підвищення концентрації напружень в околі вершини ( $\lambda'_1 < \lambda_1, \lambda$ ), яке відповідно до комплексної моделі усувається завдяки утворенню в ній області деструкції [9]. Обчислення виконано при  $\mu = -0.5$ ,  $f = 0.3$ ,  $n = -1$ .

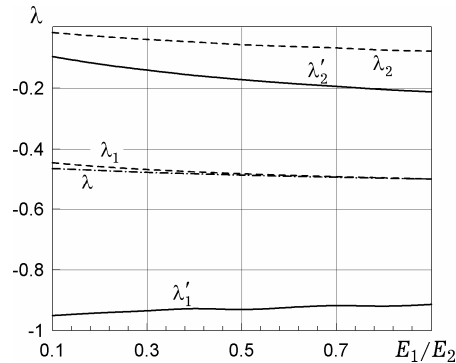


Рис. 4. Залежність показника сингулярності напружень від  $E_1/E_2$  біля вершини тріщини при наявності контактної зони ( $\lambda$ ), зони передруйнування ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) і обох зон ( $\lambda'_1, \lambda'_2$ ).

Зауважимо, що числові розрахунки були здійснені при переважаючих розтягувальних навантаженнях ( $p \geq |q|$ ), оскільки саме при такій конфігурації зовнішнього навантаження забезпечувалось виконання вимоги маломасштабності контактної зони ( $s \ll \ell$ ) та нерівності  $G_1(0) > 0$ , які лежать в основі розв'язання задачі, сформульованої у рамках запропонованої вище моделі міжфазної тріщини з прилеглими до її вершини областю контакту берегів та бічною зоною передруйнування.

**Висновки.** Побудовано комплексну модель зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини, яка передбачає існування в її околі маломасштабної області контакту берегів, взаємодіючих за законом сухого тертя, та більш розвинутої бічної зони передруйнування, представленої в рамках моделі Леонова – Панасюка лінією розриву нормального переміщення. Методом Вінера – Гопфа для умов плоскої деформації отримані рівняння для визначення довжини контактної зони і показника сингулярності напружень біля вершини тріщини, знайдено вираз для контактного напруження. Проведено числовий аналіз параметрів контактної зони, який виявив залежність розмірів зони від зовнішнього навантаження, тертя і пружних характеристик з'єднаних матеріалів. Встановлено, що довжина контактної зони суттєво зростає при збільшенні величини навантаження, особливо його дотичної складової, а при зближенні модулів пружності з'єднаних матеріалів експоненціально зменшується. У той же час її залежність від коефіцієнта тертя є менш вираженою: зі збільшенням тертя берегів довжина контактної зони слабо зростає. Виявлено посилення концентрації напружень біля вершини тріщини при одночасній появі бічної зони передруйнування та контакту берегів, яке може бути усунено шляхом утворення зони деструкції матеріалу у прилеглий до вершини тріщини частині зони передруйнування.

Автор виражає глибоку вдячність проф. Л. А. Кіпнісу за цінні поради і зауваження по статті.

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.  
Те саме: Gakhov F. D. Boundary value problems. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 564 p.
2. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитн. материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.

3. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. Влияние трения между берегами межфазной трещины на угол ее начального поворота при сдвиге // Доп. НАН України. – 2013. – № 5. – С. 60–65.
4. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 6. – С. 71–79.  
Te same: Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. Initial kinking of an interface crack between two elastic media under tension and shear // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 6. – P. 635–642.
5. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 10. – С. 28–41.  
Te same: Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. Initial kinking of an interface crack between two elastic media // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 10. – P. 1090–1099.
6. Каминский А. А., Кипнис Л. А. О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред // Доп. НАН України. – 2010. – № 2. – С. 59–63.
7. Каминский А. А., Кипнис Л. А. О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред // Доп. НАН України. – 2011. – № 1. – С. 38–43.
8. Камінський А. О., Дудик М. В., Кіпніс Л. А. Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2014. – № 1. – С. 62–67.
9. Камінський А., Кіпніс Л., Дудик М. Про комплексну модель зони передруйнування в кінці міжфазної тріщини // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3 т. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 2. – С. 47–49.
10. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения // Прикл. механика и техн. физика. – 1961. – № 3. – С. 85–92.
11. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.  
Te same: Noble B. Methods based on the Wiener – Hopf technique. – New York: Chelsea, 1988. – 246 p.
12. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
13. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
14. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.  
Te same: Panasyuk V. V., Savruk M. P. Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // Soviet Mater. Sci. – 1992. – **28**, No. 1. – P. 41–57.
15. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
16. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.  
Te same: Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Eds M. Abramowitz, I. A. Stegun. – New York: Dover Publ., 1972. – 1046 p. -64.
17. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.  
Te same: Uflyand Ya. S. Survey of articles on the application of integral transforms in the theory of elasticity. – North Carolina State Univ., 1965. – 402 p.
18. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.  
Te same: Cherepanov G. P. Mechanics of brittle fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 939 p.
19. Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**, No. 4. – P. 780–781.
20. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**, No. 4. – P. 631–636.
21. Comninou M., Schmueser D. The interface crack in a combined tension-compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – **46**, No. 2. – P. 345–348.

22. *England A. H.* A crack between dissimilar media // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1965. – **32**, No. 2. – P. 400–402.  
 Те саме: *Ингленд А.* Трещина между двумя различными средами // *Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.* – 1965. – **32**, № 2. – С. 165–168.
23. *Erdogan F.* Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1965. – **32**, No. 2. – P. 403–410.  
 Те саме: *Эрдоган Ф.* Распределение напряжений в связанных разнородных материалах с трещинами // *Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.* – 1965. – **32**, № 2. – С. 169–177.
24. *Gautesen A. K., Dundurs J.* The interface crack under combined loading // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1988. – **55**, No. 3. – P. 580–586.
25. *Rice J. R.* Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1988. – **55**, No. 1. – P. 98–103.
26. *Rice J. R., Sih G. C.* Plane problems of crack in dissimilar media // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1965. – **32**, No. 2. – P. 418–423.  
 Те саме: *Райс Дж., Си Г.* Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред // *Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.* – 1965. – **32**, № 2. – С. 186–192.

#### **ВЛИЯНИЕ БОКОВОЙ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ НА КОНТАКТ БЕРЕГОВ**

*В условиях плоской деформации методом Винера – Хопфа выполнен расчет мало-масштабной контактной зоны возле вершины межфазной трещины при условии образования в ее окрестности боковой зоны предразрушения. В области контакта предполагается сухое трение берегов по закону Кулона. Определены размеры контактной зоны, найдено выражение для контактного напряжения и уравнение для расчета показателя сингулярности напряжений у вершины трещины. Исследовано влияние нагрузки, коэффициента трения и упругих характеристик соединенных материалов на размеры контактной зоны. Показано, что при наличии зоны предразрушения длина контактной зоны становится зависимой не только от конфигурации, но и от величины внешней нагрузки.*

#### **EFFECT OF THE SIDE PREFRACTURE ZONE NEAR THE TIP OF INTERFACIAL CRACK ON THE CONTACT OF ITS FACES**

*The calculation of the small scale contact zone near the interfacial crack tip under condition of formation in its vicinity of side prefracture zone is fulfilled by the Wiener – Hopf method for the plain strain conditions. The crack faces are in dry friction contact according to the law of Coulomb. The sizes of contact zone are determined. The expression for contact stress and equation for the calculation of the index of singularity of stresses near the crack tip are found. The effect of loading, the coefficient of friction and elastic parameters of joined materials on the contact zone sizes are investigated. It is shown that at the presence of prefracture zone the length of contact zone depends on the configuration as well on magnitude of the external loading.*

Уман. держ. пед. ун-т, Умань

Одержано  
03.09.14