УДК 517.524

Т. М. Антонова[1], О. М. Сусь[2]

ПРО ДЕЯКІ ПОСЛІДОВНОСТІ МНОЖИН РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Для двовимірних неперервних дробів, елементи яких належать деяким прямокутним множинам комплексної площини, встановлено оцінку похибки їх фігурної апроксимації і доведено, що двовимірні неперервні дроби збігаються рівномірно відносно послідовності цих прямокутних множин.

Двовимірні неперервні дроби (ДНД) є одним багатовимірним узагальненням неперервних дробів, які використовуються для наближення функцій двох змінних і, зокрема, для побудови їх раціональних наближень [3, 5]. Тому дослідження збіжності ДНД є актуальним завданням аналітичної теорії ДНД, яке вимагає застосування нових методів і прийомів.

У монографії [4, с. 112] наведено означення послідовності множин рівномірної збіжності неперервних дробів, а також найбільш важливі теореми, що стосуються простих кругових і параболічних множин рівномірної збіжності, спарованих множин рівномірної збіжності та подано бібліографічні посилання. Відмітимо також роботу [7], присвячену вивченню спарованих множин рівномірної збіжності, та роботи [6, 8, 9], у яких, зокрема, розглядаються питання побудови модифікованих наближень для неперервних дробів та узагальнення поняття послідовності множин рівномірної збіжності. Для ДНД найбільш вивченими є послідовності простих кругових множин [3, 5] і спарованих множин [1, 2] рівномірної збіжності.

У цій роботі, за аналогією з неперервними дробами, дамо означення послідовності множин рівномірної збіжності ДНД і встановимо оцінку похибки фігурного наближення ДНД, елементи яких належать деяким прямокутним множинам комплексної площини.

Розглянемо ДНД вигляду

$$\Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,k}}{1+\Phi_k}, \qquad \Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,k}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+j}}{1}, \tag{1}$$

де $a_{k+j,k}$, $a_{k,k+j}$, $k = 0,1,\ldots$, $j = 1,2,\ldots$, − комплексні числа.

Означення 1*.* n-ми фігурними наближеннями або n-ми фігурними підхідними дробами ДНД (1) називають скінченні ДНД вигляду

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[n/2]} \frac{a_{k,k}}{1+\Phi_k^{(n-2k)}}, \quad \Phi_k^{(0)} = 0, \quad \Phi_k^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{a_{k+j,k}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{a_{k,k+j}}{1},$$

$$n = 1,2,\ldots, \quad k = 0,1\ldots, \quad p = 1,2,\ldots. \tag{2}$$

Означення 2. ДНД (1) називають фігурно збіжним, якщо існує скінченна границя $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Число f називають значенням ДНД (1), а величина $f - f_n$ − похибкою його фігурної апроксимації.

Нехай $(j,k) \in I = \{0,1,2,\ldots\} \times \{0,1,2,\ldots\} \setminus \{(0,0)\}$, $\{E_{j,k}\}$ − деяка послідовність непорожніх множин $E_{j,k} \subseteq \mathbb{C}$, $j = 0,1,2,\ldots$, $k = 1,2,\ldots$.

Означення 3. Послідовність множин $\{E_{j,k}\}$ називають послідовністю множин рівномірної фігурної збіжності ДНД (1), якщо існує така збіжна до нуля послідовність додатних чисел $\{\varepsilon_n\}$, яка залежить тільки від $\{E_{j,k}\}$, і така, що за умови $a_{j,k} \in E_{j,k}$, $(j,k) \in I$, ДНД (1) збігається і виконується нерівність $|f - f_n| \le \varepsilon_n$, $n = 1,2,\ldots$. У цьому випадку вважатимемо, що ДНД (1), (2) збігається рівномірно відносно послідовності цих множин.

Зокрема, якщо $E_{j,k} = E$, $j = 0,1,\ldots$, $k = 1,2,\ldots$, то множину E будемо називати простою множиною рівномірної збіжності. Якщо ж

$$E_{2j-1,2j-1} = E_{k+2j-1,k} = E_{k,k+2j-1} = E_1, \quad E_{2j,2j} = E_{k+2j,k} = E_{k,k+2j} = E_2, \quad j = 1,2,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{3}$$

то множини E_1, E_2 будемо називати спарованими множинами рівномірної збіжності.

Для дослідження властивостей послідовностей фігурних підхідних дробів ДНД (1), (2) використовуємо таку формулу різниці:

$$f_n - f_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^p \left(\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right) \prod\limits_{j=1}^{k} a_{j,j}}{\prod\limits_{j=1}^{k} Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}} + \frac{(-1)^p \prod\limits_{j=1}^{p+1} a_{j,j}}{\prod\limits_{j=1}^{p} Q_j^{(2p-2j)} \prod\limits_{j=1}^{p+1} Q_j^{(n-2j)}}, \quad p = 1,2,\ldots, \; n > 2p+1, \tag{4}$$

де вирази вигляду

$$Q_j^{(0)} = 1, \quad Q_j^{(1)} = 1 + \Phi_j^{(1)}, \quad Q_j^{(p+2)} = 1 + \Phi_j^{(P+2)} + \frac{a_{j+1,j+1}}{Q_{j+1}^{(p)}}, \quad j = 1,2,\ldots, \quad p = 0,1\ldots, \tag{5}$$

називають фігурними двовимірними залишками ДНД (1), (2), а вирази

$$Q_{k+j,k}^{(0)} = 1, \quad Q_{k+j,k}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{k+j+1,k}}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}},$$

$$Q_{k+j,k}^{(0)} = 1, \quad Q_{k,k+j}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{k,k+j+1}}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}}, \quad k=0,1,\ldots, \; p=0,1,\ldots, \; j=1,2,\ldots, \tag{6}$$

– його одновимірними залишками.

Враховуючи позначення (5), (6) і формули (2), маємо

$$f_1 = \Phi_0^{(1)}, \quad f_n = \Phi_0^{(n)} + \frac{a_{1,1}}{Q_1^{(n-2)}}, \quad n = 2,3\ldots, \tag{7}$$

$$\Phi_k^{(p)} = \frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(p-1)}} + \frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(p-1)}}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad p = 1,2,\ldots. \tag{8}$$

Теорема. *Нехай елементи ДНД* (1), *задовольняють такі умови:*

$$-t_1 \cos\alpha \sqrt{\sin^2\alpha + (1-t_1)^2 \cos^2\alpha} \le \operatorname{Re}(a_{k+j,k} e^{2i\alpha}) \le 0, \quad \operatorname{Im}(a_{k+j,k} e^{2i\alpha}) \ge 0, \quad k = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

$$-t_2 \cos\alpha \sqrt{\sin^2\alpha + (1-t_2)^2 \cos^2\alpha} \le \operatorname{Re}(a_{k,k+j} e^{2i\alpha}) \le 0, \quad \operatorname{Im}(a_{k,k+j} e^{2i\alpha}) \ge 0, \quad k = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$-t \cos\alpha \sqrt{\sin^2\alpha + (1-t-t_1-t_2)^2 \cos^2\alpha} \le \operatorname{Re}(a_{k,k} e^{2i\alpha}) \le 0, \quad \operatorname{Im}(a_{k,k} e^{2i\alpha}) \ge 0, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{11}$$

$$|a_{k+j,k}| \le L_1, \quad |a_{k,k+j}| \le L_2, \quad |a_{j,j}| \le L, \quad k = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{12}$$

де α *– невід'ємна стала,* L_1, L_2, L, t_1, t_2, t *– додатні сталі такі, що*

$$t_1 + t_2 + 2t \le 1, \tag{13}$$

$$0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 2t_1 \cos^2\alpha < 1, \quad 2t_2 \cos^2\alpha < 1, \tag{13''}$$

$$\alpha + (1 - t_1 - t_2 - 2t) \ne 0. \tag{13'''}$$

Тоді ДНД (1) фігурно збігається, і для похибки його фігурної апроксимації справджується нерівність

$$\begin{aligned}
\left|f - f_{2p}\right| \le{}& \frac{L_1}{\sqrt{(1-t_1)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}\,\frac{1}{(1+d_1)^p} + \\
&+ \frac{L_2}{\sqrt{(1-t_2)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}\,\frac{1}{(1+d_2)^p} + \\
&+ \frac{L}{\sqrt{\sin^2\alpha + (1-t-t_1-t_2)^2\cos^2\alpha}}\,\frac{1}{(\sqrt{1+d})^p} + \\
&+ \frac{L}{\sqrt{\sin^2\alpha + (1-t-t_1-t_2)^2\cos^2\alpha}} \times \\
&\times \left\{ \frac{L_1}{\sqrt{\sin^2\alpha + (1-t_1)^2\cos^2\alpha}} \times \right. \\
&\times \frac{\max(\sqrt{1+d}, 1+d_1)}{\max(\sqrt{1+d}, 1+d_1) - \min(\sqrt{1+d}, 1+d_1)} \times \\
&\times \frac{1}{\{\min(\sqrt{1+d}, 1+d_1)\}^{p-1}} + \frac{L_2}{\sqrt{\sin^2\alpha + (1-t_2)^2\cos^2\alpha}} \times \\
&\times \frac{\max(\sqrt{1+d}, 1+d_2)}{\max(\sqrt{1+d}, 1+d_2) - \min(\sqrt{1+d}, 1+d_2)} \times \\
&\left. \times \frac{1}{\{\min(\sqrt{1+d}, 1+d_2)\}^{p-1}} \right\}, \qquad (14)
\end{aligned}$$

де

$$d_1 = \frac{(1-2t_1\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + (1-t_1)^2\cos^2\alpha)}{L_1^2}, \qquad (15')$$

$$d_2 = \frac{(1-2t_2\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + (1-t_2)^2\cos^2\alpha)}{L_2^2}, \qquad (15'')$$

$$\begin{aligned}
d = {}& \frac{(\cos^2\alpha(1-t_1-t_2)(1-t_1-t_2-2t) + \sin^2\alpha)}{L^2} \times \\
&\times (\cos^2\alpha(1-t_1-t_2-t)^2 + \sin^2\alpha). \qquad (15''')
\end{aligned}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи формулу різниці (4), знайдемо похибку фігурної апроксимації ДНД (1), (2) за умов теореми.

Позначимо

$$x_{k+j,k} = \operatorname{Re}(a_{k+j,k}e^{2i\alpha}), \qquad y_{k+j,k} = \operatorname{Im}(a_{k+j,k}e^{2i\alpha}),$$
$$k = 0, 1, \ldots, \qquad j = 1, 2, \ldots, \qquad (16')$$

$$x_{k,k+j} = \operatorname{Re}(a_{k,k+j}e^{2i\alpha}), \qquad y_{k,k+j} = \operatorname{Im}(a_{k,k+j}e^{2i\alpha}),$$
$$k = 0, 1, \ldots, \qquad j = 1, 2, \ldots, \qquad (16'')$$

$$x_{j,j} = \operatorname{Re}(a_{j,j}e^{2i\alpha}), \qquad y_{j,j} = \operatorname{Im}(a_{j,j}e^{2i\alpha}), \qquad j = 1, 2, \ldots, \qquad (16''')$$

$$u_{k+j,k}^{(p)} = \operatorname{Re}(Q_{k+j,k}^{(p)}e^{i\alpha}), \qquad v_{k+j,k}^{(p)} = \operatorname{Im}(Q_{k+j,k}^{(p)}e^{i\alpha}), \qquad (17')$$

$$u_{k,k+j}^{(p)} = \operatorname{Re}(Q_{k,k+j}^{(p)}e^{i\alpha}), \qquad v_{k,k+j}^{(p)} = \operatorname{Im}(Q_{k,k+j}^{(p)}e^{i\alpha}),$$
$$k = 0, 1, \ldots, \qquad j = 1, 2, \ldots, \qquad p = 0, 1, \ldots, \qquad (17'')$$

$$u_j^{(p)} = \operatorname{Re}(Q_j^{(p)}e^{i\alpha}), \quad v_j^{(p)} = \operatorname{Im}(Q_j^{(p)}e^{i\alpha}), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots. \qquad (17''')$$

Покажемо, що за умов теореми справджуються такі оцінки:

$$u_{k+j,k}^{(p)} \geq (1-t_1)\cos\alpha, \quad v_{k+j,k}^{(p)} \geq \sin\alpha, \;\; k=0,1,\ldots, \;\; j=1,2,\ldots, \;\; p=0,1,\ldots, \tag{18'}$$

$$u_{k,k+j}^{(p)} \geq (1-t_2)\cos\alpha, \quad v_{k,k+j}^{(p)} \geq \sin\alpha, \;\; k=0,1,\ldots, \;\; j=1,2,\ldots, \;\; p=0,1,\ldots, \tag{18''}$$

$$u_j^{(p)} \geq (1-t_1-t_2-t)\cos\alpha, \quad v_j^{(p)} \geq \sin\alpha, \;\; j=1,2,\ldots, \;\; p=0,1,\ldots. \tag{19}$$

Для $p=0$ і довільних k, j правильність оцінок (18), (19) очевидна. Припустимо, що ці оцінки справджуються для деякого $p \geq 0$. Тоді, враховуючи умови (13), одержимо

$$\left|Q_{k+j,k}^{(p)}\right| \geq \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha(1-t_1)^2} \neq 0, \quad k=0,1,\ldots, \quad j=1,2,\ldots, \tag{20'}$$

$$\left|Q_{k,k+j}^{(p)}\right| \geq \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha(1-t_2)^2} \neq 0, \quad k=0,1,\ldots, \quad j=1,2,\ldots, \tag{20''}$$

$$\left|Q_j^{(p)}\right| \geq \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha(1-t_1-t_2-t)^2} \neq 0, \qquad j=1,2,\ldots. \tag{21}$$

Зважаючи на позначення (16′) і (17′) одержимо

$$Q_{k+j,k}^{(p+1)}e^{i\alpha} = e^{i\alpha} + \frac{a_{k+j+1,k}e^{2i\alpha}}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}e^{i\alpha}} = e^{i\alpha} +$$

$$+ \frac{(x_{k+j+1,k} + iy_{k+j+1,k})(u_{k+j+1,k}^{(p)} - iv_{k+j+1,k}^{(p)})}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2},$$

звідки з огляду на умови (9) випливає, що

$$u_{k+j,k}^{(p+1)} = \cos\alpha + \frac{x_{k+j+1,k}u_{k+j+1,k}^{(p)} + y_{k+j+1,k}v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} \geq$$

$$\geq \cos\alpha + \frac{x_{k+j+1,k}u_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} \geq \cos\alpha + \frac{x_{k+j+1,k}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|} \geq$$

$$\geq \cos\alpha - \frac{t_1\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + (1-t_1)^2\cos^2\alpha}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|} \geq$$

$$\geq \cos\alpha - t_1\cos\alpha,$$

$$v_{k+j,k}^{(p+1)} = \sin\alpha + \frac{y_{k+j+1,k}u_{k+j+1,k}^{(p)} - x_{k+j+1,k}v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} \geq \sin\alpha.$$

Аналогічно, з урахуванням умов (10) і позначень (16″), (17″), можна довести, що

$$u_{k,k+j}^{(p+1)} \geq \cos\alpha(1-t_2), \qquad v_{k,k+j}^{(p+1)} \geq \sin\alpha.$$

Отже, показано, що нерівності (18) є правильними для довільних k, j і $p+1$. Тому ці нерівності та нерівності (20) справджуються для довільних натуральних значень k, j, p.

Враховуючи формули (8) та оцінки (18), (20), одержимо

$$\operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p)} e^{i\alpha}\right) \geq -t_1 \cos\alpha - t_2 \cos\alpha, \qquad \operatorname{Im}\left(\Phi_k^{(p)} e^{i\alpha}\right) \geq 0, \qquad k, p = 1, 2, \ldots .$$

Тоді, згідно з позначеннями (5) і встановленими вище оцінками, одержимо

$$\operatorname{Re}\left(Q_k^{(1)} e^{i\alpha}\right) = \cos\alpha + \operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(1)} e^{i\alpha}\right) \geq \cos\alpha(1 - t_1 - t_2) >$$
$$> \cos\alpha(1 - t - t_1 - t_2),$$
$$\operatorname{Im}\left(Q_k^{(1)} e^{i\alpha}\right) = \sin\alpha + \operatorname{Im}\left(\Phi_k^{(1)} e^{i\alpha}\right) \geq \sin\alpha, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

тобто нерівності (19) справджуються для довільних натуральних k і $p = 0, 1, \ldots$.

Виходячи з припущень про правильність оцінок (19) для деяких $p \geq 1$, одержимо

$$\operatorname{Re}\left(Q_k^{(p+2)} e^{i\alpha}\right) = \cos\alpha + \operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p+2)} e^{i\alpha}\right) + \frac{x_{k+1,k+1} u_{k+1}^{(p)} + y_{k+1,k+1} v_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2} \geq$$
$$\geq \cos\alpha(1 - t_1 - t_2) - t\cos\alpha = \cos\alpha(1 - t - t_1 - t_2),$$
$$\operatorname{Im}\left(Q_k^{(p+2)} e^{i\alpha}\right) = \sin\alpha + \operatorname{Im}\left(\Phi_k^{(p+2)} e^{i\alpha}\right) +$$
$$+ \frac{y_{k+1,k+1} u_{k+1}^{(p)} - x_{k+1,k+1} v_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2} \geq \sin\alpha .$$

Отже, нерівності (19), а також (21) справджуються і для $p + 1$.

Встановимо оцінку знизу для залишків $\left|Q_{k+j,k}^{(p+1)}\right|^2$:

$$\left|Q_{k+j,k}^{(p+1)}\right|^2 = \left|u_{k+j,k}^{(p+1)}\right|^2 + \left|v_{k+j,k}^{(p+1)}\right|^2 =$$
$$= \left(\cos\alpha + \frac{x_{k+j+1,k} u_{k+j+1,k}^{(p)} + y_{k+j+1,k} v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2}\right)^2 +$$
$$+ \left(\sin\alpha + \frac{y_{k+j+1,k} u_{k+j+1,k}^{(p)} - x_{k+j+1,k} v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2}\right)^2 = \cos^2\alpha +$$
$$+ \sin^2\alpha + 2\cos\alpha \frac{x_{k+j+1,k} u_{k+j+1,k}^{(p)} + y_{k+j+1,k} v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} +$$
$$+ \frac{\left(x_{k+j+1,k} u_{k+j+1,k}^{(p)}\right)^2 + \left(y_{k+j+1,k} v_{k+j+1,k}^{(p)}\right)^2}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^4} +$$
$$+ 2\frac{x_{k+j+1,k} u_{k+j+1,k}^{(p)} y_{k+j+1,k} v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^4} +$$
$$+ 2\sin\alpha \frac{y_{k+j+1,k} u_{k+j+1,k}^{(p)} - x_{k+j+1,k} v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} +$$
$$+ \frac{\left(y_{k+j+1,k} u_{k+j+1,k}^{(p)}\right)^2}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^4} + \frac{\left(x_{k+j+1,k} v_{k+j+1,k}^{(p)}\right)^2}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^4} -$$
$$- 2\frac{x_{k+j+1,k} v_{k+j+1,k}^{(p)} y_{k+j+1,k} u_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^4} =$$

$$= 1 + \frac{(x_{k+j+1,k})^2 + (y_{k+j+1,k})^2}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} +$$

$$+ 2\cos\alpha \frac{x_{k+j+1,k}u_{k+j+1,k}^{(p)} + y_{k+j+1,k}v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} +$$

$$+ 2\sin\alpha \frac{y_{k+j+1,k}u_{k+j+1,k}^{(p)} - x_{k+j+1,k}v_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} \geq$$

$$\geq 1 + 2\cos\alpha \frac{x_{k+j+1,k}u_{k+j+1,k}^{(p)}}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} + \frac{\left|a_{k+j+1,k}\right|^2}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} \geq$$

$$\geq 1 - 2t_1\cos^2\alpha + \frac{\left|a_{k+j+1,k}\right|^2}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2}.$$

Отже, остаточно

$$\left|Q_{k+j,k}^{(p+1)}\right|^2 \geq 1 - 2t_1\cos^2\alpha + \frac{\left|a_{k+j+1,k}\right|^2}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2}, \quad k = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots, \quad p = 0,1,\dots.$$

Тоді з урахуванням умов (12) і нерівності (20′) одержимо

$$\frac{\left|a_{k+j+1,k}\right|^2}{\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} \leq \frac{L_1^2}{\cos^2\alpha(1-t_1)^2 + \sin^2\alpha}, \quad k = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots, \quad p = 0,1,\dots.$$

Тому для $k = 0,1,\dots,$ $j = 1,2,\dots,$ $p = 0,1,\dots$ маємо

$$\frac{\left|a_{k+j+1,k}\right|^2}{\left|Q_{k+j,k}^{(p+1)}\right|^2\left|Q_{k+j+1,k}^{(p)}\right|^2} \leq \frac{L_1^2}{\cos^2\alpha(1-t_1)^2 + \sin^2\alpha} \times$$

$$\times\left(1 - 2t_1\cos^2\alpha + \frac{L_1^2}{\cos^2\alpha(1-t_1)^2 + \sin^2\alpha}\right)^{-1} \leq \frac{1}{1+d_1}, \quad (22)$$

де d_1 визначається за формулою (15′).

Аналогічно можемо показати, що для $k = 0,1,\dots,$ $j = 1,2,\dots,$ $p = 0,1,\dots$ справджується нерівність

$$\frac{\left|a_{k,k+j+1}\right|^2}{\left|Q_{k,k+j}^{(p+1)}\right|^2\left|Q_{k,k+j+1}^{(p)}\right|^2} \leq \frac{1}{1+d_2}, \quad (23)$$

де d_2 визначаються за формулою (15″).

Встановимо оцінку знизу для двовимірних залишків $\left|Q_k^{(p+2)}\right|$, $k = 1,2,\dots,$ $p = 0,1,\dots$:

$$\left|Q_k^{(p+2)}\right|^2 = \left|u_k^{(p+2)}\right|^2 + \left|v_k^{(p+2)}\right|^2 = \left(\cos\alpha + \operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{x_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)} + y_{k+1,k+1}v_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}\right)^2 +$$

$$+ 2\left(\cos\alpha + \operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)\frac{x_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)} + y_{k+1,k+1}v_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2} +$$

$$+\left(\sin\alpha+\operatorname{Im}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)^2+$$

$$+2\left(\sin\alpha+\operatorname{Im}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)\frac{y_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)}-x_{k+1,k+1}v_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}+$$

$$+\left(\frac{y_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)}-x_{k+1,k+1}v_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}\right)^2\geq$$

$$\geq\left(\cos\alpha+\operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)^2+\left(\sin\alpha+\operatorname{Im}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)^2+$$

$$+2\left(\cos\alpha+\operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)\frac{x_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}+$$

$$+\left(\frac{x_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)}+y_{k+1,k+1}v_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{y_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)}-x_{k+1,k+1}v_{k+1}^{(p)}}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}\right)^2\geq\left(\cos\alpha+\operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\cos\alpha+\operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)-2t\cos\alpha\right)+$$

$$+\left(\sin\alpha+\operatorname{Im}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)^2+\frac{\left|x_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)}\right|^2+\left|y_{k+1,k+1}v_{k+1}^{(p)}\right|^2}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^4}+$$

$$+\frac{\left|y_{k+1,k+1}u_{k+1}^{(p)}\right|^2+\left|x_{k+1,k+1}v_{k+1}^{(p)}\right|^2}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^4}\geq$$

$$\geq\cos\alpha\left(\cos\alpha+\operatorname{Re}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)(1-t_1-t_2-2t)+$$

$$+\left(\sin\alpha+\operatorname{Im}\left(\Phi_k^{(p+2)}e^{i\alpha}\right)\right)^2+\frac{\left|x_{k+1,k+1}\right|^2+\left|y_{k+1,k+1}\right|^2}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}.$$

Отже, остаточно

$$\left|Q_k^{(p+2)}\right|^2\geq\frac{\left|a_{k+1,k+1}\right|^2}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha(1-t_1-t_2)(1-t_1-t_2-2t)\,. \qquad (24)$$

Використовуючи тепер оцінки (21), (24), одержимо

$$\frac{\left|a_{k,k}\right|^2}{\left|Q_k^{(p)}\right|^2}\leq\frac{L^2}{\cos^2\alpha(1-t_1-t_2-t)^2+\sin^2\alpha},\qquad k=1,2,\ldots,\qquad p=0,1,\ldots,$$

$$\frac{\left|a_{k+1,k+1}\right|^2}{\left|Q_k^{(p+2)}\right|^2\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}\leq\frac{1}{1+d},\qquad k=1,2,\ldots,\qquad p\geq 2\,, \qquad (25)$$

де d визначається за формулою (15‴).

Використовуючи нерівності (22), (23), оцінимо $\left|\Phi_k^{(n-2k)}-\Phi_k^{(2p-2k)}\right|$:

$$\left|\Phi_k^{(n-2k)}-\Phi_k^{(2p-2k)}\right|\leq\left|\underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k+j,k}}{1}-\underset{j=1}{\overset{2p-2k}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k+j,k}}{1}\right|+$$

$$+\left|\underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k,k+j}}{1}-\underset{j=1}{\overset{2p-2k}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k,k+j}}{1}\right|.$$

Враховуючи умови (12) теореми та оцінки (20′), (22), маємо

$$\left| \underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \underset{j=1}{\overset{2p-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| \le \frac{\prod\limits_{j=1}^{2p-2k+1} \left| a_{k+j,k} \right|}{\prod\limits_{j=1}^{2p-2k+1} \left| Q_{k+j,k}^{(n-2k-j)} \right| \prod\limits_{j=1}^{2p-2k} \left| Q_{k+j,k}^{(2p-2k-j)} \right|} =$$

$$= \frac{\left| a_{k+1,k} \right|}{\left| Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)} \right|} \prod_{j=1}^{2p-2k} \frac{\left| a_{k+j+1,k} \right|}{\left| Q_{k+j+1,k}^{(n-2k-j-1)} Q_{k+j,k}^{(2p-2k-j)} \right|} =$$

$$= \frac{\left| a_{k+1,k} \right|}{\left| Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)} \right|} \prod_{j=1}^{p-k} \frac{\left| a_{k+2j,k} \right|}{\left| Q_{k+2j-1,k}^{(2p-2k-2j+1)} Q_{k+2j,k}^{(2p-2k-2j)} \right|} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p-k} \frac{\left| a_{k+2j+1,k} \right|}{\left| Q_{k+2j,k}^{(n-2k-2j+1)} Q_{k+2j+1,k}^{(n-2k-2j)} \right|} \le$$

$$\le \frac{\left| a_{k+1,k} \right|}{\left| Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)} \right|} \prod_{j=1}^{p-k} \frac{1}{\sqrt{1+d_1}} \prod_{j=1}^{p-k} \frac{1}{\sqrt{1+d_1}} \le$$

$$\le \frac{L_1}{\sqrt{(1-t_1)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \frac{1}{(1+d_1)^{p-k}},$$

$$k = 0,1,\ldots, \qquad n,p = 1,2,\ldots.$$

Аналогічно, з використанням умов (12) та оцінок (20″), (23) одержимо

$$\left| \underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \underset{j=1}{\overset{2p-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k,k+j}}{1} \right| \le \frac{L_2}{\sqrt{(1-t_2)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \frac{1}{(1+d_2)^{p-k}}.$$

Тому

$$\left| \Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)} \right| \le \frac{L_1}{\sqrt{(1-t_1)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \frac{1}{(1+d_1)^{p-k}} +$$

$$+ \frac{L_2}{\sqrt{(1-t_2)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} \frac{1}{(1+d_2)^{p-k}},$$

$$k = 0,1,\ldots, \qquad n,p = 1,2,\ldots. \quad (26)$$

Щоб оцінити $\prod\limits_{j=1}^{k} \frac{\left| a_{j,j} \right|}{\left| Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)} \right|}$, $p = 1,2,\ldots$, $n \ge 2p$, розглянемо два випадки:

а) $k = 2\ell$:

$$\prod_{j=1}^{2\ell} \frac{\left| a_{j,j} \right|}{\left| Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)} \right|} = \frac{\left| a_{1,1} \right|}{\left| Q_1^{(n-2)} Q_{2l}^{(n-4\ell)} \right|} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\left| a_{2j,2j} \right|}{\left| Q_{2j}^{(2p-4j)} Q_{2j-1}^{(2p-4j+2)} \right|} \prod_{j=1}^{\ell-1} \frac{\left| a_{2j+1,2j+1} \right|}{\left| Q_{2j}^{(n-4j)} Q_{2j+1}^{(n-4j-2)} \right|} \le$$

$$\le \frac{L}{\sin^2\alpha + (1-t_1-t_2-t)^2 \cos^2\alpha} \frac{1}{\left(\sqrt{1+d}\right)^{2\ell-1}};$$

б) $k = 2\ell - 1$:

$$\prod_{j=1}^{2\ell-1} \frac{\left| a_{j,j} \right|}{\left| Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)} \right|} = \frac{\left| a_{1,1} \right|}{\left| Q_1^{(n-2)} Q_{2\ell-1}^{(2p-4\ell+2)} \right|} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\ell-1} \frac{\left| a_{2j,2j} \right|}{\left| Q_{2j}^{(2p-4j)} Q_{2j-1}^{(2p-4j+2)} \right|} \prod_{j=1}^{\ell-1} \frac{\left| a_{2j+1,2j+1} \right|}{\left| Q_{2j}^{(n-4j)} Q_{2j+1}^{(n-4j-2)} \right|} \le$$

$$\le \frac{L}{\sin^2\alpha + (1-t_1-t_2-t)^2 \cos^2\alpha} \frac{1}{\left(\sqrt{1+d}\right)^{2\ell-2}}.$$

Отже, для $k = 1, 2, \ldots$ маємо

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} \le \frac{L}{\sin^2 \alpha + (1 - t_1 - t_2 - t)^2 \cos^2 \alpha} \frac{1}{(\sqrt{1+d})^{k-1}}. \quad (27)$$

З нерівностей (25)–(27) випливає, що

$$\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right| \frac{\prod_{j=1}^{k} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{k} \left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} \le$$

$$\le \frac{L}{\sin^2 \alpha + (1 - t_1 - t_2 - t)^2 \cos^2 \alpha} \frac{1}{(\sqrt{1+d})^{k-1}} \times$$

$$\times \left(\frac{L_1}{\sqrt{(1-t_1)\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \frac{1}{(1+d_1)^{p-k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{L_2}{\sqrt{(1-t_2)\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \frac{1}{(1+d_2)^{p-k}} \right), \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad (28)$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{p+1} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{p} \left|Q_j^{(2p-2j)}\right| \prod_{j=1}^{p+1} \left|Q_j^{(n-2j)}\right|} = \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(n-2)}\right|} \prod_{j=1}^{p} \frac{|a_{j+1,j+1}|}{\left|Q_{j+1}^{(n-2j-2)} Q_j^{(2p-2j)}\right|} \le$$

$$\le \frac{L}{\sqrt{\sin^2 \alpha + (1 - t_1 - t_2 - t)^2 \cos^2 \alpha}} \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1+d}},$$

$$p = 0, 1, \ldots. \quad (29)$$

Підставляючи оцінки (28), (29) у формулу (4), одержимо

$$\left|f_n - f_{2p}\right| \le \sum_{k=0}^{p} \frac{\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right| \prod_{j=1}^{k} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{k} \left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} + \frac{\prod_{j=1}^{p+1} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{p} \left|Q_j^{(2p-2j)}\right| \prod_{j=1}^{p+1} \left|Q_j^{(n-2j)}\right|} \le$$

$$\le \frac{L_1}{\sqrt{(1-t_1)\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \frac{1}{(1+d_1)^{p}} +$$

$$+ \frac{L_2}{\sqrt{(1-t_2)\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \frac{1}{(1+d_2)^{p}} +$$

$$+ \frac{L}{\sqrt{\sin^2 \alpha + (1 - t_1 - t_2 - t)^2 \cos^2 \alpha}} \frac{1}{(\sqrt{1+d})^{p}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \frac{L}{\sqrt{\sin^2 \alpha + (1 - t_1 - t_2 - t)^2 \cos^2 \alpha}} \frac{1}{(\sqrt{1+d})^{k-1}} \times$$

$$\times \left(\frac{L_1}{\sqrt{(1-t_1)\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \frac{1}{(1+d_1)^{p-k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{L_2}{\sqrt{(1-t_2)\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \frac{1}{(1+d_2)^{p-k}} \right). \quad (30)$$

Переходячи в нерівності (30) до границі при $p \to \infty$, доходимо до висновку, що ДНД (1) збігається. У правильності оцінки (14) переконуємось, переходячи у тій самій нерівності до границі при $n \to \infty$.

Висновки. Наведена в роботі методика встановлення оцінок для залишків ДНД, елементи яких належать деяким прямокутним множинам комплексної площини, може бути застосована для дослідження їх абсолютної стійкості.

1. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про одну ознаку фігурної збіжності двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 28–35.
   Те саме: *Antonova T. M., Sus' O. M.* On one criterion for the figured convergence of two-dimensional continued fractions with complex elements // J. Math. Sci. – 2010. – **170**, No. 5. – P. 594–603.
2. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2007. – **50**, № 3. – С. 94–101.
3. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
4. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p. – Encyclopedia Math. Appl. – Vol. 11.
5. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
6. *Jacobsen L.* Modified approximants for continued fractions – construction and applications // Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs skrifter. – 1983. – No. 3. – P. 1–46. [Transactions of the Royal Norwegian Society of Science and Letters.]
7. *Jones W. B., Reid W. M.* Uniform twin-convergence region for continued fractions $K(a_n/1)$ // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1982. – **932**. – P. 106–128. – Analytic theory of continued fractions: Proc. Seminar-Workshop, Loen, Norway, 1981.
8. *Lorentzen L.* Continued fractions with circular twin value sets // Trans. Amer. Math. Soc. –2008. – **360**, No. 8. – P. 4287–4304.
9. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – 308 p.

О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ МНОЖЕСТВ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Для двумерных непрерывных дробей, элементы которых принадлежат некоторым прямоугольным множествам комплексной плоскости, установлено оценку погрешности их фигурной аппроксимации и доказано, что двумерные непрерывные дроби сходятся равномерно относительно последовательности этих прямоугольных множеств.

ON SOME SEQUENCES OF UNIFORM CONVERGENCE SETS FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS

For two-dimensional continued fractions the elements of which belong to some rectangular sets of complex plane the truncation error estimate of figured approximation is established. It is proved that two-dimensional continued fractions converge uniformly with respect to sequence of these rectangular sets.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 11.06.14