УДК 539.3

Д. В. Бабич, А. И. Безверхий, Т. И. Дородных

ВЛИЯНИЕ НАРУШЕНИЯ СПЛОШНОСТИ МАТЕРИАЛА В ВИДЕ РАССЕЯННЫХ МИКРОТРЕЩИН НА ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ

С использованием энергетического метода построена континуальная модель деформирования пьезоэлектрических материалов, ослабленных системой рассеянных по объему микротрещин. В основу энергетического метода принято предположение об эквивалентности энергии деформирования трещиноватой электроупругой среды и моделирующей ее континуальной среды с использованием обобщения принципа Эшелби для определения энергии деформирования микронеоднордных сред с включениями.

Введение. Исследование влияния нарушения сплошности материала в виде рассеянной трещиноватости на деформационные свойства изотропной упругой среды отражены в работах [2, 3, 11, 13, 14–16]. В [3, 11, 13] с применением энергетического метода получены уравнения состояния для изотропного упругого материала при заданном ансамбле микротрещин. Уравнения состояния при прогрессирующем с ростом нагрузки трещинообразовании рассматривались в [2].

В работах [2, 3, 11, 13] использовался энергетический метод, в основу которого полагалось допущение об эквивалентности энергии деформирования трещиноватой упругой среды и моделирующей ее континуальной среды с использованием принципа Эшелби [6] для определения энергии деформирования микронеоднордных сред с включениями.

При соответствующем обобщении указанный подход можно использовать и для описания особенностей деформирования трещиноватых материалов с усложненными физико-механическими свойствами. В настоящей статье предлагается такое обобщение применительно к построению континуальных моделей деформирования хрупких анизотропных электроупругих материалов с учетом нарушения сплошности в виде различных вариантов систем рассеянных по объему микротрещин. Предлагаемое обобщение вызвано особенностями деформирования пьезоелектрических материалов, обусловленными связанностью упругого и электрического полей прямым и обратным пьезоэффектами и в основном касается расширения принципа Эшелби в плане учета энергии освобождения электрической энергии при нарушении сплошности материала. Основой такого расширения является учет в критерии локального разрушения (расслоения) материала явлений прямого и обратного пьезоэффекта.

Континуальные модели строятся в предположении малой концентрации микротрещин, что позволяет считать, что в процессе деформирования они не растут и не взаимодействуют между собой. Плотность (концентрация) микротрещин и функция их распределения по ориентациям считаются заданными и не изменяются с ростом уровня средних однородных напряжений в материале. Для определения плотности микротрещин вводится параметр p, который связан с относительной объемной долей разрушенных структурных элементов в виду близости в реальных материалах характерных размеров структурных элементов и рассеянных микротрещин.

1. Вывод уравнений состояния для трещиноватых электроупругих ортотропных материалов, обладающих пьезоэффектом. Трещиноватый электроупругий материал в общем случае моделируется анизотропной непрерывной средой с уравнениями состояния вида [5, 6]

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijk\ell}\sigma_{k\ell} + d_{kij}E_k, \quad D_i = d_{ijk}\sigma_{jk} + \text{э}_{ij}E_j, \quad i,j,k,\ell = 1,2,3 . \tag{1}$$

Для определения эффективных электроупругих постоянных в соотношениях (1) используется обобщенный энергетический метод [11]. Как и в случае чисто упругих сред [11], в основу энергетического метода построения уравнений состояния для трещиноватых электроупругих сред с заданной концентрацией и ориентацией плоских микротрещин полагается предположение об эквивалентности энергии

$$W = W^{(0)} + \bar{W} . \tag{2}$$

В равенстве (2) через W обозначена плотность энергии непрерывной электроупругой среды [4], моделирующей поврежденный материал:

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + E_j D_j = \frac{1}{2}a^{E}_{ijk\ell}\sigma_{ij}\sigma_{k\ell} + \frac{1}{2}E_i\left(d_{ik\ell}\sigma_{k\ell} + э^{\sigma}_{ik}E_k\right), \tag{3}$$

а через $W^{(0)}$ – плотность энергии сплошной неповрежденной среды:

$$W^{(0)} = \frac{1}{2}a^{E(0)}_{ijk\ell}\sigma_{ij}\sigma_{k\ell} + \frac{1}{2}E_i\left(d^{(0)}_{ik\ell}\sigma_{k\ell} + э^{\sigma(0)}_{ik}E_k\right). \tag{4}$$

Верхние индексы «E», «σ» в соотношениях (4) указывают на зависимость обозначенных параметров от напряженности электрического поля E и механических напряжений σ. В дальнейшем указанные индексы опускаем в виду очевидной связи их значения с индексом «(0)», обозначающим исходные значения соответствующих параметров для сплошной среды. Через $\bar{W}$ в (2) обозначена плотность освобожденной внутренней энергии, которая представляет собой изменение механической и электрической энергии, связанное с поврежденностью материала в виде закрытых либо открытых плоских микротрещин.

В (3), (4) средние однородные макронапряжения $\sigma_{k\ell}$ и компоненты вектора напряженности электрического поля E_j считаются заданными в лабораторной системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с представительным объемом, а макродеформации ε_{ij} являются результатом осреднения, в результате которого находятся эффективные податливости $a_{ijk\ell}$, пьезоэлектрические модули d_{kij} и диэлектрические проницаемости $э_{ij}$ трещиноватого материала.

Ключевым моментом излагаемого подхода к построению уравнений состояния для трещиноватых электроупругих материалов является определение плотностей освобожденной упругой и электрической энергии вследствие нарушения сплошности материала в виде заданного ансамбля плоских трещин определенного очертания и ориентации.

Для достижения указанной цели необходимо найти значение освобождаемой энергии, вызываемое появлением индивидуальной трещины при некотором варианте нагружения среды на бесконечности.

Применительно к неоднородным электроупругим материалам принцип Эшелби модифицируется в связи с необходимостью учета электрической составляющей в общем балансе энергии тела. Для этой цели используется локальный критерий микроразрушения для электроупругих материалов [6]. В итоге значение освобождающейся энергии вследствие потери механической связи между поверхностями индивидуальной n-й трещины в виде работы взаимного смещения поверхностей трещины, вызываемого напряжениями, которые имели бы место при заданной нагрузке в сплошной среде в месте, занимаемой трещиной, а также потери электрической энергии вследствие раскрытия трещины будет определяться выражением

$$\bar{W}^n = \frac{1}{2}\int\limits_{s_n}\sum_{i=1}^{3}\left(\sigma^{(0)n}_{i3}\bar{u}^n_i + D^{(0)n}_i\bar{\Phi}^n_i\right)ds_n . \tag{5}$$

Отметим, что соотношение (5) следует из свойства электроупругой аналогии материалов [9], обладающих пьезоэффектом. В рассматриваемом случае аналогом механических напряжений σ_{ij} и перемещений u_i в электростатике диэлектриков являются электрическое смещение (индукция) D_i и электрический потенциал Φ.

В равенстве (5) обозначено $\bar{u}_i^n$, $i = 1,2,3$, – скачки перемещений в точках поверхностей n-й трещины в направлениях локальной системы координат; s_n – площадь полуповерхности n-й трещины; $\sigma_{i3}^{(0)n}$, $i = 1,2,3$, – компоненты тензора заданных средних по объему напряжений в собственной системе координат $O^n x_1^n x_2^n x_3^n$ n-й трещины. В случае эллиптической трещины оси Ox_1^n и Ox_2^n соответственно направлены по большей (a^n) и меньшей (b^n) полуосям, а ось $O^n x_3^n$ – по нормали к ее плоскости. $D_i^{(0)n}$, $\bar{\Phi}_i^n$, $i = 1,2,3$, – компоненты вектора электрического смещения (индукции) в сплошной среде в системе координат, связанной с трещиной и скачки электрического потенциала в точках поверхностей микротрещины в направлениях осей локальной системы координат.

Первое и второе составляющие в соотношении (5) представляют собой соответственно освобожденную упругую и электрическую энергии вследствие образования одной микротрещины.

Для определения плотности освобожденной упругой энергии для анизотропной среды с некоторым заданным ансамблем микротрещин в идеальном случае требуются аналитические решения задачи о деформировании произвольно ориентированных в анизотропной среде трещин различной геометрии при нормальном раскрытии, поперечном и продольном сдвигах, вызываемых соответствующими воздействиями на бесконечности.

Для трещин в плоскостях, нормальных к плоскости изотропии трансверсально-изотропного материала, указанные решения не построены. В связи с этим для определения энергии освобождения в этом случае ниже предложен приближенный подход.

Существуют три способа определения плотности освобождающейся механической энергии при образовании индивидуальной микротрещины. Поскольку указанная характеристика связана с основными видами деформирования трещины: нормальным раскрытием, продольным и поперечным сдвигами, то для определения освобождающейся энергии, согласно (5), необходимо иметь решение задачи для индивидуальной трещины о распределении перемещений по ее поверхности либо одной из двух эквивалентных задач: определение интенсивности высвобождения энергии G_i^n, $i = 1,2,3$, или коэффициентов интенсивности напряжений K_i^n, $i = 1,2,3$, в трещине при указанных основных видах деформирования, вызываемых нагружением на бесконечности. Если такие решения известны, то для определения значения освобожденной механической энергии при образовании n-й индивидуальной трещины можно воспользоваться выражениями вида [12]

$$\bar{W}_{\text{mech}}^n = \int_{s_n} \sum_{i=1}^{3} G_i^n (a_{k\ell mn}^0, \sigma_{i3}^n, \theta^n, \psi^n, \varphi^n)\, ds_n, \tag{6}$$

или

$$\bar{W}_{\text{mech}}^n = \frac{1}{3} \oint_{c_n} \sum_{i=1}^{3} r S_i (a_{k\ell mn}^0, \theta^n, \psi^n, \varphi^n) (K_i^n)^2\, dc_n\,. \tag{7}$$

В (6), (7) через G_i^n, K_i^n, S_i, $i = 1,2,3$, обозначено соответственно интенсивности высвобождения энергии, коэффициенты интенсивности напряжений и податливости материала в плоскости трещины, определение которых представляют самостоятельные задачи для индивидуальной трещины; через r − расстояние от начала локальной системы координат, связанной с трещиной, до касательной c_n в текущей точке контура трещины; через $a^0_{k\ell mn}$, ϑ^n, ψ^n, φ^n − податливости в сплошной ортотропной среде и углы ориентации трещины в лабораторной системе координат.

С целью упрощения выкладок в дальнейшем ограничимся рассмотрением круговых трещин, имея ввиду также наибольшую степень их влияния на изменение электроупругих параметров по сравнению с влиянием трещин другой геометрии (например, эллиптической) [9].

Представим соотношения (6), (7) для случая образования трещин в плоскости изотропии трансверсально-изотропного материала с коэффициентом Пуассона ν, определяющем относительное удлинение (сокращение) элементов материала в этой плоскости при поперечном сжатии (растяжении). Для круговой трещины радиуса a^n коэффициенты интенсивности напряжений в плоскости изотропии имеют вид [10, 12]

$$K_I = \frac{2\sqrt{a^n}}{\sqrt{\pi}}\sigma^n_{33}, \qquad K_{II} = K_{III} = \frac{4\sqrt{a^n}}{\sqrt{\pi}\,(2-\nu)}\sigma^n_{i3}, \qquad i = 1,2. \tag{8}$$

Высвобождающаяся в этом случае механическая энергия согласно (7), (8) при $dc_n = a^n d\vartheta$ (ϑ − центральный угол в круговой трещине) определяется выражением

$$\bar{W}^n_{\mathrm{mech}} = \frac{1}{3}\oint\limits_{c_n}\sum_{i=1}^{3} a^n (K^n_i)^2 S^n_i(a^0_{k\ell mn}, \vartheta^n, \psi^n, \varphi^n)\, dc_n =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{3} (a^n)^2 \sigma'^2_{i3} S^n_i(a^0_{k\ell mn}, \vartheta^n, \psi^n, \varphi^n) a^n d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{3}(a^n)^3\left(\frac{2}{\pi}S^n_1\sigma'^2_{33} + \frac{4}{\pi}S^n_2(\sigma'^2_{13} + \sigma'^2_{23})\right). \tag{9}$$

Здесь символом σ'_{i3} обозначены местные напряжения в локальной системе координат трещины. Аналогичное соотношение вытекает и из выражения (6) ввиду эквивалентности подходов Гриффитса и Ирвина к описанию явления разрушения в рамках линейной теории [12]. В этом можно убедиться, воспользовавшись для раскрытия соотношения (6) выражением интенсивности высвобождения механической энергии в виде [12]

$$G^n_i = \pi(K^n_i)^2, \qquad S^n_i = \pi a^n (\sigma'_{i3})^2 S^n_i. \tag{10}$$

Необходимо указать на особенность выражения (9), связанную с выделением множителя $\frac{4\pi}{3}(a^n)^3$, представляющим объем сферы, образующейся вращением круговой трещины относительно ее диаметра. Указанный множитель обозначает область возмущения, вносимого трещиной в нагружаемое тело. В дальнейшем с этой величиной и количеством трещин в единице объема N_0 связывается объемная концентрация микротрещин в материале.

Электрическая составляющая энергии высвобождения, согласно [6], имеет место при наличии скачка напряженности электрического поля на берегах трещины, т. е. при ее раскрытии. При продольном и поперечном сдвиге поверхностей закрытой трещины изменение плотности электрической энергии в материале отсутствует в связи с сохранением контакта между берегами трещины.

Второе слагаемое в (5), представляющее изменение плотности электрической энергии при раскрытии трещины, с учетом соотношения $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ [6] преобразуется к виду

$$\bar{W}^{n}_{эл} = \frac{1}{2}\int\limits_{s_n}\sum_{i=1}^{3} D_i^{n(0)}\left(\Phi^{(0)+} - \Phi^{(0)-}\right)_i \, ds_n =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{s_n}\sum_{i=1}^{3} D_i^{n(0)}(x_i^{+} - x_i^{-})\left(\frac{\Phi^{(0)+} - \Phi^{(0)-}}{x_i^{+} - x_i^{-}}\right) ds_n =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{s_n}\sum_{i=1}^{3} D_i^{n(0)} E_i^{n(0)} 2\bar{x}_i \, ds_n = -\frac{1}{2} V_n \sum_{i=1}^{3} D_i^{n(0)} E_i^{n(0)} . \qquad (11)$$

В (11) через V_n, $D_i^{n(0)}$, $E_i^{n(0)}$ обозначено соответственно объем раскрытой трещины, локальные компоненты векторов индукции и напряженности электрического поля в сплошной среде в месте, занимаемой трещиной, а $2\bar{x}_i$ – расстояние между соответствующими точками поверхностей раскрытой трещины в направлениях осей локальной системы координат.

В дальнейшем полагаем, что $V_n \approx \frac{4\pi}{3}(a^n)^3$, т. е. объем раскрытой трещины в рассматриваемом конкретном случае отождествляется с объемом области возмущения круговой трещины. С таким приближением связано максимальное влияние раскрытия трещины на изменение электрических характеристик. Учет истинного раскрытия трещины приводит к зависимости электрических характеристик от уровня нагружения и связан с необходимостью решения задач для трещин в трансверсально-изотропном материале.

В предположении наличия в единичном объеме тела N_0 плоских трещин круговой формы одинаковых либо близких размеров, для которых известна функция распределения по ориентациям $F(\theta, \psi, \varphi)$, суммарное изменение плотности энергии тела за счет трещиноватости можно найти с учетом (10), (11), воспользовавшись известной [11] операцией осреднения по ориентациям трещин

$$\bar{W} = \frac{p}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} F(\theta, \psi, \varphi)\left\{\left[\frac{1}{\pi} S_1' \sigma_{33}'^2 + \frac{2}{\pi} S_2' (\sigma_{13}'^2 + \sigma_{23}'^2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} D_j'^{(0)} E_j'^{(0)}\right]\right\} \sin\theta \, d\theta \, d\psi \, d\varphi . \qquad (12)$$

Здесь параметр $p = N_0 \frac{4\pi}{3}\left\langle a'^3 \right\rangle$ представляет собой объемную концентрацию микротрещин. Штрихом обозначены значения соответствующих параметров в локальных системах координат, связанных с трещинами.

Подставив в (12) выражение компонентов вектора индукции через заданные в представительном объеме упругие σ_{ij}' и электрические E_k' параметры [4]

$$D_i'^{(0)} = d_{ik\ell}^{(0)} \sigma_{k\ell}' + э_{ik}^{(0)} E_k'^{(0)} ,$$

получим окончательное выражение для плотностиособождающейся энергии в виде

$$\bar{W} = \frac{p}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\theta,\psi,\varphi)\Big[\frac{1}{\pi}S_1'\sigma_{33}'^2 + \frac{2}{\pi}S_2'(\sigma_{13}'^2 + \sigma_{23}'^2) -$$

$$- \frac{1}{2}E_i'^{(0)}\big(d_{ik\ell}^{(0)}\sigma_{k\ell}' + э_{ik}^{(0)}E_k'^{(0)}\big)\Big]\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, d\varphi\,, \tag{13}$$

необходимом для определения изменения деформационных и пъезоупругих характеристик материала, обусловленных трещиноватостью материала.

Аналогичное выражение может быть построено для эллиптических и других трещин.

Локальные механические напряжения σ_{i3}', а также компоненты вектора напряженности электрического поля E_i' в области, занимаемой микротрещиной, с соответствующими величинами $\sigma_{k\ell}$ и E_i, заданными в лабораторной системе координат, связаны преобразованиями

$$\sigma_{i3}' = \sigma_{k\ell}\alpha_{ik}\alpha_{3\ell}\,, \tag{14}$$

$$E_i' = E_j\alpha_{ji}\,, \tag{15}$$

где α_{ik}, $\alpha_{3\ell}$ – определяемые углами Эйлера ($0 \le \vartheta \le \pi$ – угол нутации, $0 \le \psi \le 2\pi$ – угол прецессии, $0 \le \varphi \le 2\pi$ – угол собственного вращения) направляющие косинусы собственной системы координат отдельной трещины по отношению к лабораторной системе координат [1]

$$\alpha_{11} = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \qquad \alpha_{13} = \sin\varphi\sin\vartheta\,,$$

$$\alpha_{12} = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \qquad \alpha_{23} = \cos\varphi\sin\vartheta\,,$$

$$\alpha_{21} = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \qquad \alpha_{31} = \sin\psi\sin\vartheta\,,$$

$$\alpha_{22} = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta\,,$$

$$\alpha_{32} = -\cos\psi\sin\vartheta, \qquad \alpha_{33} = \cos\vartheta\,. \tag{16}$$

Эффективные электроупругие постоянные в соотношениях (1) определяем из выражения (2). Для этого составляющие (2) с учетом (13)–(16) записываем в компонентах тензора заданных в представительном объеме механических напряжений σ_{ij} и вектора напряженности электрического поля E_i. Приравнивание коэффициентов при выражениях σ_{ij}^2, $\sigma_{ij}E_i$, E_iE_j дает соотношения для определения эффективных податливостей $a_{ijk\ell}$, пьезомодулей $d_{ik\ell}$ и диэлектрических проницаемостей $э_{ik}$ трещиноватой среды вида

$$a_{ijk\ell} = a_{ijk\ell}^{(0)} + \bar{a}_{ijk\ell}, \qquad d_{ijk} = d_{ijk}^{(0)} + \bar{d}_{ijk}\,,$$

$$э_{ij} = э_{ij}^{(0)} + \bar{э}_{ij}, \qquad i,j,k,\ell = 1,2,3\,, \tag{17}$$

где величины $\bar{a}_{ijk\ell}$, $\bar{d}_{ijk}$, $\bar{э}_{ij}$ представляют собой изменения электроупругих параметров сплошной среды, вызванные трещиноватостью материала.

Технические упругие постоянные через эффективные податливости $\bar{a}_{ijk\ell}$ определяются по формулам

$$\frac{1}{E_{ii}} = a_{iiii}, \qquad -\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = a_{jjii}, \qquad G_{ij} = \frac{1}{a_{ijij}}, \qquad i,j = 1,2,3\,.$$

Связь между эффективными пьезомодулями, упругими податливостями и жесткостями имеет вид $d_{mij} = e_{mk\ell} a_{k\ell ij}$, $e_{mij} = d_{mk\ell} c_{k\ell ij}$. Отметим аналогию полученных соотношений для электроупругих характеристик с таковыми, вытекающими из правила смесей.

Соотношения (1) в сочетании с выражениями (17) представляют собой искомые уравнения состояния континуальной модели трещиноватой электроупругой среды.

Построение указанным способом уравнений состояния для электроупругих трещиноватых сред можно осуществить при наличии информации о концентрации и распределении трещин конкретной геометрической формы в материале, а также замкнутых решений задач о деформировании индивидуальной трещины в ортотропной среде при нормальном раскрытии, поперечном и продольном сдвигах при соответствующих воздействиях на бесконечности.

2. Уравнения состояния трещиноватых пьезокерамических материалов. В связи с тем, что поляризованная пьезокерамика является высокоэффективным пьезоупругим материалом, который широко применяется в разнообразных устройствах автоматики, радиотехники и др. приложениях, целесообразно изложить приведенную выше процедуру составления уравнений состояния для трещиноватых материалов применительно к предварительно поляризованным керамическим материалам, обладающим существенным пьезоэффектом. Поляризованная в определенном направлении пъезокерамика является трансверсально изотропной средой с осью изотропии, совпадающей с осью поляризации. Электроупругие свойства такой среды описываются пятью константами упругости, тремя пьезомодулями и двумя диэлектрическими проницаемостями. В прямоугольной лабораторной системе координат $Ox_1x_2x_3$ уравнения состояния континуальной модели поляризованной в направлении Ox_3 пьезокерамики имеют вид [4, 9]

$$\varepsilon_{11} = a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22} + a_{1133}\sigma_{33} + d_{113}E_3,$$

$$\varepsilon_{22} = a_{1122}\sigma_{11} + a_{1111}\sigma_{22} + a_{1133}\sigma_{33} + d_{113}E_3,$$

$$\varepsilon_{33} = a_{1133}\sigma_{11} + a_{1133}\sigma_{22} + a_{3333}\sigma_{33} + d_{333}E_3,$$

$$\varepsilon_{23} = a_{2323}\sigma_{23} + d_{233}E_2, \qquad \varepsilon_{13} = a_{2323}\sigma_{13} + d_{233}E_1,$$

$$\varepsilon_{23} = a_{1212}\sigma_{12} = 2(a_{1111} - a_{1122})\sigma_{12},$$

$$D_1 = э_{11}E_1 + d_{232}\sigma_{13}, \qquad D_2 = э_{11}E_2 + d_{232}\sigma_{23},$$

$$D_3 = э_{33}E_3 + d_{113}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + d_{333}E_3. \tag{18}$$

Предположим, что в силу технологических особенностей изготовления либо других причин в пьезокерамическом материале образуется поврежденность в виде плоских круговых трещин с известной концентрацией p и функцией их распределения по ориентациям $F(\theta, \varphi, \psi)$.

Для определения эффективных пьезоупругих характеристик континуальной модели трещиноватой пьезокерамики воспользуемся методикой, изложенной в **п. 1.**

Конкретизируем задачу, рассмотрев наиболее вероятные плоскости нарушения сплошности в практике использования пьезокерамических материалов.

В работе [10] показано, что в пьезокерамической аппаратуре типа преобразователей энергии и др. наибольшая вероятность растрескивания пьезокерамических деталей наблюдается в плоскости изотропии и анизотропной плоскости, содержащей ось предварительной электрической поляризации.

При реализации изложенной выше методики построения уравнений состояния в случае сложного напряженного состояния необходимы выражения для плотности освобожденной энергии при образовании в пьезокерамике трещин в указанных плоскостях.

Для определения плотности указанной энергии при образовании круговых трещин в плоскости изотропии применяем соотношение (13) с использованием выражений (7), (8). В результате выражение (13) преобразуем к виду

$$\bar{W} = \frac{p}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(0,\psi,\varphi)\left\{\frac{2}{\pi}\frac{1-(\nu_{12}^0)^2}{E_{1111}^0}\sigma_{33}'^2 + \frac{2}{\pi}\frac{1-(\nu_{12}^0)^2}{E_{1111}^0}(\sigma_{13}'^2+\sigma_{23}'^2) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\left[E_1^{(0)}(э_{11}^{(0)}\,E_1^{(0)} + d_{232}^{(0)}\sigma_{13}) + E_2^{(0)}(э_{11}^{(0)}\,E_2^{(0)} + d_{232}^{(0)}\sigma_{23}) + \right.$$

$$+ E_3^{(0)}(э_{33}^{(0)}\,E_3^{(0)} + d_{113}^{(0)}\sigma_{11} +$$

$$\left.\left. + d_{113}^{(0)}\sigma_{22} + d_{333}^{(0)}\sigma_{33})\right]\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, d\varphi\,. \quad (19)$$

Податливости в плоскости изотропии имеют вид

$$S_1' = \frac{1-(\nu_{12}^0)^2}{E_{1111}^0}, \qquad S_2' = \frac{1-(\nu_{12}^0)^2}{E_{1111}^0(2-\nu_{12}^0)}.$$

Для трещин, расположенных в анизотропной плоскости, содержащей ось поляризации Ox_3, аналитические решения по определению коэффициентов интенсивности напряжений для круговых трещин авторам неизвестны. Поэтому энергию освобождения для круговой трещины в ортотропной плоскости определяем приближенно с использованием соотношений для интенсивностей высвобождения энергии в тоннельной трещине при нормальном раскрытии, поперечном и продольном сдвигах [8]:

$$G_1 = \pi(\sqrt{a}\,\sigma_{33})^2 S_1,$$

$$S_1 = \left(\frac{a_{1111}a_{3333}}{2}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{a_{1111}}{a_{3333}}\right)^{1/2} + \frac{2a_{1122}+a_{1212}}{2a_{3333}}\right]^{1/2},$$

$$G_2 = \pi(\sqrt{a}\,\sigma_{13})^2 S_2,$$

$$S_2 = \frac{a_{3333}}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{a_{1111}}{a_{3333}}\right)^{1/2} + \frac{2a_{1122}+a_{1212}}{2a_{3333}}\right]^{1/2},$$

$$G_3 = \frac{\pi}{2}(\sqrt{a}\,\sigma_{23})^2 S_3, \qquad S_3 = a_{1313}. \quad (20)$$

Здесь a − полудлина тоннельной трещины; σ_{i3} − напряжения на бесконечности; S_i − податливости в плоскости трещины; $a_{ijk\ell}$ − податливости пьезокерамики в лабораторной системе координат; величины G_i представляют собой энергию, необходимую для расслоения единичной площади, содержащей прямолинейный фронт тоннельной трещины, при соответствующем деформировании металлокерамики в области, содержащей край трещины. Чтобы воспользоваться приведенными выражениями для определения энергии освобождения при образовании круговой трещины радиуса a, отождествим интенсивность освобождения поверхностной энергии для прямолинейной трещины с фронтом в виде хорды $x = 2a\sin\vartheta/2$ с энергией освобождения для дуги круговой трещины $s = a\vartheta$, стягиваемой хордой:

$$xG_i = s\bar{G}_i, \qquad 2a\sin\frac{\vartheta}{2}G_i = a\theta\bar{G}_i, \qquad \bar{G}_i = 2G_i\frac{1}{\theta}\sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{21}$$

Здесь G_i – определяемые формулами (20) интенсивности освобождения энергии при образовании тоннельной трещины, $\bar{G}_i$ – приближенное выражение интенсивности высвобождения энергии в круговой трещине.

С учетом (6) и (21) энергия освобождения при образовании круговой трещины, параллельной главной оси ортотропии Ox_3, будет определяться выражением

$$\bar{W}_m^n = 2\pi\int_0^a\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{i3}^2 S_i r^2\frac{\sin\vartheta/2}{\vartheta}\,dr\,d\vartheta = \frac{4\pi}{3}a^3\frac{\mathrm{Si}(\pi)}{2}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{i3}^2 S_i\,. \tag{22}$$

Приемлемость такого подхода подтверждается малым отличием (порядка 5%) точного значения энергии освобождения от полученного рассматриваемым способом для круговых трещин в изотропном материале.

3. Иллюстративный пример. Проиллюстрируем изложенную методику составления уравнений состояния для континуальной модели трещиноватой пьезокерамики на конкретном примере заданного электронапряженного состояния пьезокерамической среды. Предположим, что в плоскости изотропии материала имеется нарушение сплошности в виде плоских круговых трещин с плоскостями, нормальными к оси поляризации ($\theta = 0$). Концентрация микротрещин равна p, а ориентация их по углам θ, φ, ψ задается функцией $F(\theta,\varphi,\psi) = \delta(\theta - 0)$.

Пусть в представительном объеме пьезокерамики заданы средние растягивающие напряжения σ_{11}, σ_{33} и компонента напряженности электрического поля E_3 в направлении оси поляризации.

С учетом выражений (7), (8) локальные напряжения и компоненты напряженности электрического поля в трещинах имеют значения

$$\sigma'_{13} = 0, \qquad \sigma'_{23} = 0, \qquad \sigma'_{33} = \sigma_{33},$$

$$E'_1 = 0, \qquad E'_2 = 0, \qquad E'_3 = E_3.$$

Выражение (19) энергии освобождения принимает вид

$$\bar{W} = \frac{p}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{\pi}\frac{1-(\nu_{12}^0)^2}{E_{1111}^0}\sigma_{33}^2 - \frac{1}{2}\left[E_3^{(0)}(\text{э}_{33}^{(0)}\,E_3^{(0)} + d_{113}^{(0)}\sigma_{11} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + d_{113}^{(0)}\sigma_{22} + d_{333}^{(0)}\sigma_{33})\right]\right\}\sin\theta\,d\theta\,d\psi\,d\varphi\,.$$

В результате интегрирования получаем

$$\bar{W} = p\left\{\frac{1}{\pi}\frac{1-(\nu_{12}^0)^2}{E_{1111}^0}\sigma_{33}^2 - \frac{1}{2}\left[E_3(\text{э}_{33}^{(0)}\,E_3 + d_{113}^{(0)}\sigma_{11} + d_{113}^{(0)}\sigma_{22} + d_{333}^{(0)}\sigma_{33})\right]\right\}.$$

С учетом этого соотношения на основании (2)–(4) для эффективных электроупругих параметров следуют выражения типа (17):

$$a_{3333} = \frac{1}{E_{3333}^0} + p\left[\frac{2}{\pi}\frac{1-(\nu_{12}^0)^2}{E_{1111}^0}\right],$$

$$\text{э}_{33} = (1-p)\text{э}_{33}^0, \qquad d_{113} = (1-p)d_{113}^0, \qquad d_{333} = (1-p)d_{333}^0.$$

Остальные характеристики при рассмотренном варианте нагружения и трещиноватости материала не изменяются.

Полученные выражения для электрических постоянных аналогичны выражениям, которые следуют из правила смесей [6]. Такая аналогия является следствием отождествления объема раскрытия трещин при различных уровнях нагружения трещиноватого материала с областью возмущения $V_n \approx \frac{4\pi}{3}(a^n)^3$, вносимого в материал трещиной радиуса a^n.

Заключение. Предложена методика построения уравнений состояния для трещиноватых электроупругих материалов, обладающих пьезоэффектом. В основу методики положено предположение об эквивалентности энергии деформирования микронеоднородной трещиноватой и моделирующей ее континуальной среды, а также модифицированный вариант принципа Эшелби для определения энергии освобождения при образовании микротрещины.

На примере предварительно поляризованной керамики, ослабленной системой круговых трещин, нормальных к оси поляризации, показано, что нарушение сплошности такого вида приводит к понижению значений пьезомодулей и диэлектрической проницаемости. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными для пористых пьезокерамических материалов, приведенными разработчиком и производителем таких материалов ОАО «ЭЛПА», а также с результатами теоретических и экспериментальных исследований по определению электроупругих характеристик для пьезокерамики различной пористости [12, 13].

1. *Бабич Д. В.* Влияние геометрии плоских микроповреждений материала на его деформационные свойства // Проблемы прочности. – 2011. – № 3. – С. 160–174.
   То же: *Babich D. V.* Geometry effects of plane microdamages on the material deformation behavior // Strength Mater. – 2011. – **43,** No. 3. – P. 352–362.
2. *Бабич Д. В.* Моделирование связанного процесса деформирования и трещинообразования упругохрупких материалов // Проблемы прочности. – 2004. – № 2. – С. 96–105.
   То же: *Babich D. V.* Simulation of coupled processes of deformation and cracking in elastic brittle materials // Strength Mater. – 2004. – **36,** No. 2. – P. 178–184.
3. *Бабич Д. В.* Приближенный учет поврежденности материала в задачах о равновесии упругих оболочек // Проблемы прочности. – 1996. – № 3. – С. 20–30.
   То же: *Babich D. V.* Approximate accounting of material damage in problems of the equilibrium of elastic shells // Strength Mater. – 1996. – **28,** No. 3. – P. 178–185.
4. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.
5. *Кирилюк В. С.* О напряженном состоянии пьезокерамического тела с плоской трещиной при симметричных нагрузках // Прикл. механика. – 2005. – **41,** № 11. – С. 67–77.
   То же: *Kirilyuk V. S.* On the stress state of a piezoceramic body with a flat crack under symmetric loads // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41,** No. 11. – С. 1263–1271.
6. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов / Под. ред. Ю. М. Тарнопольского. – Москва: Мир, 1982. – 334 с.
   То же: *Christensen R. M.* Mechanics of composite materials. – New York: J. Wiley & Sons, 1979. – 348 p.
7. *Наседкин А. В.* Конечно-элементное моделирование пьезоэлектрических генераторов из высокопористой пьезокерамики // Акуст. симп. «КОНСОНАНС-2011» (Київ, 27–29 вер. 2011 р.) – Київ: ІГМ НАН України, 2011. – С. 211–217.
8. *Паньков А. А., Соколкин Ю. В.* Электроупругость пористых пьезокомпозитов // Вест. Перм. гос. техн. ун-та. Сер. Мат. моделирование систем и процессов. – 2002. – № 10. – С. 95–102.
9. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 470 с.
10. *Писаренко Г. Г.* Прочность пьезокерамики. – Киев: Наук. думка, 1987. – 232 с.

11. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149–158.
12. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение / Ред. Г. Либовиц: В 7 т. – Москва: Мир, 1975. – 764 с. – Т. 2: Математические основы теории разрушения. – С. 83–203.
13. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
14. *Mikata Y.* Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, No. 40. – P. 7045–7063.
15. *Suo Z., Kuo C.-M., Barnett D. M., Willis J. R.* Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – **40** No. 4. – P. 739–765.
16. *Xinhua Yang, Guowei Zeng, Weizhong Cao.* Analysis of mechanical and electrical damages in piezoelectric ceramics // In: Piezoelectric Ceramics / Ed. Ernesto Suaste-Gomez. – InTechOpen, 2010. – 302 p. – Chapt. 5. – DOI: 10.5772/9941. http://www.intechopen.com/books/piezoelectric-ceramics/analysis-of-mechanical-and-electrical-damages-in-piezoelectric-ceramics.

ВПЛИВ ПОРУШЕННЯ СУЦІЛЬНОСТІ МАТЕРІАЛУ У ВИГЛЯДІ РОЗСІЯНИХ МІКРОТРІЩИН НА ЕЛЕКТРОПРУЖНІ ПАРАМЕТРИ П'ЄЗОКЕРАМІКИ

З використанням енергетичного методу побудовано континуальну модель деформування п'єзоелектричних матеріалів, послаблених системою розсіяних по об'єму мікротріщин. В основу енергетичного методу покладено принцип еквівалентності енергії деформування тріщинуватого електропружного середовища та середовища, що моделює його як континуальне середовище, з використанням узагальнення принципу Ешелбі для визначення енергії деформування мікронеоднорідних середовищ з включеннями.

EFFECT OF CONTINUITY VIOLATION OF MATERIAL IN THE FORM OF DISPERSED MICROCRACKS ON ELECTROELASTIC PARAMETERS OF PIEZOCERAMICS

The continual model of deformation of the piezoelectric materials weakened by system of microcracks dispersed through volume is constructed with use of a energy method. In the basis of the energy method is laid the equivalence principle of deformation energy of cracked electroelastic medium and medium modeling it as continuum one with use of generalization of the Eshelbi principle for determination of deformation energy for the micrononuniform media with inclusions.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
20.03.14