УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

БЛОЧНО-ДІАГОНАЛЬНА ПОДІБНІСТЬ І НАПІВСКАЛЯРНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ

Знайдено канонічну форму для комплексної матриці B відносно подібності $B \to S^{-1}BS$, де S є прямою сумою оборотних верхньотрикутних теплицевих блоків. Встановлено необхідні та достатні умови напівскалярної еквівалентності одного типу поліноміальних матриць.

У праці [13] досліджується верхньотрикутна подібність верхньотрикутних комплексних матриць. У зв'язку з цим побудовано певні аналоги форми Жордана відносно вказаної подібності матриць. Перетворення подібності пар верхньотрикутних теплицевих матриць вивчаються у роботі [10], де встановлено інваріанти таких пар. У праці автора [8] розглянуто подібність матриць, при якій перетворювальна матриця має верхньотрикутний теплицевий вигляд. При цьому в класі зазначеного типу подібних матриць вказано деяку форму, яка визначається однозначно.

У цій статті розглянуто перетворення $B \to S^{-1}BS$, де S є прямою сумою верхньотрикутних теплицевих блоків фіксованих порядків. Відносно таких перетворень встановлено канонічну форму для довільної комплексної матриці. Мотивацією цього дослідження є застосування отриманих результатів для знаходження умов, за яких матриці над кільцем поліномів (далі – поліноміальні матриці) переводяться одні в одних множенням зліва на неособливі матриці над полем, а справа – на оборотні поліноміальні. Вказані перетворення поліноміальних матриць, як відомо, називають напівскалярно еквівалентними. Вперше вони введені до розгляду у [5]. Близькими до [5] є праці [9, 11].

1. Означення, термінологія, допоміжні твердження. Для подальшого нагадаємо деякі відомі та введемо нові поняття, а також сформулюємо певні домовленості. Одиничну матрицю порядку k позначатимемо через E_k. А нульовий елемент поля $\mathbb{C}$ і нульову матрицю, розмір якої є очевидним із контексту, будемо позначати через 0. Поле $\mathbb{C}$ будемо вважати впорядкованим лексикографічно, тобто $a + bi \le c + di$, якщо $a < c$, або $a = c$ і $b \le d$. Такий самий лексикографічний порядок введемо і на множині позицій (впорядкованих пар натуральних чисел) довільної матриці. Нагадаємо, що *побічною діагоналлю* прямокутної матриці розміру $m \times n$ є сукупність її елементів у позиціях $(1,n)$, $(2,n-1)$, …, $(r,n-r+1)$, де $r = \min(m,n)$. Поряд із транспонуванням нам знадобиться поняття пертранспонування матриці.

Означення 1. Матрицю ${}^tC = P_n C^t P_m$ розміру $n \times m$ називають пертранспонованою до $(m \times n)$-матриці C, якщо C^t – транспонована до матриці C, а P_n і P_m – per-одиничні матриці перестановки порядків відповідних n і m, тобто квадратні матриці з одиницями на побічній діагоналі та всіма нульовими елементами поза цією діагоналлю.

Якщо транспонована матриця C^t будується за матрицею C поворотом на прямий кут кожного рядка (стовпця) навколо його елемента на головній діагоналі, то при побудові пертранспонованої матриці ${}^tC$ кожен рядок (стовпець) матриці C повертається на прямий кут навколо його елемента, який розміщений на побічній діагоналі. Квадратні матриці, що витримують операцію пертранспонування, і тільки вони є персиметричними [1], тобто є симетричними відносно побічної діагоналі. Легко перевірити властивості пертранспонування, аналогічні до властивостей звичайного транспонування:

1°) ${}^t(C+D) = {}^tC + {}^tD$;

2°) ${}^t(\alpha C) = \alpha\, {}^tC$, α – елемент поля;

3°) ${}^t(CD) = ({}^tD)({}^tC)$ (за умови, що множення виконується);

4°) ${}^t({}^tC) = C$;

5°) ${}^t(C^{-1}) = ({}^tC)^{-1}$ (для квадратних оборотних матриць A);

6°) квадратні матриці C і ${}^tC$ є подібними.

Означення 2. Діагоналлю $(m\times n)$-матриці C називають сукупність її елементів c_{pq} у позиціях (p,q), для яких різниця індексів $p-q$ є величиною сталою.

Звернемо увагу, що в літературі, крім наведеного, використовується й дещо інше поняття діагоналі матриці (див., наприклад, [6]).

Занумеруємо далі всі діагоналі довільної матриці $C = \left\| c_{ij} \right\|_1^{m,n}$, починаючи з найнижчої, тобто діагональ, що складається з одного елемента c_{m1}, вважаємо першою. Другою буде діагональ з елементів $c_{m-1,1}$, c_{m2}; третьою – $c_{m-2,1}$, $c_{m-1,2}$, c_{m3} і т. д. Остання діагональ матриці, як і перша, складається з одного елемента – c_{1n}. Елементи довільної діагоналі, як і головної, будемо нумерувати зверху вниз. Таким чином, за вказаної нумерації діагоналей матриці та елементів кожної з них можемо вважати занумерованими всі елементи довільної матриці $C = \left\| c_{ij} \right\|_1^{m,n}$, в результаті чого одержимо таку їх послідовність:

$$c_{m1},\, c_{m-1,1},\, c_{m2},\, c_{m-2,1},\, c_{m-1,2},\, c_{m3},\, \ldots,\, c_{1,n-1},\, c_{2n},\, c_{1n}\,. \tag{1}$$

Елемент c_{m1} вважаємо першим елементом матриці C, елемент $c_{m-1,1}$ – другим, c_{m2} – третім і т. д.

Означення 3. Першим ненульовим елементом матриці називають перший ненульовий елемент першої її ненульової діагоналі, тобто перший ненульовий елемент послідовності (1).

Кожному елементу c_{ij}, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, матриці C поставимо у відповідність два рядки:

$$\overline{c}_{ij}^{(1)} = \left\| -c_{i+1,j} \quad -c_{i+2,j} \quad \ldots \quad -c_{i+m-1,j} \right\|, \tag{2}$$

$$\overline{c}_{ij}^{(2)} = \left\| c_{i,j-1} \quad c_{i,j-2} \quad \ldots \quad c_{i,j-n+1} \right\|, \tag{3}$$

довжини $m-1$ і $n-1$ відповідно. Тут $c_{pj} = 0$ при $p > n$ і $c_{iq} = 0$ при $q < 1$. Якщо матриця C є квадратною порядку n $(m = n)$, то кожному її елементу c_{ij} поставимо у відповідність рядок довжини $n-1$ вигляду

$$\overline{c}_{ij}^{(0)} = \overline{c}_{ij}^{(2)} + \overline{c}_{ij}^{(1)} = \\ = \left\| c_{i,j-1} - c_{i+1,j} \quad c_{i,\,j-2} - c_{i+2,j} \quad \ldots \quad c_{i,j-n+1} - c_{i+n-1,j} \right\|. \tag{4}$$

Дотримуючись послідовності (1), з рядків вигляду (2), (3) побудуємо матриці $H_1(C)$, $H_2(C)$ відповідно, а також матрицю $H_0(C)$ для випадку, коли матриця C є квадратною:

$$H_1(C)=\begin{Vmatrix} \overline{c}_{m1}^{(1)} \\ \overline{c}_{m-1,1}^{(1)} \\ \overline{c}_{m2}^{(1)} \\ \vdots \\ \overline{c}_{1n}^{(1)} \end{Vmatrix}, \qquad H_2(C)=\begin{Vmatrix} \overline{c}_{m1}^{(2)} \\ \overline{c}_{m-1,1}^{(2)} \\ \overline{c}_{m2}^{(2)} \\ \vdots \\ \overline{c}_{1n}^{(2)} \end{Vmatrix},$$

$$H_0(C)=\begin{Vmatrix} \overline{c}_{m1}^{(0)} \\ \overline{c}_{m-1,1}^{(0)} \\ \overline{c}_{m2}^{(0)} \\ \vdots \\ \overline{c}_{1n}^{(0)} \end{Vmatrix}=H_2(C)+H_1(C). \tag{5}$$

Перша з матриць, $H_1(C)$, буде розміру $mn\times(m-1)$, а друга, $H_2(C)$, − розміру $mn\times(n-1)$. Утворені таким способом матриці $H_1(C)$, $H_2(C)$ і $H_0(C)$ назвемо C*-матрицями типу* ***I***, ***II*** і ***III*** відповідно.

Розглянемо матрицю $B\in M(n,\mathbb{C})$, записану в блочному вигляді

$$B=\begin{Vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mm} \end{Vmatrix}, \qquad B_{ij}\in M(n_i\times n_j,\mathbb{C}), \tag{6}$$

і перетворення подібності

$$B\to S^{-1}BS, \tag{7}$$

де матриця S має вигляд

$$S=\bigoplus_{i=1}^{m}S_i, \qquad S_i=\begin{Vmatrix} s_{0i} & s_{1i} & \dots & s_{n_i-1,i} \\ & s_{0i} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & s_{1i} \\ 0 & & & s_{0i} \end{Vmatrix}, \qquad s_{0i}\neq 0. \tag{8}$$

Порядки n_i діагональних блоків S_i, B_{ij} матриць S, B, очевидно, співпадають. Якщо матриця B є прямою сумою верхньотрикутних теплицевих блоків порядків n_i, то вона не змінюється під дією перетворення (7). Тому надалі вважатимемо, що вигляд матриці B є відмінним від (8).

Зауваження 1. Тут і надалі порядки діагональних блоків матриці перетворення S та відповідне розбиття на блоки матриці B є фіксованим.

Твердження 1. *Інваріантами матриці* B *вигляду* (5) *відносно перетворення* (7) *матрицею* S *вигляду* (8) *є:*

1°) *позиції перших відмінних від нуля елементів блоків* B_{ij}, $i,j=1,\dots,m$;

2°) *перші ненульові діагоналі діагональних блоків* B_{ii}, $i=1,\dots,m$;

3°) *перші послідовні діагоналі блоку* B_{ii}, $1\le i\le m$, *кожна з яких має однакові елементи, та наступна діагональ з неоднаковими елементами, якщо цей блок є верхньотрикутною матрицею.*

Д о в е д е н н я не становить труднощів.

2. Майже канонічна форма матриці. Нехай G − орієнтований граф з вершинами $1,\dots,m$ без ненаправлених циклів. Говоримо, що подібність (7) під дією перетворювальної матриці S вигляду (8), де s_{0i}, $1,\dots,m$, − ненульові елементи із поля $\mathbb{C}$, є G*-перетворенням*, якщо $s_{0p}=s_{0q}$ для всіх орієнтованих ребер $p\to q$ із G.

Аналогічно до методу, викладеного в праці [12], зведемо спочатку матрицю B перетвореннями (7) до так званої *майже канонічної форми*. Позначимо через G_0 граф з вершинами $1,\dots,m$ без ребер.

Крок 1. Якщо блок B_{11} матриці B має розмір 1×1 або є нульовим, то він є незмінним при G_0-перетвореннях. Фіксуємо цей блок як зведений. В іншому разі незмінним є перший відмінний від нуля його елемент. Фіксуємо цей елемент і записуємо $(B_1, G_1) := (B, G_0)$.

Крок 2. Якщо блок B_{12} є нульовим, то він є незмінним при G_1-перетвореннях. Фіксуємо його як зведений і записуємо $(B_2, G_2) := (B_1, G_1)$. У протилежному випадку за допомогою G_1-перетворення прирівнюємо до одиниці перший відмінний від нуля його елемент. Додаємо орієнтоване ребро $1 \to 2$ до графа G_1 і, позначивши результуючі матрицю і граф відповідно через B_2 і G_2, матимемо (B_2, G_2).

Продовжуємо так і далі спочатку блоками першого блочного рядка другої матриці пари, а потім − зліва направо блоками другого рядка і т.д.

Крок h. Нехай B_{pq} є h-м блоком отриманої на попередньому $(h-1)$-му кроці матриці B_{h-1}. Тоді $h=(p-1)m+q$. Якщо блок B_{pq} є нульовим, то фіксуємо його як зведений. Якщо блок B_{pq} є ненульовим і $p=q$ або граф G_{h-1} має ненаправлений шлях від p до q, то незмінним є перший відмінний від нуля елемент цього блоку. Фіксуємо цей елемент як зведений і кожного разу записуємо $(B_h, G_h) := (B_{h-1}, G_{h-1})$. В іншому випадку G_{h-1}-перетворенням, застосованим до матриці G_{h-1}, прирівнюємо до одиниці перший відмінний від нуля елемент блоку B_{pq}. Додаємо до графа G_{h-1} орієнтоване ребро $p \to q$ і позначаємо через B_h і G_h результуючі матрицю і граф відповідно. Отже, на h-му кроці отримаємо (B_h, G_h).

Продовжуючи так і далі, через m^2 кроків дістанемо матрицю B_{m^2}, у якій будуть зафіксовані всі нульові блоки як зведені, а також перші відмінні від нуля елементи кожного ненульового блоку. Отриману матрицю назвемо майже G_{m^2}-канонічною.

Означення 4. Нехай G − орієнтований граф з вершинами $1,\dots,m$ без ненаправлених циклів. Матрицю $B=\left\|B_{ij}\right\|_1^m$ вигляду (6) назвемо майже G-канонічною відносно перетворення (7) матрицею S вигляду (8), якщо блоки B_{ij} задовольняють наступні умови:

(***i***) перший відмінний від нуля елемент блоку B_{ij} дорівнює одиниці, якщо граф G містить орієнтоване ребро $i \to j$;

(***ii***) блок B_{ij} є нульовим, якщо G не має неорієнтованого шляху від i до j або неорієнтований шлях від i до j містить орієнтоване ребро $p \to q$ таке, що $(p,q) > (i,j)$ відносно лексикографічного порядку;

(***iii***) блок B_{ij} є довільним в інших випадках.

Майже G-канонічну форму матриці B будемо позначати через B_{ncan}.

Приклад. Матриці

$$\left\| \begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|cc} * & 1 & * \\ \hline * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right\|, \qquad \left\| \begin{array}{c:c} B'_{11} & B'_{12} \\ \hdashline B'_{21} & B'_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|cc} * & 0 & 1 \\ \hline * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right\|$$

є майже G-канонічними з тим самим графом $G : 1 \to 2$. Однак вони не є подібними, оскільки перші відмінні від нуля елементи (які дорівнюють одиниці) блоків B_{12}, B'_{12} займають різні позиції (див. твердження 1). ◀

Теорема 1. *Для кожної матриці B у класі подібних $\{S^{-1}BS\}$, де S має вигляд* (8) *існує єдиний орієнтований граф G і майже G-канонічна матриця B_{ncan} (в сенсі означення* 4). *Дві матриці B, B' переводяться одна в одну матрицею перетворення подібності вигляду* (8) *тоді й тільки тоді, коли їхні майже G-канонічні форми B_{ncan}, B'_{ncan} (для одного і того ж графа G) переводяться одна в одну матрицею перетворення подібності вигляду*

$$S = \bigoplus\nolimits_{i=1}^{m} S_i, \qquad S_i = \left\| \begin{matrix} 1 & s_{1i} & \dots & s_{n_i-1,i} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & s_{1i} \\ 0 & & & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{9}$$

Д о в е д е н н я. *Достатність* очевидна.

Необхідність. З того, що матриці B, B' належать до класу $\{S^{-1}BS\}$, де S має вигляд (8), випливає, що до цього класу належать також і їхні майже G-канонічні форми B_{ncan}, B'_{ncan}, тобто $B'_{\text{ncan}} = S^{-1}B_{\text{ncan}}S$. Оскільки в (p,q)-блоках матриць B_{ncan}, B'_{ncan} перші відмінні від нуля елементи дорівнюють одиниці, якщо граф G містить орієнтоване ребро $p \to q$, то отримуємо рівність $s_{0p} = s_{0q}$ для діагональних елементів матриці S. А це означає, що матрицю S можна вибрати у вигляді (9). Теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Майже G-канонічна матриця $B_{\text{ncan}} = \left\| B_{ij0} \right\|_1^m$, $B_{ij0} \in$ $\in M(n_i \times n_j, \mathbb{C})$, перетворенням подібності, що переставляє діагональні блоки, не зводиться до блочно-діагонального вигляду, якщо граф G є деревом. Якщо граф G є об'єднанням дерев G_v, $v = 1,\dots,s$, що не перетинаються, з вершинами $u_{v1},\dots,u_{vt_v}$ відповідно, то майже G-канонічна матриця B_{ncan} є блочно переставновно подібною до прямої суми далі незвідних матриць B_v, які є майже G'_v-канонічними формами для деякого графа G'_v, отриманого з G_v перенумерацією його вершин $u_{v1},\dots,u_{vt_v}$ на $1,\dots,t_v$.*

Д о в е д е н н я. Перша частина є очевидною.

Оскільки блоки на перетині u_{ip}-го та u_{jq}-го блочних рядків і стовпців матриці B_{ncan} є нульовими, якщо $i \neq j$, то звідси й випливає блочна перестaвна подібність її до прямої суми s пар вказаного у теоремі вигляду. Теорему доведено. ♦

Надалі розглядатимемо лише майже G-канонічні матриці, де G є деревом. Нехай такою є уже матриця $B_{\text{ncan}} = \left\| B_{ij} \right\|_1^m$, $B_{ij} \in M(n_i \times n_j, \mathbb{C})$. Для діагональних блоків B_{ii} матриці B побудуємо B_{ii}-матриці $H_0(B_{ii})$ типу ***III***, а для недіагональних блоків B_{ij} побудуємо B_{ij}-матриці $H_1(B_{ij})$ і $H_2(B_{ij})$

типів ***I*** і ***II*** (див. (5)). Далі складемо з них матрицю розміру $n^2 \times (n-m)$ такого вигляду:

$$\left\| \begin{matrix} H_0(B_{11}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_0(B_{mm}) \\ H_1(B_{12}) & H_2(B_{12}) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ H_1({}^tB_{21}) & H_2({}^tB_{21}) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_1(B_{1m}) & 0 & 0 & \dots & 0 & H_2(B_{1m}) \\ H_1({}^tB_{m1}) & 0 & 0 & \dots & 0 & H_2({}^tB_{m1}) \\ 0 & H_1(B_{23}) & H_2(B_{23}) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & H_1({}^tB_{32}) & H_2({}^tB_{32}) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & H_1(B_{2m}) & & & & H_2(B_{2m}) \\ & H_1({}^tB_{m2}) & & & & H_2({}^tB_{m2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_1(B_{m-1,m}) & H_2(B_{m-1,m}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_1({}^tB_{m,m-1}) & H_2({}^tB_{m,m-1}) \end{matrix} \right\|. \quad (10)$$

Нагадаємо, що кожному елементу діагонального блоку B_{ii} матриці B_{ncan} зіставлено певний рядок B_{ii}-матриці $H_0(B_{11})$, а кожному елементу недіагонального блоку B_{ij}, $i<j$, (або матриці ${}^tB_{ji}$) зіставлено цілком визначений рядок матриці $\left\| H_1(B_{ij}) \;\; H_2(B_{ij}) \right\|$ (відповідно, матриці $\left\| {}^tH_1(B_{ji}) \;\; {}^tH_2(B_{ji}) \right\|$), $i, j = 1, \dots, m$.

На основі такого зіставлення можемо вважати, що між елементами матриці B_{ncan} і рядками матриці (10) встановлено взаємно однозначну відповідність.

Теорема 3. *У класі* $\{S^{-1}BS\}$, *де* S *має вигляд* (8), *існує одна й тільки одна майже* G*-канонічна матриця* $B_{\text{ncan}} = \left\| B_{ij} \right\|_1^m$, $B_{ij} \in M(n_i \times n_j, \mathbb{C})$, *з нульовими елементами, яким відповідає максимальна система перших лінійно незалежних рядків матриці* (10).

Д о в е д е н н я. Маємо деяку майже G-канонічну матрицю $B_{\text{ncan}} = \left\| B_{ij} \right\|_1^m$, $B_{ij} \in M(n_i \times n_j, \mathbb{C})$. Будемо здійснювати над B_{ncan} перетворення (7) матрицею вигляду (9), переходячи від однієї майже G-канонічної матриці до іншої. Проведемо спочатку доведення для блоку B_{11} матриці B_{ncan} та відповідної підматриці

$$\left\| H_0(B_{11}) \;\; 0 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0 \;\; 0 \right\|$$

матриці (10). Доведення для інших діагональних блоків B_{ii} та відповідних підматриць

$$\left\| 0 \;\; \dots \;\; 0 \;\; H_0(B_{ii}) \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0 \right\|$$

будуємо цілком аналогічно.

Нагадаємо, що перша ненульова діагональ блоку B_{11} є незмінною при дії перетворення (7) матрицею (9) (див. твердження 1). Крім того, слід зауважити, що всі рядки матриці $H_0(B_{11})$, які відповідають елементам блоку B_{11}, розташованим не вище першої ненульової діагоналі, є нульовими. Якщо B_{11} не є верхньотрикутним блоком і (p_1+1, q_1) − позиція першого відмінного від нуля його елемента, то в матриці $H_0(B_{11})$ першим ненульовим рядком буде рядок, що відповідає (p_1, q_1)-елементу блоку B_{11}. Якщо ж блок B_{11} є верхньотрикутним і (p_1, q_1-1), (p_1+1, q_1) − перша пара сусідніх по діагоналі позицій з неоднаковими в них елементами, то першим ненульовим рядком матриці $H_0(B_{11})$ буде рядок, що відповідає елементу в позиції (p_1, q_1) матриці B_{11}. Цей рядок визначається однозначно, оскільки однозначно визначаються всі елементи, що передують (p_1, q_1)-елементу. Тому на першому кроці перетворенням (7) матрицею S вигляду (9), де $s_{21} = \ldots = s_{n_1-1,1} = 0$, $S_i = E_{n_i}$, $i \neq 1$, підібравши відповідним чином $s_{11} \neq 0$, можна отримати нульовий елемент в позиції матриці B_{11}, якій відповідає перший ненульовий рядок $\bar{d}_{t_1}$ матриці $H_0(B_{11})$. В отриманій матриці однозначно визначаються всі її елементи від першого і до (p_1, q_1)-елемента і далі до елемента, що передує позиції (p_2, q_2), якій відповідає перший лінійно незалежний з $\bar{d}_{t_1}$ рядок $\bar{d}_{t_2}$ матриці $H_0(B_{11})$. Дійсно, нехай матриці $B_{11} = \|b_{uv}\|_1^{n_1}$ і $B'_{11} = \|b_{uv}\|_1^{n_1}$ пов'язані співвідношенням

$$B_{11}S_1 = S_1 B'_{11}, \tag{11}$$

де

$$S_1 = \begin{Vmatrix} 1 & s_{11} & \ldots & s_{n_1-1,1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ldots & s_{11} \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тоді для довільних елементів b_{uv} і b'_{uv} матриць B_{11}, B'_{11} із рівності (11) маємо

$$b'_{uv} - b_{uv} = \begin{Vmatrix} b_{u,v-1} - b'_{u+1,v} & b_{u,v-2} - b'_{u+2,v} & \ldots & b_{u,v-n_1+1} - b'_{u+n_1-1,v} \end{Vmatrix} \times$$
$$\times \begin{Vmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n_1-1,1} \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

де $b_{us} = 0$ при $s < 1$ і $b'_{rv} = 0$ при $r > n_1$. Рівність (12), записана для елементів матриць B_{11} і B'_{11} в позиції (p_1, q_1), зважаючи на те, що $b'_{p_1+1,q_1} = b_{p_1+1,q_1}$, $b'_{p_1+2,q_1} = b_{p_1+2,q_1}$, …, $b'_{p_1+n_1-1,q_1} = b_{p_1+n_1-1,q_1}$ і $b'_{p_1,q_1} = b_{p_1,q_1} = 0$, дає

$$\bar{d}_{t_1} \begin{Vmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n_1-1,1} \end{Vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Якщо наступний після $\bar{d}_{t_1}$ рядок матриці $H_0(B_{11})$ (або $H_0(B'_{11})$) є кратним $\bar{d}_{t_1}$, то з рівності (12), записаної для наступних після (p_1, q_1)-елементів матриць B_{11} і B'_{11}, враховуючи (13), випливає рівність цих елементів. Продовжуючи послідовно аналогічні міркування стосовно пар елементів матриць B_{11}, B'_{11}, яким відповідають рядки матриць $H_0(B_{11})$, $H_0(B'_{11})$, розташовані підряд після $\bar{d}_{t_1}$ і є кратними $\bar{d}_{t_1}$, приходимо до рівності цих елементів. Такі міркування будемо продовжувати аж до пари елементів матриць B_{11}, B'_{11}, яким відповідають рядки, що передують першому лінійно незалежному з $\bar{d}_{t_1}$ рядку $\bar{d}_{t_2}$ матриці $H_0(B_{11})$ (чи $H_0(B'_{11})$). Тим самим отримуємо співпадіння в матрицях B_{11} і B'_{11} відповідних елементів від першої позиції і до позиції, яка передує позиції (p_2, q_2).

За індукцією, припустимо існування у вказаному в теоремі класі $\{S^{-1}BS\}$ майже G-канонічної матриці $B_{\text{ncan}} = \left\|B_{ij}\right\|_1^m$ з нульовими елементами блоку B_{11} у позиціях (p_1, q_1), $\ldots$, (p_k, q_k), яким відповідають перші k, $1 \le k < \operatorname{rank} H_0(B_{11})$, лінійно незалежні рядки $\bar{d}_{t_1}$, $\ldots$, $\bar{d}_{t_k}$ матриці $H_0(B_{11})$. Позначимо через $\bar{d}_{t_{k+1}}$ перший лінійно незалежний з $\bar{d}_{t_1}$, $\ldots$, $\bar{d}_{t_k}$ рядок матриці $H_0(B_{11})$, а через (p_{k+1}, q_{k+1}) і $b_{p_{k+1}, q_{k+1}}$ – відповідно позицію і елемент матриці B_{11}, яким відповідає цей рядок. За індукцією, припускаємо також однозначність визначення елементів матриці B_{11} від першого і до елемента, що передує $b_{p_{k+1}, q_{k+1}} \ne 0$. Розглянемо рівняння

$$\begin{Vmatrix} \bar{d}_{t_1} \\ \vdots \\ \bar{d}_{t_k} \\ \bar{d}_{t_{k+1}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_1-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_{p_{k+1}, q_{k+1}} \end{Vmatrix} \tag{14}$$

з невідомими x_1, $\ldots$, x_{n_1-1}, яке, очевидно, має розв'язок. З розв'язку $x_1 = s_{11}$, $\ldots$, $x_{n_1-1} = s_{n_1-1,1}$ цього рівняння побудуємо матрицю S вигляду (9), де

$$S_1 = \begin{Vmatrix} 1 & s_{11} & \ldots & s_{n_1-1,1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & s_{11} \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix}, \qquad S_i = E_{n_i}, \qquad i \ne 1,$$

і застосуємо за її допомогою перетворення подібності до матриці B_{ncan}: $S^{-1} B_{\text{ncan}} S = B'_{\text{ncan}}$. Покажемо, що отримана в результаті матриця $B'_{\text{ncan}} = \left\|B'_{ij}\right\|_1^m$ має нульові елементи в позиціях (p_1, q_1), $\ldots$, (p_k, q_k), (p_{k+1}, q_{k+1}) блоку $B'_{11} \in M(n_1, \mathbb{C})$. Дійсно, матриці B_{11} і B'_{11} задовольняють рівність (11), згідно з якою для довільних їх елементів b_{uv} і b'_{uv} виконується рівність (12). Якщо цю рівність записувати почергово для елементів матриць B_{11} і B'_{11} у позиціях (p_1, q_1), $\ldots$, (p_k, q_k), то кожного разу в правій частині одержуємо нуль. А це означає, що $b'_{p_1, q_1} = b_{p_1, q_1} = 0$, $\ldots$, $b'_{p_k, q_k} = b_{p_k, q_k} = 0$. Якщо ж, нарешті, рівність (12) записати для елементів в позиції (p_{k+1}, q_{k+1}) матриць B_{11} і B'_{11} і врахувати при цьому, що, згідно з припущенням індукції $b'_{p_{k+1}+1,q_{k+1}} = b_{p_{k+1}+1,q_{k+1}}$, …, $b'_{p_{k+1}+n_1-1,q_{k+1}} = b_{p_{k+1}+n_1-1,q_{k+1}}$, то матимемо

$$b'_{p_{k+1},q_{k+1}} - b_{p_{k+1},q_{k+1}} = \bar{d}_{t_{k+1}} \begin{Vmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n_1-1,1} \end{Vmatrix}.$$

Звідси, з огляду на те, що стовпець $\begin{Vmatrix} s_{11} & \ldots & s_{n_1-1,1} \end{Vmatrix}^t$ задовольняє рівняння (14), дістанемо, що $b'_{p_{k+1},q_{k+1}} = 0$.

Припустимо тепер, що у блоках B_{11}, B'_{11} матриць B_{ncan}, B'_{ncan} дорівнюють нулеві елементи, яким відповідають перші $k+1$ лінійно незалежні рядки матриць $H_0(B_{11})$ і $H_0(B'_{11})$ відповідно. Запишемо рівність (12) для першої пари елементів блоків B_{11}, B'_{11}, які розміщені відразу після позиції (p_{k+1}, q_{k+1}). Рядок, що є множником у правій частині цієї рівності, співпадає, очевидно, з наступним після $\bar{d}_{t_{k+1}}$ рядком матриці $H_0(B_{11})$. У випадку лінійної залежності цього рядка з попередніми рядками матриці $H_0(B_{11})$ у правій частині рівності (12) матимемо нуль. Отже, вищевказана пара є парою однакових елементів. Аналогічно доводимо інваріантність всіх наступних елементів блоку B_{11}, поки не дійдемо до елемента, якому відповідає лінійно незалежний з $\bar{d}_{t_1}$, …, $\bar{d}_{t_k}$, $\bar{d}_{t_{k+1}}$ рядок матриці $H_0(B_{11})$.

Таким чином, методом індукції показано існування майже G-канонічної матриці $B_{\text{ncan}} = \|B_{ij}\|_1^m$, у якій є нульові елементи (в блоках B_{ii}, $i = 1, \ldots, m$), яким відповідає максимальна система перших лінійно незалежних рядків

$$\bar{c}_{t_1}, \bar{c}_{t_2}, \ldots, \bar{c}_{t_r} \tag{15}$$

підматриці

$$\begin{Vmatrix} H_0(B_{11}) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & H_0(B_{mm}) \end{Vmatrix}$$

матриці (10). Водночас доведено однозначність всіх діагональних блоків B_{ii}, $i = 1, \ldots, m$, матриці B_{ncan}. Крім того, в цій матриці інваріантами є також перші ненульові діагоналі кожного недіагонального блоку B_{ij}. Рядки матриці (10), які відповідають елементам цих діагоналей, є нульовими.

Нехай перший ненульовий рядок підматриці

$$\begin{Vmatrix} H_1(B_{12}) & H_2(B_{12}) & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \tag{16}$$

відповідає елементу b_{uv} у позиції (u, v) блоку B_{12}. Цей елемент знаходиться, очевидно, в наступній після першої ненульової діагоналі блоку B_{12}. Всі елементи, що передують b_{uv}, легко бачити, визначаються однозначно. Якщо перший ненульовий рядок матриці (16), про який тут йдеться, лінійно залежить від рядків (15), то інваріантом також є і елемент b_{uv}. Для доведення цього досить у рівності

$$B_{\text{ncan}} S = S B'_{\text{ncan}}, \tag{17}$$

де матриця S має вигляд (9), порівняти в обох частинах елементи в позиції

(u,v) блоку B_{12}. Якщо позначити через $\overline{S}$ стовпець

$$\overline{S} = \left\| s_{11} \quad \dots \quad s_{n_1-1,1} \quad s_{21} \quad \dots \quad s_{n_2-1,2} \quad s_{1m} \quad \dots \quad s_{n_m-1,m} \right\|^t \tag{18}$$

з елементів матриці S (див. (9)), а аналогічний до B_{12} блок матриці B'_{ncan} та його елемент в позиції (u,v) позначити через B'_{12} і b'_{uv} відповідно, то з (17) матимемо

$$b'_{uv} - b_{uv} =$$

$$= \left\| -b'_{u+1,v} \quad \dots \quad -b'_{u+n_1-1,v} \quad b_{u,v-1} \quad \dots \quad b_{u,\,v-n_2+1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\| \overline{S}, \tag{19}$$

де $b'_{rv} = 0$ для $r > n_1$ і $b_{us} = 0$ для $s < 1$. Оскільки елементи $b_{u+1,v}$, $\dots$, $b_{n_1,v}$ блоку B_{12} передують b_{uv}, то вони співпадають з відповідними елементами $b'_{u+1,v}$, $\dots$, $b'_{n_1,\,v}$ блоку B'_{12}. Тому рядок, який є множником у правій частині співвідношення (19), співпадає з першим ненульовим рядком матриці (16). А оскільки для рядків $\overline{c}_{t_1}, \overline{c}_{t_2}, \dots, \overline{c}_{t_r}$ (15) маємо, що

$$\left\| \begin{matrix} \overline{c}_{t_1} \\ \overline{c}_{t_2} \\ \vdots \\ \overline{c}_{t_r} \end{matrix} \right\| \overline{S} = 0 ,$$

то права частина рівності (19) дорівнює нулеві. Отже, $b_{uv} = b'_{uv}$. Подібні міркування застосовуємо і до наступних послідовних рядків матриці (10), лінійно залежних із системою (15), поки не дійдемо до рядка $\overline{c}_{t_{r+1}}$, який є лінійно незалежним в сукупності з рядками $\overline{c}_{t_1}, \overline{c}_{t_2}, \dots, \overline{c}_{t_r}$. Нехай цей рядок відповідає елементу b_{uv} в позиції (u,v) блоку B_{pq} (або блоку ${}^tB_{qp}$), $p < q$. Очевидно, що розв'язок рівняння

$$\left\| \begin{matrix} \overline{c}_{t_1} \\ \overline{c}_{t_2} \\ \vdots \\ \overline{c}_{t_r} \\ \overline{c}_{t_{r+1}} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_1-1} \\ x_{n_1} \\ \vdots \\ x_{n_1+n_2-2} \\ \vdots \\ x_{n-m} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_{uv} \end{matrix} \right\| \tag{20}$$

існує. За його розв'язком

$$x_1 = s_{11}, \quad \dots, \quad x_{n_1-1} = s_{n_1-1,1}, \quad x_{n_1} = s_{12}, \quad \dots, \quad x_{n_1+n_2-2} = s_{n_2-1,2},$$

$$\dots, \qquad x_{n-m} = s_{n_m-1,m}$$

побудуємо матрицю S вигляду (9) і застосуємо за її допомогою перетворення подібності до матриці B_{ncan}. В результаті отримаємо матрицю $B'_{\text{ncan}} = S^{-1}BS$. Тоді на підставі рівності (17) для елемента b_{uv} блоку B_{pq} і відповідного елемента b'_{uv} матриці B'_{ncan} можемо записати рівність, аналогічну до (19), в якій замість індексу n_1 буде n_p, а замість n_2 – n_q.

Оскільки $b'_{u+1,v} = b_{u+1,v}$, $\ldots$, $b'_{n_p,v} = b_{n_p,v}$, то згадану рівність подамо у вигляді

$$b'_{uv} - b_{uv} = \overline{d}_{t_{r+1}} \overline{S}. \tag{21}$$

Враховуючи, що стовпець $\overline{S}$ вигляду (18) задовольняє рівняння (20), з (21) матимемо $b'_{uv} = 0$. Таким чином, отримали матрицю B'_{ncan} з нульовими елементами в позиції, якій відповідає рядок $\overline{c}_{t_{r+1}}$. При цьому в матриці B'_{ncan} збережуться, порівняно з B_{ncan}, елементи у позиціях, яким відповідають рядки матриці (10), що передують $\overline{c}_{t_{r+1}}$. Щоб не вводити нових позначень, будемо вважати, що матриця B_{ncan} вже має нульові елементи в потрібних $r+1$ позиціях. Якщо наступний після $\overline{c}_{t_{r+1}}$ рядок матриці (10) лінійно залежить від попередніх, то аналогічно до того, як це виконано вище, можна показати інваріантність елемента матриці B_{ncan}, якому відповідає цей рядок. Так поступаємо зі всіма наступними послідовними рядками матриці (10), що лінійно виражаються через попередні рядки, і отримуємо інваріантність відповідних елементів матриці B_{ncan}. Врешті або вичерпаємо всі рядки матриці (10), або прийдемо в цій матриці до рядка $\overline{c}_{t_{r+2}}$, який лінійно незалежний з попередніми рядками. У першому випадку доведення завершено, а в другому – робимо наступний крок. В кінцевому підсумку, методом індукції буде доведено існування єдиної майже G-канонічної матриці B_{ncan} з нульовими елементами в позиціях, яким відповідає максимальна система перших лінійно незалежних рядків матриці (10). Теорему доведено. ♦

Набір позицій матриці B_{ncan}, яким відповідає максимальна система перших лінійно незалежних рядків матриці (10), позначимо через F.

Означення 5. Майже G-канонічну матрицю B_{ncan}, до якої за теоремами 1, 3 зводиться довільна матриця B перетвореннями (7) матрицею вигляду (8) і яка за теоремою 3 є єдиною, називають FG-канонічною. Тут G означає граф, який визначає позиції обов'язкових одиничних елементів, а F – набір позицій обов'язкових нульових елементів цієї матриці.

Зауваження 2. В означенні 5 порядки діагональних блоків перетворювальної матриці вигляду (8) вважаються фіксованими (див. зауваження 1).

Зауваження 3. У випадку діагональної подібності (7) матриця (10) є порожньою. Тоді майже G-канонічну матрицю B_{ncan} можна називати FG-канонічною, вважаючи набір F порожнім. У цьому випадку FG-канонічна форма збігається з G-канонічною, введеною у праці [12].

3. Умови напівскалярної еквівалентності одного класу поліноміальних матриць. Нижче розглянемо поліноміальні матриці, еквівалентні справа регулярному, зокрема унітальному, матричному поліному з певними спектральними властивостями одного з його коефіцієнтів. Матриці, правоеквівалентні до регулярних, називають у [4] регуляризовними справа. Там же наведено умови регуляризовності (див. теорему 3 [4, розд. III, §2]) та метод побудови для довільної матриці правоеквівалентного унітального матричного полінома, якщо такий існує (теорема 2 [4, розд. III, §3]).

Нехай матриця $N(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$, $\deg \det N(x) = 2n$, регуляризується справа, тобто існує матриця $R(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$ така, що добуток $M(x) = N(x)R(x)$ є регулярним матричним поліномом другого степеня. Можемо вважати його унітальним, тобто $M(x) = E_n x^2 + M_1 x + M_2$. Припустимо, що один з коефіцієнтів цього тричлена, наприклад M_1, має всі попарно взаємно прості елементарні дільники. Це означає, що в жордановій формі матриці M_1 кожному власному значенню відповідає рівно одна клітка Жордана. Матрицю з такою властивістю в англомовній літературі називають «*a nonderogatory matrix*». Загальноприйнятого еквівалента в літературі українською досі не існує. У перекладі книжки [7] російською такі матриці називають простими (див. також [6]). Однак цей термін не є вдалим, оскільки не передає сенсу властивості «nonderogatory», який, на думку редактора перекладу [7], полягає в тому, що степені мінімального та характеристичного полінома матриці співпадають (тобто відсутнє зниження степеня при переході від характеристичного полінома до мінімального). У праці [3] запропоновано фразу «a nondoregatory matrix» перекладати російською як «*непонижающая матрица*». Тому, дотримуючись максимальної точності перекладу цього терміну (замість введення нового), пропонуємо матрицю з вказаною вище властивістю українською мовою називати «*незнижувальною матрицею*». Отже, подальшою метою цієї роботи є встановлення умов напівскалярної еквівалентності матриць $N(x)$, $N'(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$, якщо коефіцієнти M_1, M_1' у відповідних правоеквівалентних унітальних матричних поліномах $M(x) = E_n x^2 + M_1 x + M_2$, $M'(x) = E_n x^2 + M_1' x + M_2'$ є незнижувальними матрицями. Без обмеження загальності вважатимемо, що матриці M_1, M_1' мають форму Жордана, клітки яких є верхніми і розміщені на головних діагоналях у порядку зростання їх власних значень. З [5] випливає, що для напівскалярної еквівалентності матриць $N(x)$, $N'(x)$ необхідно і достатньо, щоб поліноми $M(x)$ і $M'(x)$ були подібними. Тому ці поліноми можемо записати у вигляді

$$M(x) = E_n x^2 + \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_m)x + B, \qquad B = \left\| B_{ij} \right\|_1^m, \tag{22}$$

$$M'(x) = E_n x^2 + \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_m)x + B', \qquad B' = \left\| B'_{ij} \right\|_1^m, \tag{23}$$

де клітки Жордана J_i та діагональні клітки B_{ii}, B'_{ii} мають однакові порядки n_i.

Теорема 4. *Нехай класи* $\{CN(x)Q(x)\}$, $\{C'N'(x)Q'(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць містять унітальні матричні тричлени* $M(x)$, $M'(x)$ *вигляду* (22), (23) *відповідно. Для того щоб ці класи співпадали, тобто для напівскалярної еквівалентності матриць* $N(x)$ *і* $N'(x)$, *необхідно й достатньо, щоб співпадали* FG*-канонічні форми у сенсі означення* 5 *вільних членів* B, B' *матричних поліномів* $M(x)$, $M'(x)$.

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай матриці $N(x)$, $N'(x)$ напівскалярно еквівалентні. Тоді за наслідком із [5] поліноми $M(x)$, $M'(x)$ подібні, причому перетворювальна матриця S при такій подібності повинна комутувати з формою Жордана $\operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_m)$, у якій кожні дві клітки мають різні власні значення. Це означає, що матриця S має вигляд (8), де порядки n_i діагональних блоків дорівнюють порядкам відповідних жорданових кліток J_i (див. [2, §2, гл. VIII]). Тому вільні члени B, B' поліномів $M(x)$, $M'(x)$ повинні мати одну і ту саму FG-канонічну форму.

Достатність. З того, що вільні члени B, B' поліномів $M(x)$, $M'(x)$ мають однакові FG-канонічні форми відносно перетворення (7) матрицею вигляду (8), переставною з $\operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_m)$, випливає подібність цих поліномів. А звідси згідно зі згадуваним уже наслідком із [5] отримуємо напівскалярну еквівалентність матриць $N(x)$ і $N'(x)$. Теорему доведено. ♦

1. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. − Москва: Наука, 1984. − 320 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. − Москва: Наука, 1988. − 552 с.
3. *Икрамов Х. Д.* О достаточных условиях для существования унитарной конгруэнции, преобразующей заданную комплексную матрицу в вещественную // Зап. научн. сем. ПОМИ: Численные методы и вопросы организации вычислений. XXIII. − 2010. − **382**. − С. 38−46.
   Те саме: *Ikramov Kh. D.* On sufficient conditions for the existence of a unitary congruence transformation of a given complex matrix into a real one // J. Math. Sci. − 2011. − **176**, No. 1. − P. 20−24.
4. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. − Київ: Наук. думка, 1981. − 224 с.
5. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. − Київ: Наук. думка, 1977. − С. 61−66.
6. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. − Москва: Наука, 1972. − 232 с.
7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. − Москва: Мир, 1989. − 655 с.
   Те саме: *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix analysis. − Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. − 561 p.
8. *Шаваровський Б. З.* Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць та трикутна подібність числових матриць // Прикл. проблеми механіки і математики. − 2013. − Вип. 11. − С. 63−69.
9. *Baratchart L.* Un théorème de factorisation et son application à la représentation des systèmes cuclique causaux // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. **1**. Math. − 1982. − **295**, No. 3. − P. 223−226.
10. *Bart H., Thijsse G. Ph. A.* Similarity invariants for pair of upper triangular Toeplitz matrices // Linear Algebra Appl. − 1991. − **147.** − P. 17−44.
11. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra Appl. − 1999. − **291**, No. 1-3. − P. 167−184.
12. *Futorny V., Horn R. A., Sergeichuk V. V.* A canonical form for nonderogatory matrices under unitary similarity // Linear Algebra Appl. − 2011. − **435**, No. 4. − P. 830−841.
13. *Thijsse Ph.* Upper triangular similarity of upper triangular matrices // Linear Algebra Appl. − 1997. − **260**, No. 1-3. − P. 119−149.

БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЕ ПОДОБИЕ И ПОЛУСКАЛЯРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МАТРИЦ

Найдена каноническая форма для комплексной матрицы B относительно подобия $B \to S^{-1}BS$, где S является прямой суммой обратимых верхнетреугольных теплицевых блоков. Установлены необходимые и достаточные условия полускалярной эквивалентности одного типа полиномиальных матриц.

THE BLOCK-DIAGONAL SIMILARITY AND SEMISCALAR EQUIVALENCE OF POLYNOMIAL MATRICES

The canonical form for complex matrix B up to similarity $B \to S^{-1}BS$, in which S is direct sum of invertible upper triangular Toeplitz blocks. The necessary and sufficient conditions of semiscalar equivalence one type of polynomial matrices established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.12.13