

## ДУГОВА ТРІЩИНА В ОДНОРІДНОМУ ЕЛЕКТРОСТРИКЦІЙНОМУ МАТЕРІАЛІ

Розглядається задача про визначення напружено-деформованого стану пружної електрострикційної площини з дуговою тріщиною під дією електричних і механічних зусиль, прикладених на нескінченності, які можуть бути довільним чином орієнтовані відносно осі тріщини. Задачу зведено до задачі лінійного спряження для кусково-аналітичної функції комплексної змінної. Отримано її точний аналітичний розв'язок. Знайдено аналітичні вирази, що визначають напруження у будь-якій точці середовища, розкриття тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень у її вершинах.

**Вступ.** У сучасних технологіях останнім часом широкого розповсюдження набули електрострикційні матеріали, зокрема сегнетоелектричні релаксори. Це пов'язано, в першу чергу, з тим, що порівняно недавно було створено матеріал  $\text{PbMg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3}\text{O}_3$  (PMN), для якого електрострикційний ефект є близьким до п'єзоелектричного. У [5] вказано, що в електрострикційних матеріалах під дією високого електричного та механічного навантаження можуть появлятися тріщини. Це зумовлює важливість вивчення поведінки електрострикційних матеріалів за наявності тріщин під дією електричного та механічного навантажень.

Визначальні співвідношення для електрострикційних матеріалів у загальному випадку є досить складними та вимагають розв'язання зв'язаної задачі електропружності, що пов'язано зі значними математичними труднощами. Однак у випадку малих деформацій визначальні співвідношення можна спростити так, щоб задача електропружності стала незв'язаною. Для цього випадку у [7] і пізніше у [6] було розроблено аналоги співвідношень Колосова – Мусхелішвілі, що враховують електрострикцію.

У статті [8] проведено аналіз електрострикційного тіла з дуговою тріщиною для електричного навантаження на нескінченності, що діє паралельно до осі симетрії тріщини.

У цьому дослідженні знайдено точний аналітичний розв'язок задачі для дугової тріщини в електрострикційному тілі під дією механічного навантаження і довільно орієнтованого електричного поля. Знайдено напруження на продовженні тріщини, її розкриття і коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини.

**Постановка задачі.** Розглядаємо ізотропну площину з розрізом уздовж дуги  $r = a$ ,  $|\theta| < \beta$ , причому вважаємо, що береги тріщини не взаємодіють один з одним. Пружні властивості матеріалу характеризуються модулем зсуву  $\mu$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ , а електрострикційні властивості – сталими  $a_1$  і  $a_2$ . Діелектрична проникність матеріалу становить  $\epsilon_m$ , діелектрична проникність наповнювача тріщини дорівнює  $\epsilon_c$ .

На нескінченності діють головні напруження  $N_1$  і  $N_2$ , причому кут між напрямом  $N_1$  і віссю  $Ox$  дорівнює  $\gamma$ . Також на нескінченності діє електричне поле з вектором напруженості, що дорівнює за модулем  $E_0$  і направлений під кутом  $\alpha$  до осі  $Ox$  (див. рис. 1).

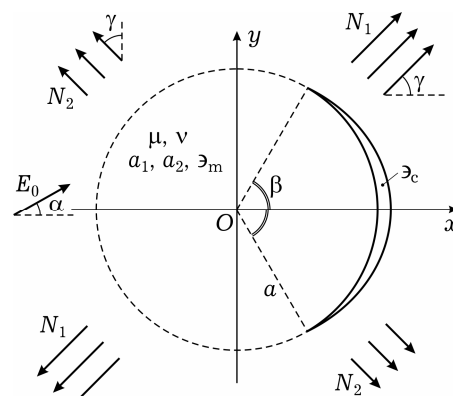


Рис. 1

Необхідно визначити нормальне напруження  $\sigma_{rr}$  і дотичне напруження  $\sigma_{r\theta}$  на дузі  $r = a$ ,  $\beta < |\theta| \leq \pi$ , розкриття тріщини  $\Delta(\theta)$  при  $|\theta| \leq \beta$  і коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_1^\pm$ ,  $K_2^\pm$  у вершинах тріщини.

У математичному плані ця задача зводиться до незв'язаної задачі електропружності. Рівняння електростатики мають такий вигляд [3, §3.1], [5–8]:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_m &= 0 & \text{при} & \quad 0 \leq r < \infty, \quad \beta < |\theta| \leq \pi, \\ \Delta\varphi_c &= 0 & \text{при} & \quad r = a, \quad |\theta| \leq \beta, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\varphi_m, & \mathbf{E}_c &= -\nabla\varphi_c, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_m \mathbf{E}, & \mathbf{D}_c &= \varepsilon_c \mathbf{E}_c,\end{aligned}$$

де  $\varphi_m$  та  $\varphi_c$  – потенціали електростатичного поля,  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{E}_c$  – напруженість електростатичного поля,  $\mathbf{D}$  та  $\mathbf{D}_c$  – електрична індукція в матеріалі та тріщині відповідно.

Електростатичні граничні умови на нескінченності запишемо так:

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_1 E_0 \cos \alpha + \mathbf{i}_2 E_0 \sin \alpha \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

У [3, §3.2] вказано, що при переході через будь-яку поверхню тангенціальна компонента напруженості електричного поля залишається незмінною, а стрибок нормальної компоненти вектора електричної індукції задається поверхневою густиною заряду. Звідси випливає, що електростатичні граничні умови на тріщині мають вигляд [5, 6, 8]

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} \quad \text{при} \quad r = a, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (2)$$

де  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1 \cos \theta + \mathbf{i}_2 \sin \theta$  – вектор зовнішньої одиничної нормалі до лінії тріщини,  $\mathbf{t} = -\mathbf{i}_1 \sin \theta + \mathbf{i}_2 \cos \theta$  – одиничний вектор дотичної до лінії тріщини.

Рівняння лінійної теорії пружності для електрострикційного матеріалу є такими [3, §2.22], [6, 8]:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{F} &= 0, \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u})^\top + (\nabla \mathbf{u})), \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= 2\mu \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \hat{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) - \frac{1}{2} (a_1 \mathbf{E} \mathbf{E} + \hat{\boldsymbol{\gamma}} a_2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})).\end{aligned}$$

Тут  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  – одиничний тензор,  $\rho \mathbf{F} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^M$  – об'ємні сили,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^M = \varepsilon_m \left( \mathbf{E} \mathbf{E} - \hat{\boldsymbol{\gamma}} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right).$$

Механічні граничні умови на нескінченності запишемо так:

$$\mathbf{n}_\gamma \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_\gamma = N_1, \quad \mathbf{n}_{\gamma+\pi/2} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_{\gamma+\pi/2} = N_2, \quad \mathbf{n}_{\gamma+\pi/2} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут  $\mathbf{n}_\gamma = \mathbf{i}_1 \cos \gamma + \mathbf{i}_2 \sin \gamma$ ,  $\mathbf{n}_{\gamma+\pi/2} = -\mathbf{i}_1 \sin \gamma + \mathbf{i}_2 \cos \gamma$ .

Оскільки береги тріщини вільні від механічних навантажень, з наведеного в [3, §2.24], [6, 8] випливає, що механічні граничні умови на тріщині можемо записати таким чином:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+ \cdot \mathbf{n} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^- \cdot \mathbf{n} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c^M \cdot \mathbf{n} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^M \cdot \mathbf{n} \quad \text{при} \quad r = a, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (4)$$

де  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_c^M = \varepsilon_c \left( \mathbf{E}_c \mathbf{E}_c - \hat{\boldsymbol{\gamma}} \frac{1}{2} (\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c) \right)$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^+$  – тензор напружень Коші на внутрішньому березі тріщини,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^-$  – тензор напружень Коші на зовнішньому березі

тріщини. У співвідношенні (4) враховано, що стрибок суми вектора механічних напружень  $\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  на площинці і вектора напружень Максвелла  $\hat{\sigma}^M \cdot \mathbf{n}$  задається інтенсивністю механічного навантаження, прикладеного до цієї площинки. При цьому, оскільки наповнювачем тріщини є повітря, то його механічне напруження дорівнює нулеві. Надалі для зручності будемо застосовувати позначення  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^M$ .

Для плоскої задачі електропружності виведено співвідношення, аналогічні до формул Колосова – Мусхелішвілі. Задача зводиться до визначення невідомих комплексних потенціалів, аналітичних у певних областях [5–8].

Для задачі електростатики маємо

– на всій комплексній площині:

$$E_1 + iE_2 = \overline{w'(z)}; \quad (5)$$

– при  $r = a$ ,  $|\theta| \leq \beta$ :

$$E_{c1} + iE_{c2} = \overline{w'_c(z)}, \quad (6)$$

де функція  $w'(z)$  є аналітичною в усій комплексній площині, а функція  $w'_c(z)$  є аналітичною у деякому околі тріщини [5–8].

Електростатичні граничні умови (1), (2) набувають такого вигляду:

$$E_1 + iE_2 = E_0 e^{i\alpha} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$\varepsilon_m (E_1 \cos \theta + E_2 \sin \theta) = \varepsilon_c (E_{c1} \cos \theta + E_{c2} \sin \theta) \quad \text{при} \quad r = a, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (8)$$

$$E_1 \sin \theta - E_2 \cos \theta = E_{c1} \sin \theta - E_{c2} \cos \theta \quad \text{при} \quad r = a, \quad |\theta| \leq \beta. \quad (9)$$

Аналоги співвідношень Колосова – Мусхелішвілі запишемо так:

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left( \alpha\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \chi\overline{W(z)} - \frac{k}{2}w(z)\overline{w'(z)} \right), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr} + i\tilde{\sigma}_{r\theta} &= \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - \bar{z}\overline{\varphi''(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\psi'(z)} + \\ &+ \frac{k}{2} \left( w'(z)\overline{w'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}w(z)\overline{w''(z)} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_{rr}^M + i\sigma_{r\theta}^M = \frac{\varepsilon_m}{2} \frac{\bar{z}}{z} \overline{W'(z)}, \quad \sigma_{crr}^M + i\sigma_{cr\theta}^M = \frac{\varepsilon_c}{2} \frac{\bar{z}}{z} \overline{W'_c(z)}, \quad (12)$$

де

$$W'(z) = [w'(z)]^2, \quad W'_c(z) = [w'_c(z)]^2, \quad \chi = \frac{a_1 - 2\varepsilon_m}{4};$$

– для плоского деформованого стану:

$$\alpha = 3 - 4\nu \quad \text{і} \quad k = -\frac{(1 - 2\nu)(a_1 + 2a_2)}{4(1 - \nu)};$$

– для плоского напруженого стану [5–8]:

$$\alpha = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{і} \quad k = -\frac{(1 - \nu)a_1 + 2(1 - 2\nu)a_2}{4}.$$

Функції  $\varphi'(z)$  та  $\psi'(z)$  є аналітичними в усій комплексній площині з розрізом уздовж дуги  $r = a$ ,  $|\theta| \leq \beta$  [2, §31].

Механічні граничні умови (3), (4) набувають вигляду

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} e^{2i(\gamma - \theta)} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (13)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^+ + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^+ = \tilde{\sigma}_{rr}^- + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^- = \sigma_{crr}^M + i\sigma_{cr\theta}^M \quad \text{при} \quad r = a, \quad |\theta| \leq \beta. \quad (14)$$

**Розв'язання граничної задачі електростатики.** Запишемо граничні умови (8), (9) на тріщині через комплексні потенціали, застосовуючи рівняння (5), (6). Нескладно помітити, що, оскільки граничні умови формулюються при  $z = ae^{i\theta}$ , вони мають такий вигляд:

$$\operatorname{Re}[zw'_c(z)] = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} \operatorname{Re}[zw'(z)],$$

$$\operatorname{Im}[zw'_c(z)] = \operatorname{Im}[zw'(z)] \quad \text{при} \quad r = a, \quad |\theta| \leq \beta.$$

Враховуючи, що на дузі тріщини  $\bar{z} = \frac{a^2}{z}$ , з цих умов отримуємо

$$w'_c(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} + 1 \right) w'(z) + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} - 1 \right) \frac{a^2}{z^2} \bar{w}' \left( \frac{a^2}{z} \right).$$

З граничної умови (7) на нескінченності випливає, що при  $r \rightarrow \infty$

$$w'(z) = E_0 e^{-i\alpha}. \quad (15)$$

Оскільки функція  $w'(z)$  є аналітичною в усій комплексній площині, то цей вираз справджується для будь-якого  $z$ .

З рівняння (15) випливає, що

$$w'_c(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} + 1 \right) E_0 e^{-i\alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} - 1 \right) E_0 e^{i\alpha} \frac{a^2}{z^2},$$

$$\begin{aligned} W'_c(z) &= \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} + 1 \right)^2 E_0^2 e^{-2i\alpha} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} \right)^2 - 1 \right) E_0^2 \frac{a^2}{z^2} + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} - 1 \right)^2 E_0^2 e^{2i\alpha} \frac{a^4}{z^4}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$W'(z) = E_0^2 e^{-2i\alpha}. \quad (17)$$

**Задача лінійного спряження на тріщині.** Аналогічно до методики [4] введемо два нових комплексних потенціали  $\phi(z)$  і  $\omega(z)$ :

$$\phi(z) = \alpha \varphi(z) + z \bar{\varphi}' \left( \frac{a^2}{z} \right) + \bar{\psi} \left( \frac{a^2}{z} \right) - \chi \bar{W} \left( \frac{a^2}{z} \right) + \frac{k}{2} w(z) \bar{w}' \left( \frac{a^2}{z} \right), \quad (18)$$

$$\omega(z) = \varphi(z) - z \bar{\varphi}' \left( \frac{a^2}{z} \right) - \bar{\psi} \left( \frac{a^2}{z} \right) - \frac{k}{2} w(z) \bar{w}' \left( \frac{a^2}{z} \right). \quad (19)$$

Функції  $\phi'(z)$  та  $\omega'(z)$  є аналітичними в усій комплексній площині з розрізом уздовж дуги  $r = a$ ,  $|\theta| \leq \beta$ , за винятком, можливо, початку координат і нескінченно віддаленої точки.

Зазначимо, що при додаванні виразів (18) і (19) отримуємо

$$(\alpha + 1)\varphi(z) = \phi(z) + \omega(z) + \chi \bar{W} \left( \frac{a^2}{z} \right). \quad (20)$$

З (11) випливає, що при  $r = a$  напруження виражаються як

$$\tilde{\sigma}_{rr} + i\tilde{\sigma}_{r\theta} = \varphi'(z) + \frac{d}{dz} \left[ z \bar{\varphi}' \left( \frac{a^2}{z} \right) + \bar{\psi} \left( \frac{a^2}{z} \right) + \frac{k}{2} w(z) \bar{w}' \left( \frac{a^2}{z} \right) \right],$$

тобто напруження на берегах тріщини записуються таким чином:

$$\tilde{\sigma}_{rr}^+ + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^+ = \varphi'^+(z) + \varphi'^-(z) - \omega'^-(z), \quad (21)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^- + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^- = \varphi'^-(z) + \varphi'^+(z) - \omega'^+(z). \quad (22)$$

З граничної умови (14) і виразів (21), (22) випливає, що  $\omega'^+(z) = \omega'^-(z)$ , тобто функція  $\omega'(z)$  є аналітичною в усій комплексній площині, за винятком початку координат і нескінченно віддаленої точки.

Підставивши формулу (20) у рівняння (21), отримуємо

$$(\alpha + 1)(\tilde{\sigma}_{rr}^+ + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^+) = \phi'^+(z) + \phi'^-(z) - (\alpha - 1)\omega'(z) - 2\chi \frac{a^2}{z^2} \bar{W}'\left(\frac{a^2}{z}\right). \quad (23)$$

Введемо нову функцію

$$F'(z) = \phi'(z) - \frac{\alpha - 1}{2} \omega'(z). \quad (24)$$

Тоді з урахуванням граничної умови (14) і другого з рівнянь (12) вираз (23) перетворюється у задачу лінійного спряження

$$F'^+(z) + F'^-(z) = \frac{a^2}{z^2} \left( \frac{\partial_c}{2} \bar{W}'_c\left(\frac{a^2}{z}\right) + 2\chi \bar{W}'\left(\frac{a^2}{z}\right) \right) \text{ при } r = a, \quad |\theta| \leq \beta. \quad (25)$$

Вирази для переміщень і напружень впливають з формул (10)–(12), (18), (19), (24) і мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_r + iu_\theta = \frac{e^{-i\theta}}{4\mu K} & \left[ \alpha \left( K\omega(z) + F(z) + \chi \bar{W}\left(\frac{a^2}{z}\right) \right) + \right. \\ & + \left( \frac{a^2}{z} - z \right) \left( K\bar{\omega}'(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) - \chi \frac{a^2}{z^2} W'\left(\frac{a^2}{z}\right) \right) + K\omega\left(\frac{a^2}{z}\right) - \\ & \left. - F\left(\frac{a^2}{z}\right) + \alpha\chi \bar{W}(\bar{z}) + kK\bar{w}'(\bar{z}) \left( w\left(\frac{a^2}{z}\right) - w(z) \right) \right], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2K} & \left[ K\omega'(z) + F'(z) - \chi \frac{a^2}{z^2} \bar{W}'\left(\frac{a^2}{z}\right) + \left( 1 - \frac{a^2}{z\bar{z}} \right) \left( K\bar{\omega}'(\bar{z}) + \right. \right. \\ & + \bar{F}'(\bar{z}) - \chi \frac{a^2}{z^2} W'\left(\frac{a^2}{z}\right) \left. \right) + \left( \frac{a^2}{z} - z \right) \left( K\bar{\omega}''(\bar{z}) + \bar{F}''(\bar{z}) + \right. \\ & + \chi \frac{a^2}{z^3} w'\left(\frac{a^2}{z}\right) \left( w'\left(\frac{a^2}{z}\right) + \frac{a^2}{z} w''\left(\frac{a^2}{z}\right) \right) \left. \right) + \\ & + \frac{a^2}{z\bar{z}} \left( -K\omega'\left(\frac{a^2}{z}\right) + F'\left(\frac{a^2}{z}\right) \right) - (\chi + K\varepsilon_m) \frac{\bar{z}}{z} \bar{W}'(\bar{z}) + \\ & + kK \frac{\bar{z}}{z} \bar{w}'(\bar{z}) \left( w\left(\frac{a^2}{z}\right) - w(z) \right) + \\ & \left. + kK\bar{w}'(\bar{z}) \left( w'(z) - \frac{a^2}{z\bar{z}} w'\left(\frac{a^2}{z}\right) \right) \right], \quad (27) \end{aligned}$$

де  $K = \frac{\alpha + 1}{2}$ .

Таким чином, напружено-деформований стан системи цілком визначається двома невідомими функціями  $F'(z)$  і  $\omega'(z)$ , аналітичними в певних областях.

**Загальний розв'язок задачі Гільберта на тріщині.** Визначимо поведінку невідомих функцій  $F'(z)$  та  $\omega'(z)$  у початку координат і в нескінченно віддаленій точці.

Як зазначено вище, функції  $\phi'(z)$  і  $\psi'(z)$  є аналітичними в усій комплексній площині з розрізом уздовж тріщини, тобто вони обмежені в околі початку координат і нескінченно віддаленої точки. З виразів (18), (19) і (24) випливає, що функції  $F'(z)$  та  $\omega'(z)$  є обмеженими в нескінченно віддаленій точці та мають полюси другого порядку в початку координат.

Оскільки функція  $\omega'(z)$  є аналітичною в усій комплексній площині, за винятком початку координат, вона визначається як

$$\omega'(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2}. \quad (28)$$

Задачу Гільберта (25) з урахуванням виразів (16), (17) запишемо так:

$$F'^+(z) + F'^-(z) = p(z) \quad \text{при} \quad r = a, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (29)$$

де

$$p(z) = \frac{C_1}{z^2} + C_2 + C_3 z^2, \quad C_1 = \left( 2\chi + \frac{\varepsilon_c K}{4} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} + 1 \right)^2 \right) a^2 E_0^2 e^{2i\alpha},$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_c K}{2} \left( \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} \right)^2 - 1 \right) E_0^2, \quad C_3 = \frac{\varepsilon_c K}{4a^2} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_c} - 1 \right)^2 a^2 E_0^2 e^{-2i\alpha}.$$

Загальний розв'язок задачі (29) має вигляд [1, §14], [2, §110]

$$F'(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{p(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z) \tilde{R}(z), \quad (30)$$

де

$$\tilde{R}(z) = \tilde{B}_1 z + \tilde{B}_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2},$$

$$X_0(z) = (z - ae^{-i\beta})^{-1/2} (z - ae^{i\beta})^{-1/2}. \quad (31)$$

У формулі (30)  $L$  – контур тріщини, інтегрування по якому проводимо в додатному напрямку, причому вибираємо таку вітку функції  $X_0(z)$ , для якої  $zX_0(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1$ .

Для обчислення контурного інтеграла в (30) необхідно розвинути функцію  $\frac{p(t)}{X_0(t)}$  у ряд в околі нескінченно віддаленої точки:

$$\frac{p(t)}{X_0(t)} = C_3 t^3 - (C_3 a \cos \beta) t^2 + \left( \frac{1}{2} C_3 a^2 \sin^2 \beta + C_2 \right) t +$$

$$+ \left( \frac{1}{2} C_3 a^2 \sin^2 \beta - C_2 \right) a \cos \beta + \dots, \quad r \rightarrow \infty.$$

Тоді, як зазначено у [2, §110], маємо

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)} = \frac{p(z)}{X_0(z)} - C_3 z^3 + (C_3 a \cos \beta) z^2 -$$

$$- \left( \frac{1}{2} C_3 a^2 \sin^2 \beta + C_2 \right) z - \left( \frac{1}{2} C_3 a^2 \sin^2 \beta - C_2 \right) a \cos \beta.$$

Підставивши цей вираз у (30), остаточно отримуємо

$$F'(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{C_1}{z^2} + C_2 + C_3 z^2 \right) + X_0(z) R(z), \quad (32)$$

$$R(z) = -\frac{1}{2} C_3 z^3 + \left( \frac{1}{2} C_3 a \cos \beta \right) z^2 + B_1 z + B_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}. \quad (33)$$

Таким чином, для розв'язання сформульованої задачі необхідно визначити сім невідомих довільних сталих  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, D_1$  і  $D_2$ .

**Визначення сталих у розв'язку задачі Гільберта.** Розвинемо функцію  $F'(z)$  у ряд в околі початку координат і в нескінченно віддаленій точці. З виразів (31)–(33) випливає, що

$$F'(z) = \left( \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{a} D_2 \right) \frac{1}{z^2} - \left( \frac{1}{a} D_1 + \frac{1}{a^2} D_2 \cos \beta \right) \frac{1}{z} + \left( \frac{1}{2} C_2 - \frac{1}{a} B_0 - \frac{1}{a^2} D_1 \cos \beta - \frac{1}{4a^3} (1 + 3 \cos 2\beta) D_2 \right) + \dots, \quad r \rightarrow 0, \quad (34)$$

$$F'(z) = \left( B_1 + \frac{1}{2} C_2 - \frac{1}{4} C_3 a^2 \sin^2 \beta \right) + \left( B_0 + B_1 a \cos \beta + \frac{1}{2} C_3 a^3 \sin^2 \beta \cos \beta \right) \frac{1}{z} + \dots, \quad r \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Функція  $\varphi'(z)$  має бути обмеженою в околі початку координат [2, §31], тобто з урахуванням (20) маємо

$$K\omega'(z) + F'(z) - \chi \frac{a^2}{z^2} \bar{W}' \left( \frac{a^2}{z} \right) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \text{const}.$$

Звідси, враховуючи формули (17), (28) і (34), отримуємо

$$KA_1 - \frac{1}{a} D_1 - \frac{1}{a^2} D_2 \cos \beta = 0, \quad (36)$$

$$KA_2 + \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{a} D_2 - \chi a^2 E_0^2 e^{2i\alpha} = 0. \quad (37)$$

Оскільки переміщення повинні бути обмеженими в початку координат, то з виразу (26) і формул (15), (17), (28), (34), (35) випливає, що

$$K(A_0 + \bar{A}_0) - \frac{1}{a} B_0 - \frac{1}{a^2} D_1 \cos \beta - \frac{1}{4a^3} (1 + 3 \cos 2\beta) D_2 - \bar{B}_1 + \frac{1}{4} \bar{C}_3 a^2 \sin^2 \beta + kKE_0^2 = 0, \quad (38)$$

$$KA_1 - B_0 - B_1 a \cos \beta - \frac{1}{2} C_3 a^3 \sin^2 \beta \cos \beta = 0. \quad (39)$$

З граничної умови (13) для напружень на нескінченності після підстановки в ній виразів (15), (17), (27), (28), (34), (35) отримуємо

$$K(A_0 + \bar{A}_0) + B_1 + \bar{B}_1 + \frac{1}{2} (C_2 + \bar{C}_2) - \frac{1}{4} (C_3 + \bar{C}_3) a^2 \sin^2 \beta + kKE_0^2 = \\ = K(N_1 + N_2), \quad (40)$$

$$-KA_2 + \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{a} D_2 - (\chi + K\varepsilon_m) a^2 E_0^2 e^{2i\alpha} = Ke^{2i\gamma} (N_1 - N_2). \quad (41)$$

Будемо вважати, що обертання на нескінченності дорівнює нулеві, тобто  $\varphi'(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z}) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ . Тоді з виразів (17), (20), (28) і (35) випливає, що

$$K(A_0 - \bar{A}_0) + B_1 - \bar{B}_1 + \frac{1}{2} (C_2 - \bar{C}_2) - \frac{1}{4} (C_3 - \bar{C}_3) a^2 \sin^2 \beta = 0. \quad (42)$$

Рівняння (40) з урахуванням (42) запишемо у наступному вигляді:

$$KA_0 + B_1 + \frac{1}{2} C_2 - \frac{1}{4} C_3 a^2 \sin^2 \beta + \frac{1}{2} kKE_0^2 = \frac{1}{2} K(N_1 + N_2). \quad (43)$$

Підставивши у вираз (26) для переміщень формули (15), (17), (28), (34), (35), умова однозначності зміщень при обході контуру тріщини набуває вигляду

$$(\alpha + 1)KA_1 + \alpha \left( B_0 + B_1 a \cos \beta + \frac{1}{2} C_3 a^3 \sin^2 \beta \cos \beta \right) + \frac{1}{a} D_1 + \frac{1}{a^2} D_2 \cos \beta = 0. \quad (44)$$

Таким чином, отримали систему семи лінійних алгебраїчних рівнянь (36)–(39), (41), (43), (44) відносно семи невідомих  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $D_1$  і  $D_2$ . Її розв'язок є таким:

$$\begin{aligned}
(3 - \cos \beta) \operatorname{Re} B_1 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} \operatorname{Re} C_1 - (2\chi + \varepsilon_m K) E_0^2 \cos 2\alpha + \right. \\
&\quad \left. + (3 + 2 \cos \beta) a^2 \operatorname{Re} C_3 \right) \sin^2 \beta - \\
&\quad - C_2 + K \left( (N_1 + N_2) - \frac{N_1 - N_2}{4} \sin^2 \beta \cos 2\gamma \right), \\
(1 + \cos \beta) \operatorname{Im} B_1 &= -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} \operatorname{Im} C_1 - (2\chi + \varepsilon_m K) E_0^2 \sin 2\alpha - \right. \\
&\quad \left. - (1 - 2 \cos \beta) a^2 \operatorname{Im} C_3 \right) \sin^2 \beta + \frac{N_1 - N_2}{4} K \sin^2 \beta \sin 2\gamma, \\
B_0 &= -B_1 a \cos \beta - \frac{1}{2} C_3 a^3 \sin^2 \beta \cos \beta, \\
A_0 &= \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{1}{K} \left( \frac{1}{4} C_3 a^2 \sin^2 \beta - \frac{1}{2} C_2 - \frac{1}{2} k K E_0^2 - B_1 \right), \\
A_1 &= 0, \quad A_2 = \left( \frac{\chi}{K} + \frac{\varepsilon_m}{2} \right) a^2 E_0^2 e^{2i\alpha} - \frac{N_1 - N_2}{2} a^2 e^{2i\gamma}, \\
D_1 &= -\frac{1}{a} D_2 \cos \beta, \\
D_2 &= \frac{1}{2} a (C_1 - (2\chi + \varepsilon_m K) a^2 E_0^2 e^{2i\alpha}) - \frac{N_1 - N_2}{2} K a^3 e^{2i\gamma}. \tag{45}
\end{aligned}$$

**Визначення напружень і розкриття тріщини.** Напруження (27) на колі радіуса  $r = a$  запишемо як

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \frac{1}{K} F'(z) - \left( \frac{\chi}{K} + \frac{\varepsilon_m}{2} \right) \frac{a^2}{z^2} \overline{W'(z)}, \quad z = a e^{i\theta}, \quad \beta < |\theta| \leq \pi. \tag{46}$$

Розкриття тріщини  $\Delta = u_r^- - u_r^+$ , виходячи з (26), виразимо таким чином:

$$\Delta = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} [e^{-i\theta} (F^-(z) - F^+(z))] \quad \text{при} \quad z = a e^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \beta. \tag{47}$$

Для обчислення розкриття тріщини за допомогою рівняння (47) необхідно визначити функцію  $F(z)$ . Формулу (32) для функції  $F'(z)$  з урахуванням (45) запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{C_1}{z^2} + C_2 + C_3 z^2 \right) + X_0(z) \left( \frac{1}{2} C_3 (-z^3 + z^2 a \cos \beta - \right. \\
&\quad \left. - a^3 \sin^2 \beta \cos \beta) + B_1 (z - a \cos \beta) + D_2 \left( -\frac{\cos \beta}{az} + \frac{1}{z^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Інтегруючи цей вираз, одержуємо

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{2} \left( -\frac{C_1}{z} + C_2 z + \frac{1}{3} C_3 z^3 \right) + X_p(z) \left( -\frac{1}{6} C_3 (z^2 + za \cos \beta + \right. \\
&\quad \left. + a^2 (3 \cos^2 \beta - 2)) + B_1 + \frac{D_2}{a^2 z} \right), \tag{48}
\end{aligned}$$

де  $X_p(z) = (z - a e^{-i\beta})^{1/2} (z - a e^{i\beta})^{1/2}$ .



Знайдемо різницю  $F^-(z) - F^+(z)$ . Із задачі лінійного спряження (29) випливає, що

$$F^+(z) + F^-(z) = -\frac{C_1}{z} + C_2 z + \frac{1}{3} C_3 z^3 + \tilde{C}, \quad (49)$$

де  $\tilde{C}$  – деяка довільна стала. Якщо ввести позначення

$$F_0(z) = X_P(z) \left( -\frac{1}{6} C_3 (z^2 + za \cos \beta + a^2 (3 \cos^2 \beta - 2)) + B_1 + \frac{D_2}{a^2 z} \right), \quad (50)$$

то з виразу (47) з урахуванням (48)–(50) отримаємо

$$\Delta = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} [e^{-i\theta} (F_0^-(z) + C)] \quad \text{при} \quad z = ae^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \beta,$$

де  $C$  – деяка стала.

Оскільки  $F_0(ae^{\pm i\beta}) = 0$  і  $\Delta(ae^{\pm i\beta}) = 0$ , то очевидно, що  $C = 0$ .

Остаточо для розкриття тріщини отримуємо такий вираз:

$$\Delta = \frac{a}{\mu} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{z} F_0^-(z) \right] \quad \text{при} \quad z = ae^{i\theta}, \quad |\theta| \leq \beta. \quad (51)$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень визначаємо таким чином:

$$K_1^\pm + iK_2^\pm = \lim_{\theta \rightarrow \pm \beta \pm 0} \left[ \sqrt{\pm 2\pi a (\theta \mp \beta)} (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})_{z=ae^{i\theta}} \right]. \quad (52)$$

Після підстановки формул (17), (31), (32), (46) у (52) та обчислення границь для коефіцієнтів інтенсивності напружень отримуємо

$$K_1^\pm + iK_2^\pm = \mp i e^{\mp i\beta/2} R(ae^{\pm i\beta}) \sqrt{\frac{\pi}{a \sin \beta}}, \quad (53)$$

де функція  $R(z)$  визначається формулою (33).

**Результати чисельного моделювання.** Усі наведені нижче результати отримано для плоского деформованого стану і таких характеристик системи: коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.26$ , відношення діелектричної проникності тріщини до діелектричної проникності матеріалу  $\frac{\epsilon_m}{\epsilon_c} = 0.133 \cdot 10^{-4}$ , відношення електрострикційних констант матеріалу до його діелектричної проникності  $\frac{a_1}{\epsilon_m} = 405$  та  $\frac{a_2}{\epsilon_m} = -75$ , головне напруження  $N_2$  на нескінченності дорівнює нулеві,  $N_2 = 0$ . Ці значення механічних та електрострикційних параметрів характерні для матеріалу  $\text{PbMg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3}\text{O}_3$  (PMN) і наведені, наприклад, у [5].

На рис. 2, рис. 3 зображено залежність коефіцієнтів інтенсивності нормальних  $K_1$  та дотичних  $K_2$  напружень в околі нижньої вершини тріщини від кута піврозхилу тріщини  $\beta$ . Вибирали кути прикладання навантажень  $\alpha = 0$  та  $\gamma = 0$  для таких трьох значень відношення інтенсивності електричних і механічних навантажень:  $\frac{\epsilon_m E_0^2}{N_1} \cdot 10^5 = 0.5, 1.0, 2.0$ .

На рис. 4 наведено розкриття тріщини для кута її піврозхилу  $\beta = 60^\circ$ , кутів прикладання навантажень  $\alpha = -45^\circ$  та  $\gamma = 0$  для значень відношення інтенсивності електричних і механічних навантажень  $\frac{\epsilon_m E_0^2}{N_1} \cdot 10^5 = 0.5, 0.95255, 2.0$ . Видно, що для  $\frac{\epsilon_m E_0^2}{N_1} \cdot 10^5 = 0.5$  тріщина повністю відкрита. Для

$\frac{\varepsilon_m E_0^2}{N_1} \cdot 10^5 = 2$  біля нижньої вершини тріщини існує зона взаємоперетинання

берегів тріщини. Коли  $\frac{\varepsilon_m E_0^2}{N_1} \cdot 10^5 = 0.95255$ , коефіцієнт інтенсивності нормальних напружень у нижній вершині тріщини дорівнює нулеві і тріщина відкривається плавно.

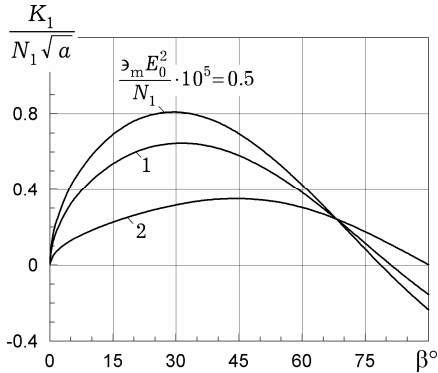


Рис. 2

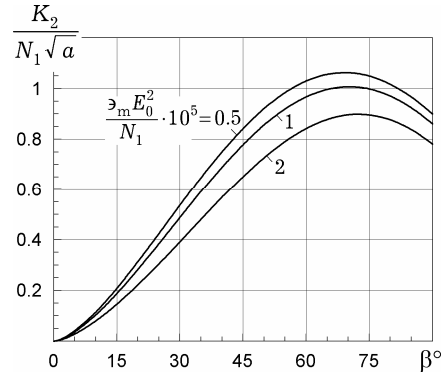


Рис. 3

На рис. 5 наведено розкриття тріщини для кута її піврозхилу  $\beta = 60^\circ$ , кутів прикладання навантажень  $\alpha = -45^\circ$  та  $\gamma = 75^\circ$  при трьох значеннях відношення інтенсивності електричних і механічних навантажень  $\frac{\varepsilon_m E_0^2}{N_1}$ .

Коли  $\frac{\varepsilon_m E_0^2}{N_1} \cdot 10^5 = 0.1$ , зона взаємоперетинання берегів тріщини не примикає до жодної з її вершин.

Коли  $\frac{\varepsilon_m E_0^2}{N_1} \cdot 10^5 = 1$ , зона взаємоперетинання

берегів примикає до нижньої вершини тріщини. Коли  $\frac{\varepsilon_m E_0^2}{N_1} \cdot 10^5 = 0.4109$ ,

коефіцієнт інтенсивності нормальних напружень у нижній вершині тріщини дорівнює нулеві. Зазначимо, що результати, наведені на цьому рисунку, характеризуються великою зоною контакту, тобто модель відкритої тріщини для таких випадків є некоректною і може використовуватись лише для якісного опису напруженого стану в околі верхньої вершини тріщини.

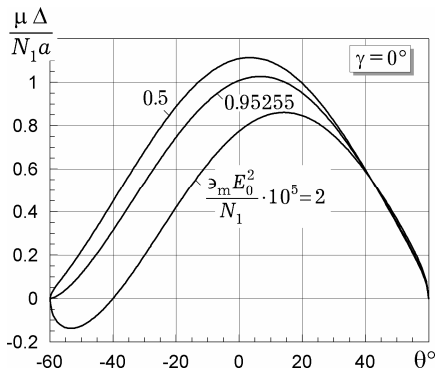


Рис. 4

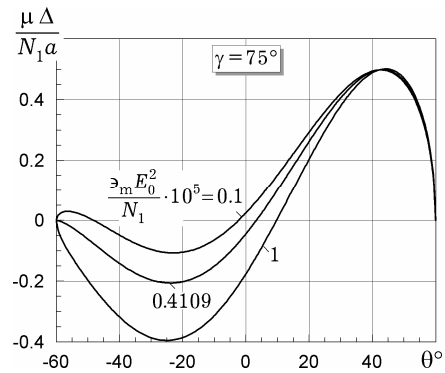


Рис. 5

**Висновки.** Описана в цій роботі методика дозволяє аналітично визначити напружено-деформований стан пружної електрострикційної площини з дуговою тріщиною під дією механічних та електричних навантажень на нескінченності. Одержано точний аналітичний розв'язок граничної задачі електростатики, з урахуванням якого задачу електропружності зведено до задачі лінійного спряження. Знайдено загальний розв'язок цієї задачі, який задовольняє усі граничні умови. В результаті отримано напруження, їх коефіцієнти інтенсивності та розкриття тріщини. Виявлено випадки, коли розкриття тріщини в деяких її зонах є від'ємним, тобто виникає фізично нереальний взаємний перетин берегів тріщини. Очевидно, що в таких випадках модель відкритої тріщини є некоректною і потрібно використовувати модель, що враховує зони контакту її берегів. Оскільки множина механічних і електричних навантажень, для яких тріщина залишається повністю відкритою, є досить широкою, це означає, що розроблена методика для моделі відкритої тріщини є корисною.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.  
Те саме: *Gakhov F. D.* Boundary value problems. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 584 p.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва–Ленинград: Изд-во АН СССР, 1949. – 635 с.
3. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 539 с.  
Те саме: *Stretton J. A.* Electromagnetic theory. – New York: McGraw Hill, 1941. – 615 p.
4. *England A. H.* An arc crack around a circular elastic inclusion // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1966. – **33**, No. 3. – P. 637–640.
5. *Gao C.-F., Mai Y.-W.* Fracture of electrostrictive solids subjected to combined mechanical and electric loads // Eng. Fract. Mech. – 2010. – **77**, No. 10. – P. 1503–1515.
6. *Jiang Q., Kuang Z.-B.* Stress analysis in two dimensional electrostrictive material with an elliptic rigid conductor // Eur. J. Mech.: A/Solids. – 2004. – **23**, No. 6. – P. 945–956.
7. *Knops R. J.* Two-dimensional electrostriction // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1963. – **16**, No. 3. – P. 377–388.
8. *Zheng M., Gao C.-F.* An arc-shaped crack in an electrostrictive material // Int. J. Eng. Sci. – 2010. – **48**, No. 9. – P. 771–782.

#### ДУГОВАЯ ТРЕЩИНА В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТРИКЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ

*Рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния упругой электрострикционной плоскости с дуговой трещиной под действием электрических и механических усилий, приложенных на бесконечности, которые могут быть произвольным образом ориентированы по отношению к оси трещины. Эта задача сведена к задаче линейного сопряжения для кусочно-аналитической функции комплексной переменной. Построено ее точное аналитическое решение. Получены аналитические выражения, определяющие напряжения в любой точке среды, раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности напряжений в ее вершинах.*

#### AN ARC CRACK IN A HOMOGENEOUS ELECTROSTRICTIVE MATERIAL

*A problem on determination of stress-strain state in the elastic electrostrictive plane with an arc crack under the electric and mechanical loading applied at infinity, which may be arbitrary oriented with respect to the axis of the crack is considered. This problem is reduced to the problem of linear conjugation for the piecewise-analytic function of complex variable. An exact analytical solution of this problem is obtained. The analytical expressions for the stresses at any point of medium, the crack opening displacements and the stress intensity factors at crack tips are found.*

Дніпропетр. нац. ун-т  
ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ

Одержано  
19.05.14