УДК 539.3

В. Г. Попов

ТРІЩИНА У ВИГЛЯДІ ТРИЛАНКОВОЇ ЛАМАНОЇ ПІД ДІЄЮ ХВИЛІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Розв'язано задачу про визначення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень для тріщини у вигляді ламаної, що складається з трьох ланок. Тріщина міститься у необмеженому пружному середовищі, у якому поширюються гармонічні хвилі поздовжнього зсуву. Вихідну задачу зведено до системи трьох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. Розроблено числовий метод розв'язання цієї системи, що враховує справжню асимптотику невідомих функцій.

На сьогодні існує значна кількість розв'язків двовимірних динамічних задач теорії пружності для тіл з тріщинами у вигляді відрізка прямої або дуги гладкої кривої. Але реальні тріщини можуть мати кутові точки і можуть бути кусково-гладкими, перетинатися і розгалужуватись. Задач про визначення динамічного напруженого стану в околі таких тріщин практично не розв'язували. Це пов'язано з труднощами, які виникають при їх розв'язування поширеним останнім часом методом граничних інтегральних рівнянь і зведенні задач до сингулярних інтегро-диференціальних або гіперсингулярних рівнянь з нерухомими особливостями. Найбільш дослідженими є задачі статики тіл з тріщинами, які мають кутові точки. Перш за все, слід відмітити роботи [2, 13], у яких методом Вінера – Гопфа вдалося отримати точний розв'язок і знайти точне значення КІН. Ці розв'язки, а також результати роботи [3] показують, що наявність ядер з нерухомими особливостями впливає на особливість розв'язків в околах кінців відрізків інтегрування. Напружений стан поблизу розгалужених, ламаних і крайових тріщин визначали також в роботах [5, 10, 12, 14]. При числовому розв'язуванні інтегральних рівнянь у них використовували метод механічних квадратур, який ґрунтується на використанні квадратурних формул Ґаусса – Чебишова, що передумовлює кореневу особливість розв'язків. При цьому справжня асимптотика розв'язку або не враховується, або на розв'язок накладається додаткова умова, яка забезпечує особливість, слабшу від кореневої. Іншим недоліком числових методів, використаних у цих роботах, є формальне застосування до інтегралів з нерухомими особливостями квадратурних формул Ґаусса – Чебишова. В результаті збіжність виявляється досить повільною (для отримання результатів з похибкою, меншою ніж 0.1%, необхідно використати декілька десятків точок колокації).

У цій роботі розв'язано задачу про визначення динамічних КІН для тріщини у вигляді триланкової ламаної при взаємодії з гармонічною хвилею поздовжнього зсуву. Для розв'язання системи трьох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, до яких зведено задачу, запропоновано метод колокацій. У цьому методі враховано справжню особливість розв'язку, а для обчислення інтегралів з нерухомими особливостями використано спеціальні квадратурні формули.

Постановка задачі і зведення її до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Розглядаємо необмежене ізотропне пружне середовище в умовах антиплоскої деформації з наскрізною тріщиною, яка в площині Oxy має вигляд триланкової ламаної (рис. 1). З тріщиною взаємодіє плоска хвиля поздовжнього зсуву, фронт якої утворює кут θ_0 з віссю Ox і викликає у середовищі уздовж осі Oz переміщення

$$W_0^{\text{in}}(x,y) = A_0 \exp\left(i\ae_2(x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0)\right), \quad \ae_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{G}, \tag{1}$$

де G, ρ – модуль зсуву і густина середовища, ω – частота коливань. Залежність від часу визначається множником $e^{-i\omega t}$, який тут і надалі пропускаємо.

Нехай $W(x,y)$ – єдина відмінна від нуля при антиплоскій деформації компонента вектора переміщень. У системі координат Oxy вона задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + æ_2^2 W = 0\,. \qquad (2)$$

Для формулювання граничних умов на тріщині з кожною її ланкою пов'яжемо

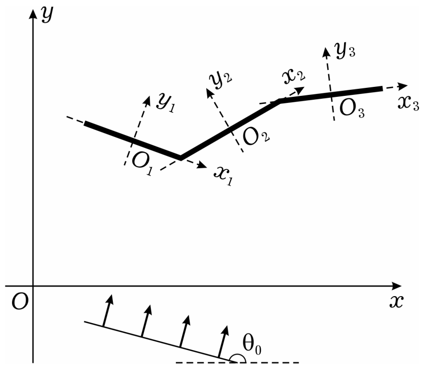

Рис. 1

систему координат $O_\ell x_\ell y_\ell$, $\ell = 1,2,3$, центр якої збігається з серединою ланки. Зв'язок між системами координат задається формулами

$$x_\ell = (x - a_\ell)\cos\alpha_\ell + (y - b_\ell)\sin\alpha_\ell\,, \qquad x = a_\ell + x_\ell\cos\alpha_\ell - y_\ell\sin\alpha_\ell\,,$$
$$y_\ell = -(x - a_\ell)\sin\alpha_\ell + (y - b_\ell)\cos\alpha_\ell\,, \qquad y = b_\ell + x_\ell\sin\alpha_\ell + y_\ell\cos\alpha_\ell\,. \quad (3)$$

Нехай

$$W_\ell(x_\ell, y_\ell) = W(a_\ell + x_\ell\cos\alpha_\ell - y_\ell\sin\alpha_\ell, b_\ell + x_\ell\sin\alpha_\ell + y_\ell\cos\alpha_\ell)$$

– переміщення у системі координат, пов'язаній з ℓ-ю ланкою тріщини. Тоді при відсутності на берегах тріщини навантаження повинні виконуватись рівності

$$\tau_{zy_\ell}(x_\ell, 0) = -\tau_{zy}^{\text{in}}(x_\ell, 0), \qquad x_\ell \in [-d_\ell, d_\ell]\,, \qquad (4)$$

де

$$\tau_{zy_\ell} = G\frac{\partial W_\ell}{\partial y_\ell}, \qquad \tau_{zy_\ell}^{\text{in}} = G\frac{\partial W_\ell^{\text{in}}}{\partial y_\ell}\,.$$

Наявність тріщини приводить до розриву переміщень, для стрибків яких вводимо позначення

$$W_\ell(x_\ell, +0) - W_\ell(x_\ell, +0) = \chi_\ell(x_\ell), \qquad x_\ell \in [-d_\ell, d_\ell], \qquad \ell = 1,2,3\,. \qquad (5)$$

Крім цього, з неперервності переміщень уздовж берега тріщини випливає

$$W_\ell(d_\ell, +0) = W_{\ell+1}(-d_{\ell+1}, +0)\,,$$
$$W_\ell(d_\ell, -0) = W_{\ell+1}(-d_{\ell+1}, -0), \qquad \ell = 1,2\,. \qquad (6)$$

Розв'язування сформульованої задачі (2)–(5) починаємо з побудови у системі координат $O_k x_k y_k$ розривного розв'язку рівняння Гельмгольца для кожної ланки тріщини [8]

$$W_k^d(x_k, y_k) = \frac{\partial}{\partial y_k}\int_{-d_k}^{d_k}\chi_k(\eta) r_2(\eta - x_k, y_k)\,d\eta\,, \qquad (7)$$

де

$$r_2(\eta - x_k, y_k) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(æ_2\sqrt{(\eta - x_k)^2 + y_k^2}\right).$$

Відповідні напруження знаходимо за формулами

$$\tau_{zy_k}^d = -G\int_{-d_k}^{d_k}\chi_k(\eta)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}r_2(\eta - x_k, y_k)\,d\eta -$$
$$- Gæ_2^2\int_{-d_k}^{d_k}\chi_k(\eta)\, r_2(\eta - x_k, y_k)\,d\eta\,,$$

$$\tau_{zx_k}^d = -G\frac{\partial}{\partial y_k}\int_{-d_k}^{d_k}\chi_k(\eta)\frac{\partial^2 r_2}{\partial\eta^2}(\eta - x_k, y_k)\,d\eta, \qquad k = 1,2. \tag{8}$$

Після цього переміщення відбитого хвильового поля подаємо у вигляді

$$W(x,y) = \sum_{k=1}^{3} W_k^g(x,y), \tag{9}$$

де

$$W_k^g(x,y) =$$
$$= W_k^d\big((x-a_k)\cos\alpha_k + (y-b_k)\sin\alpha_k,\ -(x-a_k)\sin\alpha_k + (y-b_k)\cos\alpha_k\big).$$

Щоб остаточно визначити переміщення дифракційного поля, необхідно відшукати невідомі стрибки (5). Для цього слід використати умову (4). Попередньо з (8), (9) знаходимо

$$\tau_{zy_\ell} = \sum_{k=1}^{2}\tau_{zy_\ell}^k, \qquad \tau_{zy_\ell}^k = -\tau_{zx_k}^d\sin\alpha_{\ell k} + \tau_{zy_k}^d\cos\alpha_{\ell k}, \qquad \alpha_{\ell k} = \alpha_\ell - \alpha_k,$$
$$\ell = 1,2,3, \tag{10}$$

і здійснюємо перехід до системи координат, пов'язаної з ℓ-ю тріщиною. Після цього відповідно до (8) доданки у (10) визначаємо за формулами

$$\tau_{zy_\ell}^k(x_\ell, y_\ell) = G\int_{-d_k}^{d_k}\chi_k'(\eta)F_{\ell k}(\eta, x_\ell, y_\ell)\,d\eta +$$
$$+ G\frac{i\varkappa_2^2}{4}\cos\alpha_{\ell k}\int_{-d_k}^{d_k}\chi_k(\eta)H_0^{(1)}\big(\varkappa_2\sqrt{Z_{\ell k}}\big)\,d\eta, \tag{11}$$

де

$$F_{\ell k}(\eta, x_\ell, y_\ell) = \frac{i\varkappa_2}{4}\big(\eta\cos\alpha_{\ell k} - x_\ell - (a_\ell - a_k)\cos\alpha_\ell -$$
$$-(b_\ell - b_k)\sin\alpha_\ell\big)\frac{H_1^{(1)}\big(\varkappa_2\sqrt{Z_{\ell k}}\big)}{Z_{\ell k}},$$

$$Z_{\ell k} = (A_{\ell k} + x_\ell\cos\alpha_{\ell k} - y_\ell\sin\alpha_{\ell k})^2 + (B_{\ell k} + x_\ell\sin\alpha_{\ell k} + y_\ell\cos\alpha_{\ell k})^2,$$

$$A_{\ell k} = (a_\ell - a_k)\cos\alpha_{\ell k} + (b_\ell - b_k)\sin\alpha_{\ell k},$$

$$B_{\ell k} = -(a_\ell - a_k)\sin\alpha_{\ell k} + (b_\ell - b_k)\cos\alpha_{\ell k}.$$

При виведенні (11) в інтегралах, що містять похідні другого порядку, здійснено інтегрування частинами і враховано, що внаслідок (6) позаінтегральні доданки дорівнюють нулеві.

В результаті підстановки (10), (11) у (4) отримуємо систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків (5) і їх похідних. Ця система після вилучення сингулярних складових ядер і низки перетворень має такий вигляд:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{E}{\tau-\zeta} + G(\tau,\zeta) + R(\tau,\zeta)\right)\Phi'(\tau)\,d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\big(-\varkappa_0^2\ln|\tau-\zeta| + U(\tau,\zeta)\big)\Phi(\tau)\,d\tau = F(\zeta), \quad -1<\zeta<1,$$
$$\tag{12}$$

$$\Phi(\tau)=\begin{pmatrix}\varphi_1(\tau)\\ \varphi_2(\tau)\\ \varphi_3(\tau)\end{pmatrix},\qquad \Phi'(\tau)=\begin{pmatrix}\varphi_1'(\tau)\\ \varphi_2'(\tau)\\ \varphi_3'(\tau)\end{pmatrix},$$

$$F(\tau)=\begin{pmatrix}f_1(\tau)\\ f_2(\tau)\\ f_3(\tau)\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$G(\tau,\zeta)=\begin{pmatrix}0 & g_{12}(\tau,\zeta) & 0\\ -g_{21}(\tau,\zeta) & 0 & g_{23}(\tau,\zeta)\\ 0 & -g_{32}(\tau,\zeta) & 0\end{pmatrix},$$

$$R(\tau,\zeta)=\{R_{\ell k}(\tau,\zeta)\},\qquad U(\tau,\zeta)=\{U_{\ell k}(\tau,\zeta)\},\qquad \varphi_\ell(\tau)=d_\ell\chi(d_\ell\tau),$$

$$f_\ell(\zeta)=-i\text{æ}_0C_0\cos(\theta_0)\exp\left(i\text{æ}_0(\varepsilon_\ell\sin\theta_0+\delta_\ell\cos\theta_0+\gamma_\ell\zeta\sin\theta_{0\ell})\right),$$

$$\varepsilon_\ell=a_\ell d^{-1},\quad \delta_\ell=b_\ell d^{-1},\quad \gamma_\ell=d_\ell d^{-1},\quad d=\max(d_\ell),\quad \ell,k=1,2,3,$$

$$C_0=d^{-1}A_0,\qquad \text{æ}_0=\text{æ}_2 d.$$

Ненульовими елементами матриці $G(\tau,\zeta)$ є функції

$$g_{\ell k}(\tau,\zeta)=-\frac{s_{\ell k}\gamma_k\left((1-s_{\ell k}\tau)\cos\alpha_{\ell k}+\gamma_k(1+s_{\ell k}\zeta)\right)}{Q_{\ell k}(\tau,\zeta)},\quad s_{\ell k}=\operatorname{sgn}(\ell-k),\tag{13}$$

де

$$Q_{\ell k}(\tau,\zeta)=\gamma_k^2(1-s_{\ell k}\tau)^2+\gamma_\ell^2(1+s_{\ell k}\zeta)^2+2\gamma_k\gamma_\ell(1-s_{\ell k}\tau)(1+s_{\ell k}\zeta)\cos\alpha_{\ell k},$$

$$k,\ \ell=1,2,3,\qquad k\neq\ell.$$

Як можна бачити, ці функції мають особливості при $\zeta=\pm1$, $\tau=\pm1$. Матриці $R(\tau,\zeta)$ і $U(\tau,\zeta)$ складаються з функцій, що визначають регулярні інтеграли.

Числове розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь. Наявність в сингулярних складових системи (12) нерухомих особливостей впливає на поведінку розв'язків в околі точок ±1. Їх асимптотика в околі цих точок визначається так само як і в [6, 8]. В результаті встановлено, що похідні невідомих функцій слід розшукувати у вигляді

$$\varphi_\ell'(\tau)=(1-\tau)^{-\sigma_{\ell+1}}(1+\tau)^{-\sigma_\ell}\,\psi_\ell(\tau),\qquad \ell=1,2,3,\tag{14}$$

де $\psi_\ell(\tau)$ задовольняють умови Гельдера, а показники степенів визначаються як

$$\sigma_\ell=\frac{\beta_{\ell-1}}{\pi+\beta_{\ell-1}},\quad 0\le\beta_{\ell-1}\le\pi,\quad \sigma_\ell=\frac{2\pi-\beta_{\ell-1}}{3\pi-\beta_{\ell-1}},\quad \pi\le\beta_{\ell-1}\le2\pi,$$

$$\beta_{\ell-1}=|\alpha_\ell-\alpha_{\ell-1}|,\qquad \ell=2,3,\qquad \sigma_1=\sigma_4=0.5.$$

Далі функції $\psi_\ell(\tau)$ апроксимуємо інтерполяційними многочленами [11]

$$\psi_k(\tau)\approx\psi_{n-1}^{(k)}(\tau),\qquad \psi_{n-1}^{(k)}(\tau)=\sum_{m=1}^{n}\psi_{km}\frac{P_{kn}(\tau)}{(\tau-\tau_{km})P_{kn}'(\tau)},$$

$$\psi_{km}=\psi_k(\tau_{km}),\qquad k=1,2,3,\tag{15}$$

де $P_{kn}(\tau)=P_n^{-\sigma_{k+1}-\sigma_k}(\tau)$ – многочлени Якобі, ортогональні з відповідною вагою, а τ_{km} – корені цих многочленів. При поданні похідних невідомих функцій у вигляді (14), (15) для інтегралів з ядром Коші використовуємо квадратурну формулу [1]

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_k'(\tau)}{\tau - \zeta_{kj}}\, d\tau = \sum_{m=1}^{n} A_{km} \frac{\psi_{km}}{\tau_{km} - \zeta_{kj}},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n_k, \quad n_1 = n_3 = n, \quad n_2 = n + 1. \qquad (16)$$

У формулі (16) ζ_{kj}, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$, – нулі функцій Якобі другого роду $J_n^{-\sigma_{k+1} - \sigma_k}(\tau)$, а A_{km} – коефіцієнти відповідних квадратурних формул Ґаусса – Якобі [4].

Далі аналогічні формули необхідно отримати для інтегралів з нерухомими особливостями

$$E_{\ell k}^{j} = \int_{-1}^{1} \varphi_k'(\tau) g_{\ell k}(\tau, \zeta_{\ell j})\, d\tau, \qquad \ell, k = 1, 2, 3, \qquad \ell \neq k. \qquad (17)$$

Якщо $1 \pm \zeta > \varepsilon > 0$, то функції $g_{\ell k}(\tau, \zeta)$, як можна бачити з (13), є нескінченно диферецційовними і до інтегралів (17) можна застосувати квадратурні формули Ґауса – Якобі. Головна складність пов'язана з обчисленням цих інтегралів при $1 \pm \zeta \to 0$. Для цього використаємо подання (13)–(15) і здійснимо перетворення

$$\frac{g_{\ell k}(\tau, \zeta)}{\tau - \tau_{km}} = \frac{g_{\ell k}(\tau_{km}, \zeta)}{\tau - \tau_{km}} + \frac{s_{\ell k} \gamma_k^2}{q_{\ell k}(\tau_{km}, \zeta)} \big((1 + s_{\ell k} \tau_{km}) g_{\ell k}(\tau, \zeta) -$$

$$- (1 - s_{\ell k} \zeta)\, g_{k\ell}(\zeta, \tau)\big), \qquad \ell, k = 1, 2, 3, \qquad \ell \neq k. \qquad (18)$$

Далі після підстановки (14), (15), (18) у (17) інтеграл від першого доданка обчислюємо формулою

$$\int_{-1}^{+1} (1 - \tau)^{-\sigma_{k+1}} (1 + \tau)^{-\sigma_k} \frac{P_{kn}(\tau)}{\tau - \tau_{km}}\, d\tau = A_{km} P_{kn}'(\tau_{km}), \qquad k = 1, 2, 3. \qquad (19)$$

Аналогічні інтеграли з функціями $g_{\ell k}(\tau, \zeta)$ і $g_{k\ell}(\zeta, \tau)$ знаходимо методом для обчислення інтегралів з ортогональними многочленами [9], який ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Мелліна. Остаточні формули для обчислення інтегралів з нерухомими особливостями мають вигляд

$$E_{\ell k}^{j} = \sum_{m=1}^{n} \psi_{km} \frac{D_{jm}^{\ell k}}{Q_{\ell k}(\tau_{km}, \zeta_{\ell j})}, \qquad \ell, k = 1, 2, 3, \qquad \ell \neq k, \qquad (20)$$

де

$$D_{jm}^{\ell k} = - s_{\ell k} A_{km} \gamma_k \big(\gamma_k (1 - s_{\ell k} \tau_{km}) \cos \beta + \gamma_\ell (1 + s_{\ell k} \zeta_{\ell j})\big),$$

$$1 + s_{\ell k} \zeta_{\ell j} > \varepsilon > 0,$$

$$D_{jm}^{\ell k} = - s_{\ell k} A_{km} \gamma_k \big(\gamma_k (1 - s_{\ell k} \tau_{km}) \cos \alpha_{\ell k} + \gamma_\ell (1 + s_{\ell k} \zeta_{\ell j})\big) -$$

$$- \frac{\gamma_k s_{\ell k} (-1)^{nk}}{P_{kn}'(\tau_{\ell m})} \left(\gamma_k (1 - s_{\ell k} \tau_{km}) B_n^{(1)} \left(\frac{\gamma_\ell (1 + s_{\ell k} \zeta_{\ell j})}{2 \gamma_k} \right) + \right.$$

$$\left. + \gamma_\ell (1 + s_{\ell k} \zeta_{\ell j}) B_n^{(2)} \left(\frac{\gamma_\ell (1 + s_{\ell k} \zeta_{\ell j})}{2 \gamma_k} \right) \right), \qquad 0 \le 1 + s_{\ell k} \zeta_{\ell j} < \varepsilon,$$

$$B_{kn}^{(p)}(y)=\frac{\Gamma(1-\sigma_{k+1}+n)}{n!\,2^{\sigma_{k+1}+\sigma_k}}\left[-\frac{\sin\pi(\sigma_{k+1}+\sigma_k)}{\sin\pi\sigma_{k+1}}\sum_{s=0}^{\infty}c_{sk}y^s\cos\beta(s+2-p)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\pi\sigma_k}{\sin\pi\sigma_{k+1}}\sum_{s=0}^{\infty}d_{sk}y^{-\sigma_{k+1}+s}\cos\beta(\sigma_{k+1}-s-2+p)\right],\quad p=1,2,$$

$$c_s=\frac{(-1)^s(n+s)!\,\Gamma(\sigma_{k+1}+\sigma_k-n+s)}{s!\,\Gamma(1+s+\sigma_{k+1})},$$

$$d_s=\frac{(-1)^s\Gamma(1-s+n+\sigma_{k+1})\Gamma(\sigma_k-n+s)}{s!\,\Gamma(1+s-\sigma_{k+1})}.$$

Оскільки система (12) містить і самі функції $\varphi_\ell(\tau)$, $\ell=1,2,3$, то необхідно отримати квадратурні формули для відповідних інтегралів. Для цього спочатку використаємо очевидні формули

$$\varphi_k(\tau)=\varphi_k(-1)+\int_{-1}^{\tau}\varphi_k'(x)\,dx,\qquad \varphi_k(\tau)=\varphi_k(1)-\int_{\tau}^{1}\varphi_k'(x)\,dx. \tag{21}$$

Далі використаємо (14), (15) і тотожність Дарбу – Крістофеля для ортогональних многочленів [11]:

$$\frac{P_{kn}(\tau)}{\tau-\tau_{km}}=A_{km}P_{kn}'(\tau_{km})\sum_{j=0}^{n-1}\frac{P_{kj}(\tau_{km})P_{kj}(\tau)}{s_{kj}^2}, \qquad (22$$

де

$$s_{kj}^2=\frac{2^{1-\sigma_{k+1}-\sigma_k}\Gamma(1-\sigma_{k+1}+j)\Gamma(1-\sigma_k+j)}{(1-\sigma_k-\sigma_{k+1}+2j)\Gamma(1-\sigma_k-\sigma_{k+1}+2j)},\qquad k=1,2,3.$$

Тепер після підстановки (14), (15) і (22) у (21) та інтегрування отримаємо наступні наближені формули для невідомих функцій:

$$\varphi_k(\tau)=\varphi_k(\pm1)+(1\pm\tau)^{1-\sigma_k^{\mp}}\sum_{m=1}^{n}A_{km}S_{km}^{\mp}(\tau),\quad \sigma_k^-=\sigma_k,\quad \sigma_k^+=\sigma_{k+1}, \tag{23}$$

де

$$S_{km}^{\mp}=s_{k0}^{-2}F_k^{\mp}(\tau)-(1\mp\tau)^{1-\sigma_k^{\pm}}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{P_{kj-1}^{(1)}(\tau)P_{kj}(\tau_{km})}{2js_{kj}^2},$$

$$F_k^{\mp}(\tau)=\frac{F\left(\sigma_k^{\pm},1-\sigma_k^{\mp},2-\sigma_k^{\mp},\dfrac{1\pm\tau}{2}\right)}{2^{\sigma_k^{\pm}}(1-\sigma_k^{\mp})}.$$

Подання (23) є основою для наступних квадратурних формул з невідомими функціями:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_k(\tau)U_{\ell k}(\tau,\zeta_{\ell j})\,d\tau=\varphi_k(\pm1)U_{\ell k}^{j}+\sum_{m=1}^{n}A_{km}\psi_{km}U_{\ell kj}^{\pm}, \tag{24}$$

де

$$U_{\ell k}^{j}=\sum_{p=1}^{n}A_{0p}U_{\ell k}(z_{0p},\zeta_{\ell j}),\qquad A_{0p}=\frac{2}{(1-z_{0p}^2)(P_n'(z_{0p}))^2},$$

$P_n(z)$ – многочлени Лежандра, z_{0p} – корені цих многочленів,

$$U_{\ell kj}^{\pm} = \sum_{p=1}^{n} A_{kp}^{\pm} S_{km}^{\pm}(z_{kp}^{\pm}) U_{\ell k}(z_{kp}^{\pm}, \zeta_{\ell j}),$$

$$A_{kp}^{\pm} = \frac{2^{\sigma_k^{\pm}}}{(1-(z_{kp}^{\pm})^2)(P_n'^{\pm}(z_{kp}^{\pm}))^2},$$

$P_n^-(z) = P_n^{01-\sigma_k^-}(z)$, $P_n^+(z) = P_n^{1-\sigma_k^+ 0}(z)$ – многочлени Якобі, $z_{kp}^{\pm}$ – корені цих многочленів.

Для інтегралів з логарифмічним різницевим ядром в результаті інтегрування частинами і використання подань (14), (15) для похідних невідомих функцій виведено наступні квадратурні формули

$$\int_{-1}^{1} \varphi_\ell(\tau) \ln|\tau - \zeta_{\ell j}| \, d\tau = \varphi_\ell(\pm 1) h_{\ell j} + \sum_{m=1}^{n} A_{\ell m} H_{\ell jm}^{\pm} \psi_{\ell j}, \tag{25}$$

де

$$h_{\ell j} = (1-\zeta_{\ell j})(\ln(1-\zeta_{\ell j}) - 1) + (1+\zeta_{\ell j})(\ln(1+\zeta_{\ell j}) - 1),$$

$$H_{\ell jm}^{\pm} = \mp(1-\zeta_{\ell j})(\ln(1-\zeta_{\ell j}) - 1) - (\tau_{\ell m} - \zeta_{\ell j})(\ln|\tau_{\ell m} - \zeta_{\ell j}| - 1).$$

Застосування квадратурних формул (16), (20), (24), (25), квадратурних формул Ґаусса – Якобі і використання коренів многочленів Якобі як точок колокації зводить (12) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\psi_2(-1)$, ψ_{km}, $k = 1,2,3$. Після розв'язання цієї системи наближені значення КІН розраховуємо за формулами

$$K^- = -G\sqrt{d_1} \cdot 2^{-(1+\sigma_2)} P_{1n}(-1) \sum_{m-1}^{n} \frac{\psi_{1m}}{P_{1n}'(\tau_{1m})(1+\tau_{1m})},$$

$$K^+ = -G\sqrt{d_3} \cdot 2^{-(1+\sigma_3)} P_{3n}(1) \sum_{m-1}^{n} \frac{\psi_{3m}}{P_{3n}'(\tau_{3m})(1+\tau_{3m})}. \tag{26}$$

Результати числового аналізу і висновки. При проведенні числової реалізації, по-перше, ставилась мета дослідити практичну збіжність запропонованого методу числового розв'язання. Для цього розглянуто тріщину наступної (див. рис. 2) конфігурації. Приймаємо таке співвідношення між довжинами ланок: $d_2 = 3d_1 = 3d_3$.

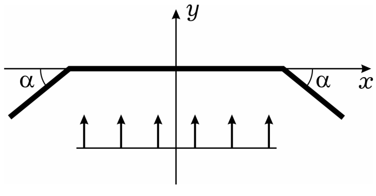

Рис. 2

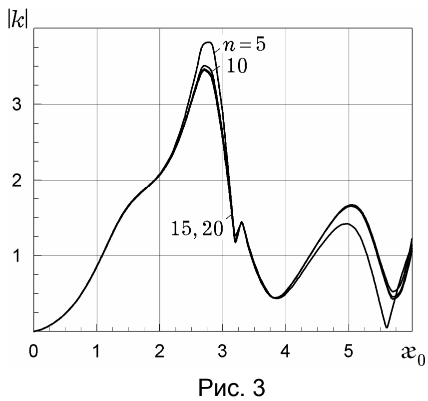

Рис. 3

За формулами (26) розраховано безрозмірні значення КІН $k^- = K^-/G\sqrt{d_1}$, $k^+ = K^+/G\sqrt{d_3}$. Причому внаслідок симетрії маємо, що $k^+ = k^- = k$. Обчислення виконано при значенні кута $\alpha = 45°$.

Результати обчислень наведено у вигляді графіків залежності абсолютної величини КІН від безрозмірного хвильового числа $æ_0 = æ_2 d$. Значення $n = 5, 10, 15, 20$ відповідають кількості вузлів інтерполяції у формулі (15). Можна бачити, що для отримання значень КІН з похибкою, що не перевищує $0.1\,\%$, вистачає до 20 вузлів інтерполяції у (15). А для хвиль з малою частотою $æ_0 \le 2$ достатньо і 5 вузлів.

Виконано дослідження впливу форми тріщини на значення КІН на прикладі тріщини, зображеної на рис. 4. Співвідношення між довжинами ланок таке ж, як і в попередньому випадку. Здійснено числове дослідження впливу значення кута β на залежність КІН від частоти. Результати розрахунків наведено на рис. 5 (для $\beta = 0, 30, 45, 60\,°$) і рис. 6 (для $\beta = 90, 120, 135, 150\,°$). Можемо бачити, що при гострих кутах β найбільші значення КІН має прямолінійна тріщина ($\beta = 0\,°$) і при збільшенні цього кут значення КІН зменшуються і є мінімальними у випадку, коли ланки тріщини перпендикулярні.

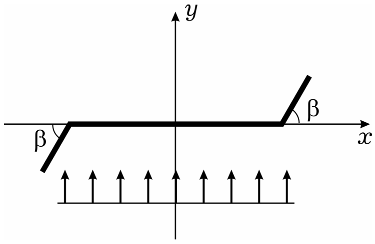

Рис. 4

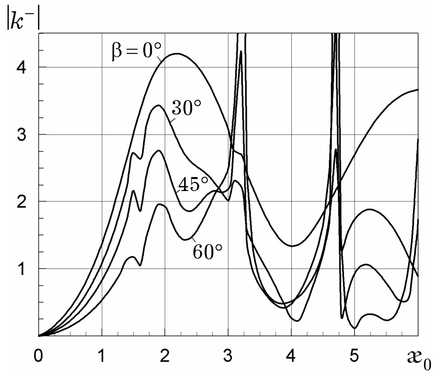

Рис. 5

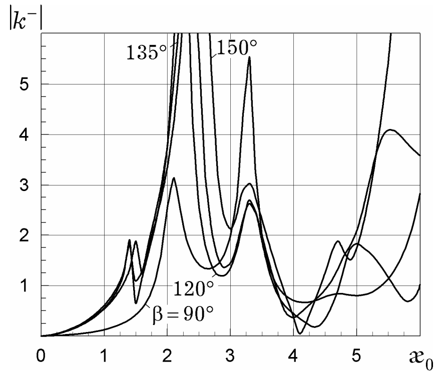

Рис. 6

При подальшому збільшенні кута між ланками КІН мають тенденцію до зростання і перевищують значення, що відповідають прямолінійній тріщині. В цілому внаслідок складності хвильового поля, створеного відбиттям хвиль від ланок тріщини, залежність КІН від частоти має істотні максимуми, на величину і положення яких впливає конфігурація тріщини.

1. *Андреев А. Р.* Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 126–146.
   Те саме: *Andreev A. V.* Direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels // Mech. Solids. – 2005. – **40**, No. 1. – P. 104–119.
2. *Афян Б. А.* Об интегральных уравнениях с неподвижными особенностями в теории ветвящихся трещин // Докл. АН АрмССР. – 1984. – **79**, № 4. – С. 177–181.
3. *Дудучава Р. В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбилис. мат. ин-та им. А. М. Разматзе АН ГССР. – 1979. – **60**. – 135 с.

4. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
5. *Осив П. Н., Саврук М. П.* Определение напряжений в бесконечной пластине с ломаной или ветвящейся трещиной // Прикл. механика и техн. физика. – 1983. – № 2. – С. 142–147.
   Те саме: *Osiv P. N., Savruk M. P.* Determination of stresses in an infinite plate with broken or branching crack // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 1983. – **24,** No. 2. – P. 266–271.
6. *Попов В. Г.* Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде // Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэродинамики и теории упругости. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1986. – С. 121–127.
7. *Попов В. Г.* Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.
8. *Попов В. Г.* Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 205–208.
9. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
10. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
11. *Сёге Г.* Ортогональные многочлены. – Москва: Физматгиз, 1962. – 501 с.
12. *Isida M., Noguchi H.* Stress intensity factors at tips of branched cracks under various loadings // Int. J. Fract. – 1992. – **54**, No. 4. – P. 293–316.
13. *Vitek V.* Plane strain stress intensity factors for branched cracks // Int. J. Fract. – 1977. – **13**, No. 4. – P. 481–501.
14. *Xiangqiao Yan.* Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack-tip displacement discontinuity elements // Mech. Res. Commun. – 2005. – **32**, No. 4. – P. 375–384.

ТРЕЩИНА В ВИДЕ ТРЕХЗВЕННОЙ ЛОМАНОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЛНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Решена задача определения динамических коэффициентов интенсивности напряжений для трещины в виде ломаной, состоящей из трех звеньев. Трещина расположена в неограниченной упругой среде, в которой распространяются гармонические волны продольного сдвига. Исходная задача сведена к системе трех сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с неподвижными особенностями. Разработан численный метод решения этой системы, учитывающий действительную асимптотику неизвестных функций.

A CRACK OF THE SHAPE OF THREE SEGMENTS BROKEN LINE UNDER ACTION OF LONGITUDINAL SHEAR WAVE

The problem on determination of the dynamical stress intensity factors for a crack of the shape of three-segment broken line is solved. The crack is located in an infinite elastic medium in which the longitudinal shear harmonic waves are propagated. The initial problem is reduced to a system of three singular integro-differential equations with fixed singularities. A numerical method of the solution of this system with account the real asymptotic of the unknown functions is developed.

Одеська нац. морська акад., Одеса
Одержано
16.09.14