

**ПЕРЕХІДНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПІВСМУЗІ З ПОКРИТТЯМ,
ЗУМОВЛЕНИЙ НАГРІВОМ ЇЇ БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ**

З використанням інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є побудовано розв'язок плоскої квазістатичної задачі термпружності для півсмуги з покриттям, яка нагрівається потоком тепла, що діє на її торці та охолоджується через вільні від навантажень поверхні покриттів. Подано результати числового аналізу залежності термонапруженого стану в металокерамічному композиті від інтенсивності охолодження та відносної товщини покриття.

З огляду на значний прогрес у сучасних наукоємних технологіях в останні роки інтенсивно розвивається науково-технічний напрямок зі створення і введення у практику надтонких матеріалів з їхніми високими питомими фізико-механічними характеристиками. Оскільки через надзвичайно дрібну будову та крихкість такі матеріали не можуть самостійно формувати ті чи інші конструкційні макроелементи, то їх успішно використовують в ролі антикорозійних, водовідштовхуючих, термозахисних покривних наповнювачів композитів для наступного виготовлення нових типів матеріалів і модифікації властивостей вже існуючих конструкційних елементів – лопаток турбін, поршнів, головок циліндрів двигунів внутрішнього згоряння тощо [13, 15].

Основи теорії і методи розв'язування задач теплопровідності та термпружності для кусково-однорідних тіл та, зокрема, тіл з покриттями викладено у працях багатьох авторів [3, 4, 8, 14, 16]. Значне місце у цих працях займає вивчення температурних полів і напружень у тілах з неоднорідностями, один з характерних розмірів яких істотно менший від двох інших [8]. Схема розв'язування задач термпружної рівноваги тіл з тонкими покриттями полягає в тому, що власне неоднорідність, пов'язана з покриттям, з розгляду виключається, а його наявність моделюється певною математичною залежністю між температурою, тепловими потоками, напруженнями і переміщеннями на поверхні, яка прилягає до покриття та умовами термомеханічної взаємодії із зовнішнім середовищем.

У випадку, коли опис неоднорідності з використанням математичних спрощень призводить до значних похибок, використовують просторові постановки [3, 4, 17]. Цей підхід ґрунтується на розгляді відповідних вихідних рівнянь для кожного елемента композитного тіла з подальшим узгодженням розв'язків через умови спряження елементів. Такий підхід реалізується з використанням комп'ютерного моделювання у багатьох авторів і, зокрема, в працях [5, 11, 12, 14, 19, 20].

На нашу думку, застосування до таких задач класичного методу розв'язування початково-крайових задач математичної фізики – інтегрального перетворення Лапласа – призводить до певних труднощів, пов'язаних із обґрунтуванням числових способів його обернення, а отже, і прогнозування точності та достовірності обчислень. Тому пропонуємо методику, у якій використовується відносно новий підхід – метод поліномів Лагерра (метод інтегрального перетворення Лагерра) [1, 2, 10]. Основною перевагою цього підходу є простота обернення за допомогою підсумовування ряду. Крім того, при застосуванні методу поліномів Лагерра до класичних початково-крайових задач математичної фізики утворюються трикутні послідовності крайових задач [1], що дає можливість відразу записати їх загальний розв'язок і тим самим створити узагальнений алгоритм знаходження коефіцієнтів розкладу [9].

1. Формулювання задачі теплопровідності. Розглянемо неоднорідну півсмугу $x \geq 0$, $-H \leq y \leq H$, що складається з основи товщини $2h_2$ і двох однакових покриттів товщини h_1 ($h_1 + h_2 = H$) із відмінними від основи фізико-механічними характеристиками, які нанесено на граничні поверхні основи $y = \pm h_2$ (рис. 1). З моменту часу $t = 0$ півсмуга починає нагріватись потоком тепла $q^*(t)$, рівномірно розподіленим на її торцевій поверхні $x = 0$, а з граничних поверхонь $y = \pm H$ відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. Вважаємо, що початкова температура всього пакета дорівнює нулеві, а на межі поділу покриття і півпростору виконуються умови ідеального теплового контакту.

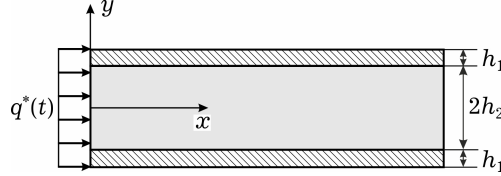


Рис. 1

Враховуючи фізичну та геометричну симетрію задачі відносно осі $y = 0$, в термінах безрозмірних змінних та величин $\alpha = x/H$, $\gamma = y/H$, $\tau = a_T^{(2)}t/H^2$, $\gamma_1 = h_1/H$, $\tilde{a}_T^{(i)} = a_T^{(2)}/a_T^{(i)}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(2)}$, $Bi = \alpha H/\lambda_T^{(1)}$, $\tilde{q}(\tau) = q(H^2\tau/a_T^{(2)})H/\lambda_T^{(2)}$, задачу теплопровідності сформулюємо таким чином:

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} + \partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_T^{(i)} \partial_\tau T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_\alpha T^{(i)} = -\tilde{q}(\tau), \quad \alpha = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$\partial_\gamma T^{(2)} = 0, \quad \gamma = 0, \quad (4)$$

$$\partial_\gamma T^{(1)} + Bi T^{(1)} = 0, \quad \gamma = 1, \quad (5)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_\gamma T^{(1)} = \partial_\gamma T^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1. \quad (6)$$

Тут $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності покриття ($i = 1$) та основи ($i = 2$); α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь покриттів; $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$, $i = 1, 2$, – температурне поле в покритті та основі.

До рівняння (1) та умов (3) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ :

$$T_n^{(i)}(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра [7]. Подібно, як і в роботі [9], одержимо послідовності рівнянь

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T_n^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_i \sum_{k=0}^n T_k^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

та умову

$$\tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_\alpha T_n^{(i)} = -\tilde{q}_n(\tau), \quad \alpha = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

При одержанні рівнянь (7) враховано нульові початкові умови (2).

Припустимо, крім того, що $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ задовольняють умови застосовності інтегрального перетворення Фур'є [6]. Тоді замість (7), враховуючи крайові умови (8), одержимо послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_i \sum_{k=0}^n \bar{T}_k^{(i)} - \tilde{q}_n^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де $\bar{T}_n^{(i)} = \int_0^\infty T_n^{(i)}(\alpha, \gamma) \cos(\xi\gamma) d\gamma$ – трансформанта Фур'є від $T_n^{(i)}(\alpha, \gamma)$, а

$\tilde{q}_n^{(i)} = \tilde{q}_n / \tilde{\lambda}_T^{(i)}$. З цієї послідовності після перенесення доданка з індексом n у ліву частину одержимо

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i) \bar{T}_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_i \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_k^{(i)} - \tilde{q}_n^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Застосувавши інтегральні перетворення Лагерра та Фур'є до умов (4)–(6), одержимо трансформовані крайові умови та умови спряження:

$$d_\gamma \bar{T}_n^{(2)} = 0, \quad \gamma = 0, \quad (10)$$

$$d_\gamma T_n^{(1)} + \text{Bi} T_n^{(1)} = 0, \quad \gamma = 1, \quad (11)$$

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}, \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} d_\gamma \bar{T}_n^{(1)} = d_\gamma \bar{T}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1. \quad (12)$$

Загальний розв'язок послідовності рівнянь (9) має вигляд

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma)] + Q_n^{(i)}, \quad (13)$$

де $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки однорідних послідовностей рівнянь:

$$\begin{aligned} d_{\gamma\gamma}^2 G_j^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i) G_j^{(i)} &= \lambda \tilde{a}_i \sum_{m=0}^{j-1} G_m^{(i)}, \\ d_{\gamma\gamma}^2 W_j^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i) W_j^{(i)} &= \lambda \tilde{a}_i \sum_{m=0}^{j-1} W_m^{(i)}, \end{aligned} \quad (14)$$

а $Q_n^{(i)}$ – частковий розв'язок неоднорідної послідовності, який, враховуючи, що $\tilde{q}_n^{(i)}$ не залежить від змінної γ , має вигляд рекурентного рівняння

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}} \left[\tilde{q}_n^{(i)} - \lambda \tilde{a}_T^{(i)} \sum_{m=0}^{n-1} Q_m^{(i)} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (15) з використанням методу математичної індукції можемо знайти у вигляді

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}} \left\{ \tilde{q}_n^{(i)} - \frac{\lambda \tilde{a}_T^{(i)}}{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\xi^2}{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_T^{(i)}} \right)^{n-1-k} \tilde{q}_k^{(i)} \right\}. \quad (16)$$

Загальні розв'язки однорідних послідовностей рівнянь (14) згідно з методом невизначених коефіцієнтів подамо як

$$\begin{aligned} G_j^{(i)}(\xi, \gamma) &= \exp(-\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(\omega_i \gamma)^k}{k!}, \\ W_j^{(i)}(\xi, \gamma) &= \exp(\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(-\omega_i \gamma)^k}{k!}, \quad \omega_i = \sqrt{\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i}, \end{aligned} \quad (17)$$

Безпосередня підстановка розв'язків (17) у послідовності (14) приводить до рекурентних співвідношень стосовно $a_{j,k}^{(i)}$:

$$a_{j,k+1}^{(i)} = 0.5 \left(a_{j,k+2}^{(i)} - \frac{\lambda \tilde{a}_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)} \right) \quad (18)$$

для довільних $a_{j,0}^{(i)}$ і $a_{j,k}^{(i)} \equiv 0$ при $k > j$.

Невідомі $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$ знайдемо з трансформованих умов (10)–(12). Після підстановки розв'язків (13) у ці умови та перенесення всіх доданків, які не містять невідомих з нижніми індексами n , у праву частину одержимо послідовність систем чотирьох алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \\ 0 & 0 & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n} \\ c_{3,n} \\ c_{4,n} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= (-\omega_1 + Bi) \exp(-\omega_1), & b_{2,1} &= (\omega_1 + Bi) \exp(\omega_1), \\ b_{4,3} &= -\omega_2, & b_{4,4} &= \omega_2, & b_{2,1} &= \exp(-\omega_1 \gamma_1), \\ b_{2,2} &= \exp(\omega_1 \gamma_1), & b_{2,3} &= -\exp(-\omega_2 \gamma_1), & b_{2,4} &= -\exp(\omega_2 \gamma_1), \\ b_{3,1} &= -\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \exp(-\omega_1 \gamma_1), & b_{3,2} &= \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 \exp(\omega_1 \gamma_1), \\ b_{3,3} &= \omega_2 \exp(-\omega_2 \gamma_1), & b_{3,4} &= -\omega_2 \exp(\omega_2 \gamma_1), \\ c_{1,n} &= -Bi Q_n^{(1)} - \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(1)} (\tilde{G}_j^{(1)}(1) + Bi G_j^{(1)}(1)) + B_{n-j}^{(1)} (\tilde{W}_j^{(1)}(1) + Bi W_j^{(1)}(1))], \\ c_{2,n} &= \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(2)} G_j^{(2)}(\gamma_1) + B_{n-j}^{(2)} W_j^{(2)}(\gamma_1) - A_{n-j}^{(1)} G_j^{(1)}(\gamma_1) - B_{n-j}^{(1)} W_j^{(1)}(\gamma_1)], \\ c_{3,n} &= \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(2)} \tilde{G}_j^{(2)}(\gamma_1) + B_{n-j}^{(2)} \tilde{W}_j^{(2)}(\gamma_1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)} \tilde{G}_j^{(1)}(\gamma_1) - \\ &\quad - \tilde{\lambda}_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)} \tilde{W}_j^{(1)}(\gamma_1)], \\ c_{4,n} &= -\sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(2)} \tilde{G}_j^{(2)}(0) + B_{n-j}^{(2)} \tilde{W}_j^{(2)}(0)]. \end{aligned}$$

Тут для зручності запису введено позначення $G_j^{(i)}(\xi, \gamma) \equiv G_j^{(i)}(\gamma)$, $W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \equiv W_j^{(i)}(\gamma)$, $\tilde{G}_j^{(i)}(\gamma) \equiv d_\gamma G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $\tilde{W}_j^{(i)}(\gamma) \equiv d_\gamma W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$.

З використанням алгоритму Гаусса систему (19) зведемо до трикутного вигляду

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2}^* & b_{2,3}^* & b_{2,4}^* \\ 0 & 0 & b_{3,3}^* & b_{3,4}^* \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,4}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n}^* \\ c_{3,n}^* \\ c_{4,n}^* \end{pmatrix}, \quad (20)$$

де нові коефіцієнти $b_{i,j}^*$ пов'язані із коефіцієнтами $b_{i,j}$ співвідношеннями

$$\begin{aligned} b_{2,2}^* &= b_{1,2}b_{2,1} - b_{1,1}b_{2,2}, & b_{2,3}^* &= -b_{1,1}b_{2,3}, & b_{2,4}^* &= -b_{1,1}b_{2,4}, \\ b_{3,3}^* &= b_{2,3}^*(b_{1,1}b_{3,2} - b_{1,2}b_{3,1}) + b_{3,3}b_{1,1}b_{2,2}^*, \\ b_{3,3}^* &= b_{2,4}^*(b_{1,1}b_{3,2} - b_{1,2}b_{3,1}) + b_{3,4}b_{1,1}b_{2,2}^*, \\ b_{4,4}^* &= b_{3,4}^*b_{4,3} - b_{3,3}^*b_{4,4}, \end{aligned}$$

а елементами нового стовпця вільних членів є

$$\begin{aligned} c_{2,n}^* &= b_{2,1}c_{1,n} - b_{1,1}c_{2,n}, \\ c_{3,n}^* &= (b_{2,1}b_{3,1} - b_{3,2}b_{1,1})c_{2,n}^* - b_{2,2}^*(b_{3,1}c_{1,n} - b_{1,1}c_{3,n}), \\ c_{4,n}^* &= b_{4,3}^*c_{3,n}^* - b_{3,3}^*c_{4,n}. \end{aligned}$$

Остаточні із систем (20) невідомі $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$ визначаються за рекурентними співвідношеннями

$$\begin{aligned} B_n^{(2)} &= \frac{c_{4,n}^*}{b_{4,4}^*}, & A_n^{(2)} &= \frac{1}{b_{3,3}^*}(c_{3,n}^* - B_n^{(2)}b_{3,4}^*), \\ B_n^{(1)} &= \frac{1}{b_{2,2}^*}(c_{2,n}^* - A_n^{(2)}b_{2,3}^* - B_n^{(2)}b_{2,4}^*), & A_n^{(1)} &= \frac{1}{b_{1,1}}(c_{1,n} - B_n^{(1)}b_{1,2}). \end{aligned} \quad (21)$$

Формули (21) дають змогу формально завершити побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності. При цьому температурне поле розраховуємо за формулою

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau), \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

2. Визначення напружено-деформованого стану. Перед тим, як сформулювати умови навантаження на бічній поверхні плити, наведемо деякі пояснення. Як відомо, двовимірні задачі теорії пружності в обмежених і напівобмежених областях у випадку вільних від напружень границь мають певну специфіку, пов'язану із побудовою їх розв'язку традиційними методами математичної фізики. При цьому існує певний набір крайових умов на одній (для напівобмеженого) чи двох протилежних (для обмеженого тіла) поверхнях, які дають змогу без додаткових, часто громіздких і не цілком обґрунтованих, математичних перетворень ефективно застосовувати класичні методи та методики, аналогічні до тих, що використовуються, зокрема, при дослідженні задач теплопровідності в таких областях. У випадку квазістатичної задачі термopружності цей набір крайових умов є досить обмеженим. Розглянемо, наприклад, рівняння, яке у випадку квазістатичної задачі термopружності повинно задовольняти об'ємне розширення [9]

$$\theta^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \operatorname{div} \mathbf{U}^{(i)}, \quad i = 1, 2:$$

$$\Delta\theta^{(i)} = \alpha_T^{(i)}(3 - 4\nu_i^{-2})\Delta T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

де $\alpha_i^2 = (\lambda_i + 2\mu_i)/\mu_i$, λ_i , μ_i – сталі Ляме в матеріалі покриття чи основи. З рівнянь (23) видно, що для отримання їх «безпроблемного» розв'язку об'ємне розширення $\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ і температура $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ повинні мати однотипні подання інтегралами Фур'є за змінною α . Для температури $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ таке

подання визначається крайовими умовами задачі теплопровідності на поверхні $\alpha = 0$ і в розглядуваному випадку має вигляд

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{T}^{(i)}(\xi, \gamma, \tau) \cos(\xi\alpha) d\xi,$$

$$\bar{T}^{(i)}(\xi, \gamma, \tau) = \int_0^{\infty} T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) \cos(\xi\alpha) d\alpha.$$

Для того щоб таким самим чином здійснити подання для об'ємного розширення, повинна виконуватись умова

$$\partial_{\alpha} \theta^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (24)$$

З іншого рівняння термопружної рівноваги

$$\Delta w^{(i)} = (1 - x_i^2) \partial_{\gamma} \theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3x_i^2 - 4) \partial_{\gamma} T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

аналогічно можна одержати

$$\partial_{\alpha} w^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (26)$$

де $w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ – компонента вектора переміщення в напрямку осі γ .

Нескладно показати, що умови (24) і (26) на поверхні $\alpha = 0$ еквівалентні умовам шарнірного закріплення:

$$u^{(i)}(0, \gamma, \tau) = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}(0, \gamma, \tau) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

де $u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ – компонента вектора переміщення в напрямку осі α .

Крайові умови на поверхні $\gamma = 1$ можуть бути довільного типу. Без обмеження загальності покладемо, що ця поверхня вільна від навантаження:

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, 1, \tau) = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, 1, \tau) = 0. \quad (28)$$

Очевидно, що для фізичної симетрії задачі відносно осі $\gamma = 0$ такі ж умови повинні виконуватись і на поверхні $\gamma = -1$, а вимога симетрії приводить до умов на поверхні $\gamma = 0$:

$$w^{(2)}(\alpha, 0, \tau) = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha, 0, \tau) = 0. \quad (29)$$

Крім того, вважатимемо, що на лінії γ_1 поділу матеріалів покриття та основи виконуються умови ідеального термомеханічного контакту

$$w^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = w^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), \quad u^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = u^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), \quad (30)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau). \quad (31)$$

Рівняння (23), (25) та умови (28)–(31) після застосування до них інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є набудуть вигляду

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{\theta}_n^{(i)} = \alpha_T^{(i)} (3 - 4x_i^{-2}) [d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)} + \bar{q}_n^{(i)}], \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{w}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)} = (1 - x_i^2) d_{\gamma} \bar{\theta}_n^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3x_i^2 - 4) d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (33)$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma, n}^{(1)}(\xi, 1) = 0, \quad \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, n}^{(1)}(\xi, 1) = 0,$$

$$\bar{w}_n^{(2)}(\xi, 0) = 0, \quad \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, n}^{(2)}(\xi, 0) = 0,$$

$$\bar{w}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{w}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1), \quad \bar{u}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{u}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1),$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma, n}^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{\sigma}_{\gamma\gamma, n}^{(2)}(\xi, \gamma_1), \quad \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, n}^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, n}^{(2)}(\xi, \gamma_1). \quad (34)$$

Рівняння (32), (33) містять дискретну змінну n як параметр, тому їх розв'язок можемо записати як

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \alpha_T^{(i)}(3 - 4\alpha_i^{-2})\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = & F_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + H_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \frac{\gamma}{2}(1 - \alpha_i^2) \times \\ & \times [C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma)] + \\ & + \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i}(3 - 4\alpha_i^{-2})d_\gamma \tilde{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma), \end{aligned} \quad (36)$$

де $\tilde{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi, \gamma)$, $n = 1, 2, \dots$, $\tilde{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma)$.

Набір сталих $C_n^{(i)}$, $D_n^{(i)}$, $F_n^{(i)}$, $H_n^{(i)}$ визначаємо із крайових умов та умов спряження (34). Безпосередня підстановка розв'язків (35), (36) у ці умови приводить до систем алгебричних рівнянь

$$[d_{k,\ell}] \{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, C_n^{(2)}, D_n^{(2)}, F_n^{(2)}, H_n^{(2)}\}^\top = \{f_{n,k}\}, \quad (37)$$

де ненульові коефіцієнти матриці $[d_{k,\ell}]$ містять комбінації експоненціальних функцій і фізико-механічних характеристик покриття та основи, а стовпець вільних членів – знайдені в попередньому підрозділі трансформанти температур і теплових потоків.

Системи (37) стандартною процедурою Гаусса зводимо до трикутного вигляду, звідки визначаємо всі невідомі $C_n^{(i)}$, $D_n^{(i)}$, $F_n^{(i)}$, $H_n^{(i)}$.

Остаточний розв'язок задачі термопружності подаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = & \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau), \\ w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = & \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \end{aligned}$$

Компонента вектора пружного переміщення $u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$ визначається співвідношенням

$$u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi^{-1} [\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma)] \sin(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau),$$

а ненульові компоненти тензора напружень – за співвідношеннями Дюамеля – Неймана.

3. Числовий аналіз та висновки. За формулою (22) розраховано температурне поле в півсмузі з покриттям у випадку, коли інтенсивність потоку тепла на її бічній поверхні задається співвідношенням

$$\tilde{q}(\tau) = q^* (1 - \exp(-\tau_0\tau)),$$

де q^* – деяка розмірна величина, а τ_0 визначає час виходу теплового навантаження на стаціонарне значення. Тоді

$$\bar{q}_n(\xi) = q^* \left[\frac{1}{\lambda} \delta_{0n} - \frac{1}{\lambda + \tau_0} \left(\frac{\tau_0}{\lambda + \tau_0} \right)^n \right],$$

де δ_{0n} – символ Кронекера.

Для проведення числових розрахунків було вибрано металокерамічний композит [18], основа якого виготовлена із алюмінієвого сплаву ($\alpha_T^{(2)} =$

$= 9.06 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}$; $\lambda_T^{(2)} = 2.22 \cdot 10^2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $\alpha_T^{(2)} = 2.36 \cdot 10^{-7} \text{ К}^{-1}$; $E_2 = 70 \text{ ГПа}$; $\nu_2 = 0.33$), а покриття – із кераміки ($a_T^{(1)} = 1.19 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}$; $\lambda_T^{(1)} = 3.6 \cdot 10 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $\alpha_T^{(1)} = 8.0 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$; $E_1 = 343 \text{ ГПа}$; $\nu_1 = 0.22$).

На рис. 2 подано результати розрахунку часової залежності знерозміреної температури $T^*(\alpha, \gamma, \tau) = T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)/q^*$ при $\tau_0 = 4.0$ на певній віддалі від поверхні нагріву ($\alpha = 1$) в центрі основи ($\gamma = 0$) для значень відносної товщини покриття $\gamma_1 = h_1/H = 0.01, 0.1, 0.2$ та значень інтенсивності охолодження $Bi = 1, Bi = 5$.

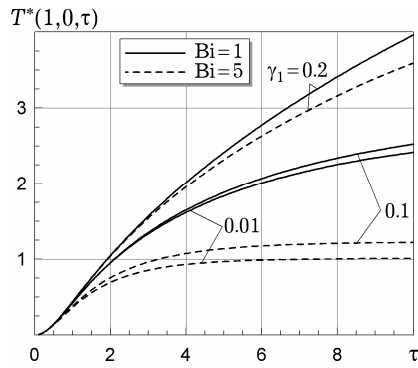


Рис. 2

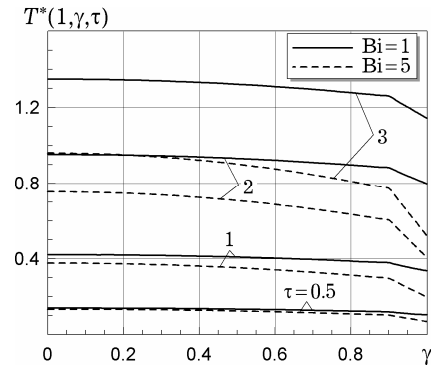


Рис. 3

Як і слід було очікувати, збільшення відносної товщини термоізолюючого покриття призводить до зменшення втрат тепла навіть і при інтенсивному теплообміні з поверхонь композитного тіла та до суттєвого зростання часу виходу температури на стаціонарне значення. Як свідчать результати розрахунку температури на лінії $\alpha = 1$ при $\gamma_1 = 0.1$ (рис. 3), така тенденція зберігається і в інших областях композитного тіла. Причому з часом різниця між температурою центральних областей та областей, розташованих поблизу покриття, збільшується і суттєвий вплив на цю різницю має інтенсивність охолодження. Найбільший перепад температури досягається в області покриття.

За знайденим температурним полем було розраховано напружений стан у півсмузі з покриттям. При цьому напруження були знерозмірені з використанням коефіцієнта Ляме півсмуги: $\sigma_{k\ell}(\alpha, \gamma, \tau) = \sigma_{k\ell}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)/\mu_2$. На рис. 4 подано результати розрахунку дотичних напружень уздовж поверхні $\alpha = 0.5$ у моменти часу $\tau = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ при значеннях $\gamma_1 = 0.01, 0.1$ відносної товщини покриття.

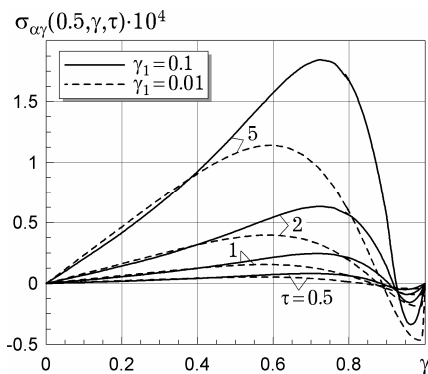


Рис. 4

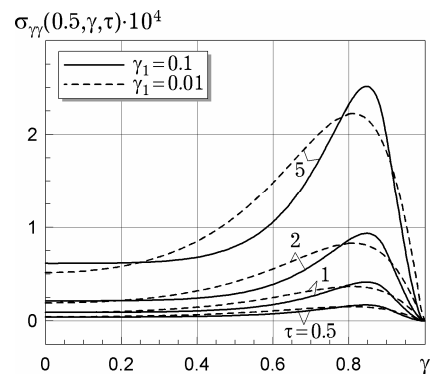


Рис. 5

Як свідчить наведене, вказані напруження набувають максимального за модулем значення в основі ближче до поверхні поділу матеріалів. Зі зменшенням відносної товщини покриття їх рівень у цих областях зменшується, а в областях, що знаходяться безпосередньо біля покриття, зростає. Упродовж всього перехідного періоду дотичні напруження змінюють знак, причому розмір і розміщення області, в якій відбувається зміна знаку, з часом майже не міняється.

На відміну від дотичних напружень, безрозмірні нормальні напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$ у цій області є скрізь розтягувальними (рис. 5), а максимуму досягають приблизно в тих самих областях, що й дотичні напруження. При цьому зміна відносної товщини покриття упродовж всього перехідного процесу має значно менший вплив на їх рівень порівняно із дотичними напруженнями.

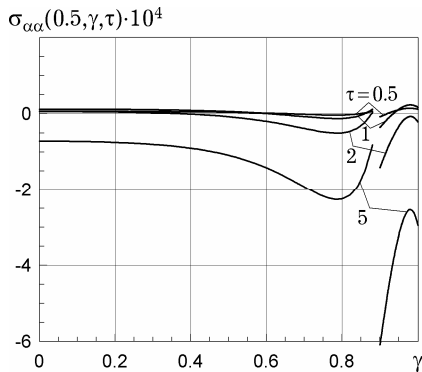


Рис. 6

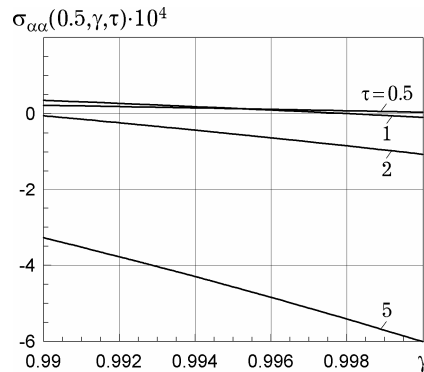


Рис. 7

На тій же лінії $\alpha = 0.5$ розраховано безрозмірні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma, \tau)$ при $\gamma_1 = 0.1$ у моменти часу $\tau = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ (рис. 6). Як бачимо, ці напруження за абсолютним значенням є максимальними в композиті і на лінії поділу матеріалів основи та покриття отримують розрив першого роду, величина якого з часом збільшується. При цьому максимального за модулем значення вказані напруження досягають у покритті і є стискувальними. На рис. 7 показано розподіл напружень $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma, \tau)$ по товщині покриття при $\gamma_1 = 0.01$. Бачимо, що з часом ці напруження зростають за абсолютним значенням і стають стискувальними і хоча характер їх розподілу за товщиною покриття відрізняється від результатів, отриманих при $\gamma_1 = 0.1$, абсолютні величини в обох випадках залишаються співрозмірними.

Таким чином, у цій праці з використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є за просторовою змінною одержано розв'язок квазістатичної задачі термопружності для півсмуги з покриттям із іншого матеріалу, що нагрівається рівномірно розподіленим на торцевій поверхні композитного тіла тепловим потоком та охолоджується за законом Ньютона через поверхні покриттів. Задачу термопружності розв'язано у припущенні, що на торцевій поверхні композита виконуються умови шарнірного закріплення.

Здійснено числовий аналіз задачі у випадку металокерамічного композита для різних значень відносної товщини покриття та інтенсивності охолодження. Встановлено, що збільшення відносної товщини термоізолюючого покриття і, відповідно, зменшення теплових втрат в основі призводить до зростання рівня дотичних напружень в околі лінії поділу матеріалів. У свою чергу, це може спричинити відшарування покриття, що поряд із високим рівнем стискувальних напружень у покритті може призвести до його руйнування через втрату стійкості. З огляду на це залишаються актуальними дослідження, пов'язані з оптимізацією відносної товщини покриття.

1. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева–Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
2. Галазюк О. В., Турчин І. М. Квазістатична плоска неосесиметрична задача термопружності радіально-шаруватого циліндричного тіла // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2007. – Вип. 11, т. 2 (№ 2/2). – С. 58–65.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
5. Процюк Б. В. Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 103–112.
6. Снеддон И. Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
Te same: *Sneddon I. Fourier transforms.* – New York: McGraw-Hill, 1951. – 542 p.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
8. Сулим Г. Основы математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими вклученнями. – Львів: Дослідно-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. Сулим Г. Т., Турчин І. М. Осесиметричний квазістатичний термонапружений стан у півпросторі з покриттям // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 4. – С. 85–95.
Te same: *Sulym H. T., Turchyn I. M. Axisymmetric quasistatic thermal stressed state in a half space with coating* // *J. Math. Sci.* – 2014. – **198**, No. 1. – P. 103–117.
10. Турчин І. Н. Нестационарный торцевой разогрев многослойной полубесконечной плиты // Инж.-физ. журн. – 2012. – **85**, № 6. – P. 1343–1351.
Te same: *Turchyn I. N. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate* // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 2012. – **85**, No. 6. – P. 1453–1462.
11. Belghazi H., El Ganaoui M., Labbe J. C. Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source // *Int. J. Therm. Sci.* – 2010. – **49**, No. 2. – P. 311–318.
12. Kushnir R. M. Generalized conjugation problems in mechanics of piecewise-homogeneous elements of constructions // *Z. angew. Math. Mech.* – 1996. – **76**, No. S5. – P. 283–284.
13. Kushnir R. M. Thermal stresses – Advanced theory and applications // *J. Therm. Stresses.* – 2010. – **33**, No. 1. – P. 76–78.
14. Sugano Y. An expression for transient thermal stress in a nonhomogeneous plate with temperature variation through thickness // *Ing.-Arch.* – 1987. – **57**, No. 2. – P. 147–156.
15. Tamarin Y. Protective coatings for turbine blades. – ASM International, USA, 2002. – vi+248 p.
16. Tanigawa Y. Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials // *Appl. Mech. Rev.* – 1995. – **48**, No. 6. – P. 287–300.
17. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *J. Therm. Stresses.* – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.
18. Taya M., Arsenault R. J. Metal matrix composites – Thermomechanical behavior. – Oxford: Pergamon Press, 1989. – ix+264 p.
19. Wang B. L., Han J. C., Du S. Y. Thermoelastic fracture mechanics for nonhomogeneous material subjected to unsteady thermal load // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2000. – **67**, No. 1. – P. 87–95.
20. Yangjian X., Daihui T., Haiyang D. Convective heat transfer steady heat conduction and thermal stress in a ceramic/FGM/metal composite EFBF plate // *J. Softw.* – 2011. – **6**, No. 2. – P. 201–208.

**ПЕРЕХОДНОЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПОЛУПОЛОСЕ С ПОКРЫТИЕМ,
ОБУСЛОВЛЕННОЕ НАГРЕВОМ ЕЕ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

С использованием интегральных преобразований Лагерра и Фурье построено решение плоской квазистатической задачи термоупругости для полуполосы с покрытием, которая нагревается потоком тепла, действующем на ее торце и охлаждается на свободных от нагрузок поверхностях покрытий. Представлены результаты численного анализа зависимости термонапряженного состояния в металлокерамическом композите от интенсивности охлаждения и относительной толщины покрытий.

**TRANSIENT THERMAL STRESS STATE IN A HALF-STRIP WITH COATING
CAUSED BY HEATING ITS LATERAL SURFACE**

With use of the Laguerre and Fourier integral transforms the solution of plane quasi-static thermoelasticity problem for a half-strip with coating is constructed. The half-strip is subjected to heating by a heat flux at its end and to cooling on the surfaces of coating free from loads. The results of numerical analysis of dependence of thermal stress state in cermet composite on the intensity of process of cooling and relative thickness of the coating are presented.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
18.09.14