УДК 519.6

М. Я. Бартіш, О. В. Ковальчук

ПРО ОДИН ТРИКРОКОВИЙ МЕТОД З ПОРЯДКОМ ЗБІЖНОСТІ $1+\sqrt{2}$ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано трикрокову модифікацію методу із порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ для розв'язування нелінійних операторних рівнянь. Доведено збіжність методу та отримано оцінку похибки. На тестових прикладах виконано числове дослідження цієї модифікації і проведено порівняння з базовим методом, зроблено висновки щодо отриманих результатів. Апробація методу підтверджує теоретичні дослідження.

Математичне моделювання складних фізичних процесів часто потребує розв'язування систем нелінійних операторних рівнянь. Універсальних методів для успішного розв'язування широкого класу подібних задач немає, тому актуальною є проблема побудови нових ефективніших алгоритмів. Пропонується трикроковий ітераційний метод для розв'язування систем нелінійних операторних рівнянь, побудований на основі методу із порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ [1].

1. Формулювання задачі. Нехай P – нелінійний оператор, визначений в опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Розглянемо рівняння

$$P(x) = 0 . \tag{1}$$

Для розв'язування рівняння (1) в [1] вперше запропоновано метод, який належить до класу багатокрокових схем або методів з пам'яттю:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - [P'(\theta_k)]^{-1} P(x_k) , \\ \theta_{k+1} &= x_{k+1} - \frac{1}{2}[P'(\theta_k)]^{-1} P(x_{k+1}), \quad k = 0,1,\ldots, \qquad \theta_0 = x_0 . \end{aligned} \tag{2}$$

Пізніше, незалежно один від одного, в різних формах і з різними умовами цей метод розглянуто іншими авторами [5, 8, 9]. Слід відзначити, що практичні дослідження, проведені авторами праць [1, 4, 5, 8, 9], підтвердили високі швидкісні властивості цього методу порівняно з методом Ньютона.

Часто в літературі таку ітераційну схему називають методом із швидкістю збіжності $1+\sqrt{2}$. Перевагою цього методу є те, що на кожній ітерації він потребує практично стільки ж обчислень, як і метод Ньютона, водночас має більшу швидкість збіжності. У випадку одного рівняння індекс ефективності методу дорівнює $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ і є більшим від індексу ефективності методу Ньютона, який дорівнює $\sqrt{2}$.

Основною особливістю методу є те, що значення похідної від оператора $P(x)$ обчислюється у деякій проміжній точці, що дозволяє в результаті прискорити процес розв'язування задачі. При цьому обчислювальні затрати для знаходження проміжної точки є незначними. Зумовлено це використанням значень оператора від похідних з попереднього кроку.

З використанням ідеї побудови трикрокових методів [2] у цій роботі на базі методу (2) запропоновано такий метод розв'язання для задачі (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - [P'(\theta_0)]^{-1} P(x_0), \qquad \theta_0 = x_0 , \\ u_k &= x_k - [P'(\theta_{k-1})]^{-1} P(x_k), \qquad \theta_k = \frac{u_k + x_k}{2} , \\ v_k &= x_k - [P'(\theta_k)]^{-1} P(x_k) , \\ x_{k+1} &= \arg\min \left\| P(v_k + \gamma(u_k - v_k)) \right\|, \qquad \gamma \in \mathbb{R}, \qquad k = 1,2,\ldots . \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, що x_1 цього методу співпадає з першим наближенням, отриманим за допомогою методу Ньютона. Метод (3) не вимагає значної кількості додаткових обчислень на кожній ітерації порівняно з методом (2), проводиться лише одна додаткова одновимірна мінімізація.

2. Дослідження швидкості збіжності алгоритму (3).

Теорема. *Нехай*

1°) $P(x)$ − *двічі неперервно диференційовний нелінійний оператор, визначений в опуклій області* $\mathcal{D} = \{x \in X, \|x - x_0\| \le 2B\|P(x_0)\|\}$ *і*

$$\forall x \in \mathcal{D} \qquad \|P'(x)\| \le M_1, \qquad \|P''(x)\| \le M_2 ;$$

2°) $\forall\, x, y \in \mathcal{D}$ $P''(x)$ *задовольняє умову Ліпшиця*

$$\|P''(x) - P''(y)\| \le L\|x - y\| ;$$

3°) $\forall x \in \mathcal{D}$ *існує оператор* $[P'(x)]^{-1}$, *причому* $\|[P'(x)]^{-1}\| \le B$;

4°) *в області* $\mathcal{D}$ *існує точка* x^*, *яка є розв'язком задачі* (1);

5°) *початкове наближення* x_0 *вибрано так, що*

$$\eta = \max\{M_1B^3M_2, \sqrt{CM_1B^3}\}\|P(x_0)\| < 1 ,$$

де $C = B^2M_2^2\left(1 + \frac{1}{2}BM_1\right) + BL\left(\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}BM_1\right)^2\right)$.

Тоді послідовність $\{x_k\}$, *побудована за методом* (3), *коректно визначена та збігається до* x^* *і справджується оцінка*

$$\|P(x_{k+1})\| \le \left(\prod_{i=1}^{k} \mu_i^{t_{k-i+1}}\right)\eta^{D_{k+1}}\|P(x_0)\| , \tag{4}$$

де

$$D_{k+1} = 2D_k + D_{k-1} + 2, \quad D_{-1} = -1, \quad D_0 = 0, \quad k = 0,1,\ldots,$$

$$\mu_i \in (0, 1], \quad t_k = 2t_{k-1} + t_{k-2}, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad k = 3,4,\ldots .$$

Д о в е д е н н я теореми здійснимо методом математичної індукції.

Оскільки $\theta_0 = x_0$, то перше наближення методу співпадає з наближенням за методом Ньютона. Отже, можемо записати наступне:

$$\|x_1 - x^*\| \le BM_2\|x_0 - x^*\|^2 .$$

Із розкладу $P(x)$ в околі точки x^* у ряд Тейлора та з використанням умови ***3°*** теореми отримаємо

$$\|P(x)\| \le M_1\|x - x^*\|, \qquad \|x - x^*\| \le B\|P(x)\| . \tag{5}$$

Тоді для x_1 маємо

$$\|P(x_1)\| \le M_1BM_2\|x_0 - x^*\|^2 \le M_1B^3M_2\|P(x_0)\|^2 \le \eta^{D_1}\|P(x_0)\| .$$

Отже, для $k = 0$ оцінка (4) виконується.

Застосуємо метод математичної індукції для послідовності $x_2, x_3, \ldots$.

Для $k = 1$ отримаємо

$$v_1 - x^* = x_1 - x^* - [P'(\theta_1)]^{-1}P(x_1) = [P'(\theta_1)]^{-1}(P'(\theta_1)(x_1 - x^*) -$$
$$- (P(x_1) - P(x^*))) = [P'(\theta_1)]^{-1}\Big(((P'(\theta_1) - P'(x^*))(x_1 - x^*) -$$
$$- \frac{1}{2}P''(x^*)(x_1 - x^*)^2 - \frac{1}{2}(P''(x^* + \tau(x_1 - x^*)) - P''(x^*))(x_1 - x^*)^2\Big) .$$

Оцінимо цей вираз за нормою:

$$\left\| v_1 - x^* \right\| \le B \left\| \left((P'(\theta_1) - P'(x^*))(x_1 - x^*) - \frac{1}{2} P''(x^*)(x_1 - x^*)^2 \right) \right\| +$$

$$+ \frac{BL}{2} \left\| x_1 - x^* \right\|^3, \tag{6}$$

$$\left\| (P'(\theta_1) - P'(x^*))(x_1 - x^*) - \frac{1}{2} P''(x^*)(x_1 - x^*)^2 \right\| \le$$

$$\le M_2 \left\| \theta_1 - x^* - \frac{1}{2}(x_1 - x^*) \right\| \left\| x_1 - x^* \right\| +$$

$$+ L \left\| \theta_1 - x^* \right\|^2 \left\| x_1 - x^* \right\|. \tag{7}$$

Використовуючи з методу (3) формулу для визначення θ_1, запишемо

$$\left\| \theta_1 - x^* - \frac{1}{2}(x_1 - x^*) \right\| \le \frac{1}{2} B M_2 \left\| \theta_0 - x^* \right\| \left\| x_1 - x^* \right\| + \frac{1}{2} B M_2 \left\| x_1 - x^* \right\|^2. \tag{8}$$

Далі оцінимо $\left\| \theta_1 - x^* \right\|$:

$$\left\| \theta_1 - x^* \right\| = \left\| \frac{u_1 + x_1}{2} - x^* \right\| \le \frac{1}{2} \left(\left\| u_1 - x^* \right\| + \left\| x_1 - x^* \right\| \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left\| x_1 - x^* - P'(\theta_1)^{-1} P(x_1) \right\| + \left\| x_1 - x^* \right\| \right) \le$$

$$\le \left(1 + \frac{1}{2} B M_1 \right) \left\| x_1 - x^* \right\|. \tag{9}$$

Отже, з (6), зважаючи на (7)–(9), випливає, що

$$\left\| v_1 - x^* \right\| \le \frac{B^2 M_2^2}{2} \left\| \theta_0 - x^* \right\| \left\| x_1 - x^* \right\|^2 + \frac{B^2 M_2^2}{2} \left\| x_1 - x^* \right\|^3 +$$

$$+ BL \left(1 + \frac{1}{2} B M_1 \right)^2 \left\| x_1 - x^* \right\|^3 + \frac{BL}{2} \left\| x_1 - x^* \right\|^3.$$

Тоді, використавши оцінку (5) для v_1, отримаємо

$$\left\| v_1 - x^* \right\| \le \frac{1}{2} B^5 M_2^2 \left\| P(x_0) \right\| \left\| P(x_1) \right\|^2 + \left(\frac{1}{2} B^2 M_2^2 + BL \left(\frac{1}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(1 + \frac{1}{2} B M_1 \right)^2 \right) \right) B^3 \left\| P(x_1) \right\|^3 \le C B^3 \left\| P(x_0) \right\| \left\| P(x_1) \right\|^2.$$

Отже,

$$\left\| P(x_2) \right\| \le \mu_1 \left\| P(v_1) \right\| \le \mu_1 M_1 \left\| v_1 - x^* \right\| \le \mu_1 M_1 C B^3 \left\| P(x_0) \right\| \left\| P(x_1) \right\|^2 \le$$

$$\le \mu_1 M_1 C B^3 \left\| P(x_0) \right\| \left(\eta^{D_1} \left\| P(x_0) \right\| \right)^2 = \mu_1^{t_1} \eta^{D_2} \left\| P(x_0) \right\|.$$

Таким чином, оцінка (4) виконується для $k = 1$.

Нехай твердження теореми справджуються для послідовності наближень $x_3, x_4, \ldots, x_k$. Тоді міркуваннями, подібними до попередніх, можемо показати, що

$$\left\| v_k - x^* \right\| \le B \left((P'(\theta_k) - P'(x^*))(x_k - x^*) - \frac{1}{2} P''(x^*)(x_k - x^*)^2 \right) +$$

$$+ \frac{BL}{2} \left\| x_k - x^* \right\|^3. \tag{10}$$

Аналогічно до оцінок (7)−(9) неважко отримати

$$\left\|(P'(\theta_k) - P'(x^*))(x_k - x^*) - \frac{1}{2}P''(x^*)(x_k - x^*)^2\right\| \le$$

$$\le M_2 \left\|\theta_k - x^* - \frac{1}{2}(x_k - x^*)\right\| \left\|x_k - x^*\right\| +$$

$$+ L\left\|\theta_k - x^*\right\|^2 \left\|x_k - x^*\right\|, \tag{11}$$

$$\left\|\theta_k - x^* - \frac{1}{2}(x_k - x^*)\right\| \le \frac{1}{2}BM_2 \left\|\theta_{k-1} - x^*\right\| \left\|x_k - x^*\right\| +$$

$$+ \frac{1}{2}BM_2 \left\|x_k - x^*\right\|^2, \tag{12}$$

$$\left\|\theta_k - x^*\right\| \le \left(1 + \frac{1}{2}BM_1\right)\left\|x_k - x^*\right\|. \tag{13}$$

З (10), використовуючи (11)−(13), можемо записати

$$\left\|v_k - x^*\right\| \le \frac{1}{2}B^2 M_2^2 \left(1 + \frac{1}{2}BM_1\right)\left\|x_{k-1} - x^*\right\| \left\|x_k - x^*\right\|^2 +$$

$$+ \left(\frac{B^2 M_2^2 + BL}{2} + BL\left(1 + \frac{1}{2}BM_1\right)^2\right)\left\|x_k - x^*\right\|^3.$$

Тоді, використавши оцінку (5) для v_k, отримаємо

$$\left\|v_k - x^*\right\| \le CB^3 \left\|P(x_{k-1})\right\| \left\|P(x_k)\right\|^2.$$

Враховуючи побудову методу, маємо

$$\left\|P(x_{k+1})\right\| \le \mu_k \left\|P(v_k)\right\| \le \mu_k M_1 \left\|v_k - x^*\right\| \le \mu_k M_1 CB^3 \left\|P(x_{k-1})\right\| \left\|P(x_k)\right\|^2 \le$$

$$\le \mu_k M_1 CB^3 \prod_{i=1}^{k-2} \mu_i^{t_{k-i-1}} \eta^{D_{k-1}} \left\|P(x_0)\right\| \prod_{i=1}^{k-1} \mu_i^{2t_{k-i}} \eta^{2D_k} \left\|P(x_0)\right\|^2 \le$$

$$\le \prod_{i=1}^{k} \mu_i^{t_{k-i-1i}} \eta^{2D_k + D_{k-1} + 2} \left\|P(x_0)\right\|. \tag{14}$$

Отже, послідовність наближень, побудована за формулами (3), збігається до x^*.

Теорему доведено. ♦

Зауваження. Порядок збіжності $\rho = 1 + \sqrt{2}$ методу (3), враховуючи (14), визначаємо з рівняння $\rho = 2 + \dfrac{1}{\rho}$.

Чисельні експерименти. У більшості випадків досить важко вибрати початкове наближення, тому використовують демпфований [3, с. 269] множник. Отже, остаточно метод набуде такого вигляду:

$$x_1 = x_0 - \alpha_0 [P'(\theta_0)]^{-1} P(x_0), \qquad \theta_0 = x_0,$$

$$u_k = x_k - \beta_k [P'(\theta_{k-1})]^{-1} P(x_k), \qquad \theta_k = \frac{u_k + x_k}{2},$$

$$v_k = x_k - \lambda_k [P'(\theta_k)]^{-1} P(x_k),$$

$$x_{k+1} = \arg\min \left\|P(v_k + \gamma(u_k - v_k))\right\|, \qquad \gamma \in \mathbb{R}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3'}$$

при $\alpha_0, \beta_k, \lambda_k \in (0, 1]$, які забезпечують монотонність $\left\|P(x)\right\|$.

Тестування методів проведено на таких прикладах.

Приклад 1. Розширена сингулярна система Powell [7, p. 26]:

$$P_{4k-3}(x) = x_{4k-3} + 10x_{4k-2}, \qquad P_{4k-2}(x) = \sqrt{5}\,(x_{4k-1} - x_{4k}),$$

$$P_{4k-1}(x) = (x_{4k-2} - 2x_{4k-1})^2, \qquad P_{4k}(x) = \sqrt{10}\,(x_{4k-3} - x_{4k})^2,$$

$$x_0 = (3, -1, 0, 1, \ldots, 3, -1, 0, 1), \qquad 1 \le k \le \frac{n}{4}.$$

Розв'язком задачі $P(x) = 0$ є $x^* = (0, \ldots, 0)$.

У цьому прикладі якобіан системи у точці розв'язку є виродженим.

Приклад 2. Розширена проблема Cragg і Levy [6, p. 16]:

$$P_{4k-3}(x) = \left(e^{x_{4k-3}} - x_{4k-2}\right)^2, \qquad P_{4k-2}(x) = 10\left(x_{4k-2} - x_{4k-1}\right)^3,$$

$$P_{4k-1}(x) = \mathrm{tg}^2(x_{4k-1} - x_{4k}), \qquad P_{4k}(x) = x_{4k} - 1,$$

$$x_0 = (1, 2, \ldots, 1, 2), \qquad 1 \le k \le \frac{n}{4}.$$

Розв'язком задачі $P(x) = 0$ є $x^* = (0, 1, 1, 1, \ldots, 0, 1, 1, 1)$.

У цьому прикладі якобіан системи у точці розв'язку є виродженим.

Приклад 3. Сингулярна функція Broyden [6, p. 14]:

$$P_k(x) = \left((3 - 2x_k)x_k - 2x_{k+1} + 1\right)^2, \qquad k = 1,$$

$$P_k(x) = \left((3 - 2x_k)x_k - x_{k-1} - 2x_{k+1} + 1\right)^2, \qquad 1 < k < n,$$

$$P_k(x) = \left((3 - 2x_k)x_k - x_{k-1} + 1\right)^2, \qquad k = n,$$

$$x_0 = (-1, \ldots, -1).$$

Розв'язки x^* задачі $P(x) = 0$ є різними для різних n.

Приклад 4. Розширена функція Freudenstein і Roth [6, p. 9]:

$$P_{2k-1} = x_{2k-1} + \left((5 - x_{2k})x_{2k} - 2\right)x_{2k} - 13,$$

$$P_{2k} = x_{2k-1} + \left((x_{2k} + 1)x_{2k} - 14\right)x_{2k} - 29,$$

$$x_0 = (90, 60, \ldots, 90, 60), \qquad 1 \le k \le \frac{n}{2}.$$

Розв'язком задачі $P(x) = 0$ є $x^* = (5, 4, \ldots, 5, 4)$.

Таблиця 1

Номер прикладу	Метод \ N		16	40	60	80	100
1	(2)	i	25	25	26	26	26
		k	475	1075	1638	2158	2678
	(3′)	i	7	7	7	7	7
		k	181	349	489	629	769
2	(2)	i	39	40	41	41	41
		k	741	1720	2583	3403	4223
	(3′)	i	16	16	17	17	17
		k	459	843	1234	1574	1914
3	(2)	i	24	24	24	24	25
		k	456	1032	1512	1992	2575
	(3′)	i	7	7	7	7	7
		k	184	352	492	632	772
4	(2)	i	11	11	11	11	11
		k	209	473	693	913	1133
	(3′)	i	9	9	9	9	9
		k	231	447	627	807	987

У табл. 1 подано результати роботи методу для ***прикладів 1–4***. Тут N – розмірність задачі, i – кількість ітерацій, затрачених на пошук наближення до розв'язку задачі, k – кількість еквівалентних обчислень вектор-функції $P(x)$. Обчислення проводили до виконання умови $\|x_k - x_{k-1}\| \le 10^{-8}$. При реалізації алгоритму (2) використовували демпфований множник.

Висновки. На підставі теоретичних досліджень, які підтверджуються виконаними практичними розрахунками, та порівнянні отриманих результатів бачимо, що в сенсі кількості обчислень запропонований метод (3) є ефективнішим від методу (2), особливо, коли матриця Якобі є виродженою у точці розв'язку, а також зі збільшенням розмірності задачі.

1. *Бартіш М. Я.* Про один ітераційний метод розв'язання функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 5. – С. 387–391.
2. *Бартіш М. Я., Огородник Н. П.* Трикрокові ітераційні алгоритми розв'язування систем нелінійних рівнянь. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2007. – № 12. – С. 23–31.
3. *Дэннис Дж. мл., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 434с.
4. *Argyros I. K., Hilout S.* On the semilocal convergence of Werner's method for solving equations using recurrent functions // Punjab Univ. J. Math. – 2011. – **43**. – P. 19–28.
5. *Laasonen P.* Ein überquadratisch konvergenter iterativer algorithmus // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. **A**. Math. – 1969. – **450**. – P. 1–10.
6. *Lukšan L., Vlček J.* Test problems for unconstrained optimization // Techn. Rep. V-897. Inst. Comput. Sci. Acad. Sci. Czech Rep., 2003. – 26 p.
7. *Moré J. J., Garbow B. S., Hillström K. E.* Testing unconstrained optimization software // ACM Trans. Math. Software. – 1981. – **7**, No. 1. – P. 17–41.
8. *Werner W.* Some supplementary results on the $1+\sqrt{2}$ order method for the solution of nonlinear equations // Numer. Math. – 1982. – **38**, No. 3. – P. 383–392.
9. *Werner W.* Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung // Numer. Math. – 1979. – **32**, No. 3. – P. 333–342.

ОБ ОДНОМ ТРЕХШАГОВОМ МЕТОДЕ С ПОРЯДКОМ СХОДИМОСТИ $1+\sqrt{2}$ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложена трехшаговая модификация метода с порядком сходимости $1+\sqrt{2}$ для решения нелинейных операторных уравнений. Доказана сходимость метода и получена оценка погрешности. На тестовых примерах выполнено численное исследование этой модификации и проведено сравнение с базовым методом, сделаны выводы относительно полученных результатов. Апробация метода подтверждает теоретические исследования.

ON A THREE-STEP $1+\sqrt{2}$ ORDER METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS

The three-step modification of the method with $1+\sqrt{2}$ order of convergence is proposed for solving nonlinear operator equations. The convergence of the method is proved and the estimation error are established. Numerical analysis of this modification is carried out on test examples and its comparison with the basic method is fulfilled. Conclusions from the results obtained are made. Approbation of the method confirms theoretical investigations.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
27.01.14