УДК 512.64

В. М. Прокіп

ТРИАНГУЛЯРИЗАЦІЯ ПАРИ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ З МІНІМАЛЬНИМИ КВАДРАТИЧНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Встановлено необхідні та достатні умови одночасної триангуляризації пари матриць над областю головних ідеалів з мінімальними квадратичними многочленами.

Нехай $M_{m,n}(R)$ – множина $(m \times n)$-матриць над областю головних ідеалів R з одиницею $e \neq 0$. Позначимо через I_n одиничну матрицю порядку n, а через $0_{n,k}$ – нульову $(n \times k)$-матрицю. Надалі для пари матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ через $[A, B]$ позначатимемо комутатор цих матриць, тобто $[A, B] = AB - BA$.

Кажуть, що пара матриць A і B із $M_{n,n}(R)$ триангуляризується, якщо існує матриця $T \in GL(n, R)$ така, що

$$TAT^{-1} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_n \end{Vmatrix}$$

і

$$TBT^{-1} = \begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{n,n-1} & \beta_n \end{Vmatrix}$$

– нижні трикутні матриці. Задача про триангуляризацію пар матриць над комутативними кільцями з одиницею на сьогодні не розв'язана. Зрозуміло, що необхідною умовою триангуляризації пари матриць над комутативними кільцями з одиницею є розкладність їхніх характеристичних многочленів у добуток лінійних множників. У роботі [4] ця задача досліджується для пар матриць простої структури над областю головних ідеалів з мінімальними квадратичними многочленами. У [6] встановлено необхідні та достатні умови триангуляризації наборів матриць другого порядку над комутативною областю.

Повне розв'язання цієї задачі для пар матриць над алгебраїчно замкненим полем дає теорема N. Y. McCoy [5, с. 118; 7]. Проте умови теореми McCoy не можуть бути перевірені раціональним способом. Конструктивні методи триангуляризації пар матриць над полем комплексних чисел запропоновано у працях [1, 2].

У цій роботі встановлено умови, за яких пара матриць A і B із $M_{n,n}(R)$ з мінімальними квадратичними многочленами, які розкладаються у добуток лінійних множників, одним і тим самим перетворенням подібності зводиться до трикутного вигляду. Як наслідок, встановлено необхідні та достатні умови триангуляризації пари інволютивних матриць над областю головних ідеалів.

Очевидно, що триангуляризація пари матриць містить задачу про наявність у розглядуваної пари спільних власних векторів. Нагадаємо, що матриці $A, B \in M_{n,n}(R)$ мають спільний лівий власний вектор, якщо для них існує ненульовий вектор $\bar{u} \in M_{1,n}(R)$ такий, що

$$\bar{u}A = \bar{u}\alpha \quad \text{і} \quad \bar{u}B = \bar{u}\beta ,$$

де $\alpha, \beta \in R$. Аналогічно вводиться поняття спільного правого власного вектора матриць A і B. Очевидно, якщо матриці A і B мають спільний лівий власний вектор, то вони мають і спільний правий власний вектор. Надалі під терміном «спільний власний вектор» матриць A і B будемо розуміти, що A і B мають спільний лівий власний вектор. Також очевидним є, що необхідною умовою існування спільного власного вектора для пари матриць A і B із $M_{n,n}(R)$ є умова, щоб характеристичні многочлени цих матриць можна було подати у вигляді добутків

$$a(\lambda) = \det(I_n\lambda - A) = (\lambda - \alpha_1)\ldots(\lambda - \alpha_p)\varphi(\lambda),$$

$$b(\lambda) = \det(I_n\lambda - B) = (\lambda - \beta_1)\ldots(\lambda - \beta_q)\psi(\lambda),$$

де $\alpha_i, \beta_j \in R$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, q$, $1 \le p, q \le n$.

Якщо ж $R = F$ − алгебраїчно замкнене поле, то задача про наявність у пари матриць $A, B \in M_{n,n}(F)$ спільного власного вектора була розв'язана в [8] (див. також [1]). Зазначимо, що в загальному випадку задача про спільні власні вектори пари матриць над комутативним кільцем залишається відкритою.

Нижче встановимо умови, за яких для пари матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ існує спільний власний вектор. Об'єктом дослідження будуть пари матриць із $M_{n,n}(R)$ з мінімальними квадратичними многочленами, які розкладаються у добутки лінійних множників.

Теорема 1. *Нехай* $A, B \in M_{n,n}(R)$ − *матриці з мінімальними многочленами*

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2), \qquad \alpha_1 \ne \alpha_2,$$

і

$$m_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2), \qquad \beta_1 \ne \beta_2,$$

відповідно, де $\alpha_i, \beta_j \in R$. *Матриці* A *і* B *мають спільний власний вектор над* R *тоді й тільки тоді, коли комутатор* $[A, B]$ − *особлива матриця.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність* очевидна.

Достатність. Нехай для пари матриць $A, B \in M_{n,n}(R)$ комутатор $[A, B]$ − особлива матриця. Нехай, далі, F − поле часток області R. Оскільки мінімальні многочлени $m_A(\lambda)$ та $m_B(\lambda)$ матриць A і B відповідно не мають кратних коренів, то A і B над полем F є матрицями простої структури. Очевидно, що комутатор $[A, B]$ − особлива матриця над полем F.

Згідно з наслідком 3.1 із [3] для матриць A і B над полем F існує спільний власний вектор $\bar{u}_0 \in M_{1,n}(F)$, який запишемо у вигляді

$$\bar{u}_0 = \left\| \frac{u_1}{v_1} \quad \frac{u_2}{v_2} \quad \ldots \quad \frac{u_n}{v_n} \right\|,$$

де $u_i \in R$ і $v_i \in R \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так як $v = \prod_{i=1}^{n} v_i \ne 0$, то очевидно, що вектор $\bar{u} = v\bar{u}_0 \in M_{1,n}(R)$ є спільним лівим власним вектором матриць A і B над областю головних ідеалів R. Теорему доведено. ♦

Нагадаємо, що матрицю $A \in M_{n,n}(R)$ називають інволютивною, якщо $A^2 = I_n$. Очевидно, що многочлен $m(\lambda) = (\lambda - e)(\lambda + e)$ є мінімальним многочленом інволютивної матриці A. Таким чином, із теореми 1 отримуємо

Наслідок 1. *Інволютивні матриці A і B із $M_{n,n}(R)$ мають спільний власний вектор тоді й тільки тоді, коли хоча б одна з матриць $(A - B)$ або $(A + B)$ є особливою.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність*. Нехай $\bar{u} \in M_{1,n}(R)$ – спільний власний вектор інволютивних матриць A і B, тобто

$$\bar{u}A = \bar{u}\alpha \qquad \text{і} \qquad \bar{u}B = \bar{u}\beta ,$$

де $\alpha, \beta \in \{e, -e\}$. Якщо $\alpha = \beta$, то $\bar{u}(A - B) = 0_{1,n}$. Отже, $(A - B)$ – особлива матриця. Якщо ж $\alpha = -\beta$, то $\bar{u}(A + B) = 0_{1,n}$. Звідси отримуємо, що $(A + B)$ – особлива матриця. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай хоча б одна з матриць $(A - B)$ або $(A + B)$ є особливою. Розглянемо добуток цих матриць

$$(A - B)(A + B) = AB - BA = [A,\ B].$$

Отже, комутатор $[A,\ B]$ інволютивних матриць A і B є особливою матрицею. Згідно з теоремою 1 матриці A і B мають спільний лівий власний вектор. Наслідок доведено. ♦

Використовуючи одержані вище результати, з’ясуємо умови, коли пара матриць із $M_{n,n}(R)$ триангуляризується.

Теорема 2. *Нехай $A, B \in M_{n,n}(R)$ – матриці з мінімальними многочленами відповідно*

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2), \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2,$$

і

$$m_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2), \qquad \beta_1 \neq \beta_2,$$

де $\alpha_i, \beta_j \in R$. Пара матриць A і B триангуляризується над R тоді й тільки тоді, коли комутатор $[A, B]$ – нільпотентна матриця.

Д о в е д е н н я. *Необхідність* очевидна.

Достатність. Нехай для пари матриць A і B із $M_{n,n}(R)$ з мінімальними многочленами відповідно

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2), \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2,$$

і

$$m_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2), \qquad \beta_1 \neq \beta_2,$$

де $\alpha_i, \beta_j \in R$, комутатор $[A, B]$ є нільпотентною матрицею. Згідно з теоремою 1 для пари матриць A і B існує спільний лівий власний вектор $\bar{u} \in M_{1,n}(R)$, тобто $\bar{u}A = \bar{u}\alpha_{11}$ і $\bar{u}B = \bar{u}\beta_{11}$, де α_{11} і β_{11} є коренями мінімальних многочленів $m_A(\lambda)$ та $m_B(\lambda)$ матриць A і B відповідно. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що вектор $\bar{u}$ є примітивним, тобто найбільший спільний дільник його елементів є дільником одиниці області R.

Отже, існує матриця $U_1 = \left\| \begin{matrix} \bar{u} \\ * \end{matrix} \right\| \in GL(n, R)$, першим рядком якої є вектор $\bar{u}$ і для якої виконуються рівності

$$U_1AU_1^{-1} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & & A_1 & \end{Vmatrix}$$

і

$$U_1BU_1^{-1} = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & & B_1 & \end{Vmatrix},$$

де $A_1, B_1 \in M_{n-1,n-1}(R)$. Так як комутатор $[A, B]$ є нільпотентною матрицею, то очевидно, що матриця

$$U_1[A,B]U_1^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & & [A_1, B_1] & \end{Vmatrix}$$

є нільпотентною. З цієї рівності випливає, що комутатор $[A_1, B_1]$ також є нільпотентною матрицею. Застосувавши до матриць A_1 і B_1 міркування, аналогічні, як до матриць A і B, отримуємо, що для матриць A_1 і B_1 існує матриця $\tilde{U}_2 \in GL(n-1, R)$ така, що

$$\tilde{U}_2A_1\tilde{U}_2^{-1} = \begin{Vmatrix} \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ * & & A_2 & \end{Vmatrix}$$

і

$$\tilde{U}_2B_2\tilde{U}_2^{-1} = \begin{Vmatrix} \beta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ * & & B_2 & \end{Vmatrix},$$

де $A_2, B_2 \in M_{n-2,n-2}(R)$, а α_{22} і β_{22} є коренями многочленів $m_A(\lambda)$ і $m_B(\lambda)$ відповідно. Тоді для матриці $T_2 = \mathrm{diag}\,(e, \tilde{U}_2)U_1$ отримуємо рівності

$$T_2AT_2^{-1} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & * & & A_{22} & \end{Vmatrix}$$

і

$$T_2BT_2^{-1} = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & * & & B_{22} & \end{Vmatrix}.$$

Продовжуючи подібні міркування далі, через скінченне число кроків отримуємо, що для матриць A і B існує матриця $T \in GL(n, R)$ така, що TAT^{-1} і TBT^{-1} − нижні трикутні матриці. Теорему доведено. ♦

Із теореми 2 випливають такі твердження.

Наслідок 2. *Нехай $A, B \in M_{n,n}(R)$ − матриці з мінімальними многочленами відповідно*

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2), \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2,$$

і

$$m_B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2), \qquad \beta_1 \neq \beta_2,$$

де $\alpha_i, \beta_j \in R$. Також нехай комутатор $[A, B]$ є нільпотентною матрицею. Якщо матриця A має просту структуру, то для матриць A і B існує матриця $W \in GL(n, R)$ така, що WAW^{-1} − діагональна матриця і WBW^{-1} − нижня трикутна матриця.

Д о в е д е н н я. Так як комутатор $[A, B]$ − нільпотентна матриця, то для матриць A і B існує матриця $U \in GL(n, R)$ така, що $UAU^{-1} = T_A$ і $UBU^{-1} = T_B$ − нижні трикутні матриці. Оскільки матриця A є простої структури, то очевидно, що UAU^{-1} теж є матрицею простої структури.

Неважко переконатись, що для UAU^{-1} існує нижня трикутна матриця $T \in GL(n, R)$ така, що $VT_A V^{-1}$ – діагональна матриця. Зрозуміло, що $VT_B V^{-1}$ є нижньою трикутною матрицею. Наслідок доведено. ♦

Наслідок 3. *Інволютивні матриці A і B із $M_{n,n}(R)$ є триангуляризовними тоді й тільки тоді, коли комутатор $[A, B]$ є нільпотентною матрицею.*

Якщо при умовах теореми 2 пара матриць A і B із $M_{n,n}(R)$ триангуляризується, то з доведення достатності отримуємо метод зведення цієї пари до трикутних форм, який допускає скінченну процедуру перевірки.

Зауважимо також, що отримані результати справджуються для матриць над областями елементарних дільників. Разом з тим зазначимо, що наслідок 1 та теорема 3.1 із [3] виконуються для матриць над комутативними областями.

1. *Альпин Ю. А., Икрамов Х. Д.* Рациональные процедуры в задаче об общих инвариантных подпространствах двух матриц // Зап. научн. сем. ПОМИ: Численные методы и вопросы организации вычислений. XIV. – 2000. – **268**. – С. 9–23.
   Те саме: *Al'pin Yu. A., Ikramov Kh. D.* Rational procedures in the problem of common invariant subspaces of two matrices // J. Math. Sci. – 2003. – **114**, No. 6. – P. 1757–1764.
2. *Альпин Ю. А., Корешков Н. А.* Об одновременной триангулизуемости матриц // Мат. заметки. – 2000. – **68**, № 5. – С. 648–652.
   Те саме: *Al'pin Yu. A., Koreshkov N. A.* On the simultaneous triangulability of matrices // Math. Notes. – 2000. – **68**, No. 5. – P. 552–555.
3. *Прокіп В. М.* Діагоналізація матриць над областю головних ідеалів з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, $\alpha \neq \beta$ // Укр. мат. вісник. – 2010. – **7**, № 2. – С. 212–219.
   Те саме: *Prokip V. M.* Diagonalization of matrices over the domain of principal ideals with minimal polynomial $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, $\alpha \neq \beta$ // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 4. – P. 481–485.
4. *Прокіп В. М.* Про триангуляризацію матриць над областю головних ідеалів з мінімальним квадратичним многочленом // Праці міжнар. геометр. центру. – 2010. – **3**, № 3. – С. 34–39.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.
   Те саме: *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – 561 p.
6 *Florentino Carlos A. A.* Simultaneous similarity and triangularization of sets of 2 by 2 matrices // Linear Algebra Appl. – 2009. – **431**, No. 9. – P. 1652–1674.
7. *McCoy N. H.* On the characteristic roots of matrix polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. – 1936. – **42**, No. 8. – P. 592–600.
8. *Shemesh D.* Common eigenvectors of two matrices // Linear Algebra Appl. – 1984. – **62**. – P. 11–18.

ТРИАНГУЛЯРИЗАЦИЯ ПАРЫ МАТРИЦ НАД ОБЛАСТЬЮ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ С МИНИМАЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Установлены необходимые и достаточные условия одновременной триангуляризации пары матриц над областью главных идеалов с минимальными квадратическими многочленами.

TRIANGULARIZATION OF A PAIR OF MATRICES OVER A PRINCIPAL IDEAL DOMAIN WITH MINIMAL QUADRATIC POLYNOMIALS

Necessary and sufficient conditions for the simultaneous triangulability of matrices over a principal ideal domain with minimal quadratic polynomials are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.01.14