

ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ЗРІЗАНОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Запропоновано спосіб зведення задачі теплопровідності для зрізаної конічної оболонки при залежних від координати коефіцієнтах тепловіддачі та температурі зовнішнього середовища до розв'язання системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра та Фредгольма другого роду, яка розв'язується чисельно за допомогою методу квадратурних формул. Виконано числовий аналіз розподілу середньої температури та температурного моменту.

Вступ. Нерівномірний нагрів тонких оболонок зовнішнім середовищем зі значними перепадами температури може привести до зміни термічних властивостей їх матеріалу, зокрема до залежності коефіцієнтів тепловіддачі з поверхонь від координат. У зв'язку з цим при отриманні ключових рівнянь теплопровідності тонких оболонок при лінійному розподілі температури за товщиною оболонки та кусково-сталих коефіцієнтах тепловіддачі з її лицевих поверхонь одержуємо систему частково вироджених диференціальних рівнянь [4, 6–8]. Ефективне розв'язання таких крайових задач теплопровідності для конічної оболонки за дії нерівномірного температурного навантаження при конвективному теплообміні з довкіллям пов'язане з труднощами, що потребує пошуку нових способів їх розв'язування [9].

Температурні поля в конічних оболонках зі сталими коефіцієнтами тепловіддачі досліджувалися різними методами у працях [2, 3, 5, 10, 14–16].

У цій роботі розроблено підхід до знаходження температурних характеристик у круговій скінченній зрізаній конічній оболонці з кусково-сталими коефіцієнтами теплообміну та температурою зовнішнього середовища, які є різними на внутрішній та зовнішній її лицевих поверхнях.

Постановка задачі. Розглянемо тонку зрізану конічну оболонку товщини $2h$ і довжини \bar{l}_2 . Положення точки на серединній поверхні конічної оболонки в осесиметричному випадку будемо визначати координатою $\bar{\alpha}$ ($\bar{l}_1 \leq \bar{\alpha} \leq \bar{l}_1 + \bar{l}_2$), де $\bar{\alpha}$ – відстань до точки від вершини конуса O вздовж твірної (рис. 1). У цьому випадку коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини визначаються як [8] $A = 1$, $B = \bar{\alpha} \cos \theta$, $k_1 = 0$, $k_2(\bar{\alpha}) = \operatorname{tg} \theta / \bar{\alpha}$. Оболонка за законом Ньютона обмінюється теплом із зовнішнім середовищем, температура якого на лицевих поверхнях $z = \pm h$ залежить від координати $\bar{\alpha}$. Приймаємо гіпотезу про лінійний розподіл температури за товщиною оболонки $t(\bar{\alpha}, z) = T_1(\bar{\alpha}) + \frac{z}{h} T_2(\bar{\alpha})$. Для визначення температурних характеристик $T_1(\bar{\alpha})$ і $T_2(\bar{\alpha})$ при змінних коефіцієнтах тепловіддачі на лицевих поверхнях оболонки, наявності джерел тепла та конвективному теплообміні із зовнішнім середовищем на торцях маємо систему рівнянь [13]

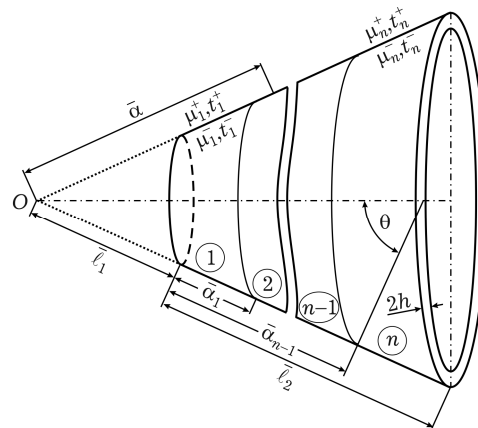


Рис. 1

$$\begin{aligned}
h^2 \Delta T_1(\bar{\alpha}) - \mu_1(\bar{\alpha}) T_1(\bar{\alpha}) - \mu_2^*(\bar{\alpha}) T_2(\bar{\alpha}) &= \\
&= -\mu_1(\bar{\alpha}) t_1(\bar{\alpha}) - \mu_2(\bar{\alpha}) t_2(\bar{\alpha}) - \frac{h}{2\lambda} W_1(\bar{\alpha}), \\
h^2 \Delta T_2(\bar{\alpha}) - 3[1 + \mu_1(\bar{\alpha})] T_2(\bar{\alpha}) - 3\mu_2^*(\bar{\alpha}) T_1(\bar{\alpha}) &= \\
&= -3\mu_1(\bar{\alpha}) t_2(\bar{\alpha}) - 3\mu_2(\bar{\alpha}) t_1(\bar{\alpha}) - \frac{h}{2\lambda} W_2(\bar{\alpha})
\end{aligned} \tag{1}$$

і крайові умови

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_i(\bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} - \bar{b}_1(T_i(\bar{\alpha}) - T_i^c) &= 0, \quad \bar{\alpha} = \bar{\ell}_1, \\
\frac{\partial T_i(\bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} + \bar{b}_2(T_i(\bar{\alpha}) - T_i^{c*}) &= 0, \quad \bar{\alpha} = \bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \left(\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \right), \quad T_1(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t(\bar{\alpha}, z) dz, \quad T_2(\bar{\alpha}) = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h t(\bar{\alpha}, z) z dz, \\
W_1(\alpha) &= \int_{-h}^h w(\bar{\alpha}, z) dz, \quad W_2(\alpha) = \frac{3}{h} \int_{-h}^h w(\bar{\alpha}, z) z dz, \\
\mu_{1,2}(\alpha) &= \frac{h}{2} (\mu^+(\bar{\alpha}) \pm \mu^-(\bar{\alpha})), \quad \mu_2^*(\bar{\alpha}) = \mu_2(\bar{\alpha}) - \frac{h}{2\bar{\alpha}} \operatorname{tg} \theta, \\
t_{1,2}(\bar{\alpha}) &= \frac{t_c^+(\bar{\alpha}) \pm t_c^-(\bar{\alpha})}{2},
\end{aligned} \tag{3}$$

$\mu^\pm(\bar{\alpha})$ – відносні коефіцієнти тепловіддачі і $t_c^\pm(\bar{\alpha})$ – температури зовнішнього середовища на поверхнях $z = \pm h$ відповідно; T_i^c та T_i^{c*} – температури зовнішнього середовища і \bar{b}_i – відносні коефіцієнти тепловіддачі на границях $\bar{\alpha} = \bar{\ell}_i$ відповідно, $i = 1, 2$; $t(\bar{\alpha}, z)$ – температура оболонки; λ – коефіцієнт теплопровідності.

Надалі перейдемо до безрозмірної координати $\alpha = \bar{\alpha}/h$ і безрозмірних величин $\bar{\ell}_1 = h\ell_1$, $\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 = h\ell_2$, $\bar{\ell}_1 + \bar{\alpha}_j = h\alpha_j$, $j = 1, \dots, n-1$, $b_i = h\bar{b}_i$, $i = 1, 2$. Приймемо, що на лицевих поверхнях відносні коефіцієнти тепловіддачі $\mu^+(\alpha)$ та $\mu^-(\alpha)$, а також температури зовнішнього середовища $t_c^+(\alpha)$ та $t_c^-(\alpha)$ є сталими, але різними на кільцевих кінцевих областях (смугах) $\alpha \in [\ell_1, \alpha_1)$, $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2)$, \dots , $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \ell_2)$ (рис. 1). Тоді величини з (3) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
\mu^\pm(\alpha) &= \mu_1^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_{j+1}^\pm - \mu_j^\pm) S_-(\alpha - \alpha_j), \\
\mu_{1,2}(\alpha) &= \eta_1^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} (\eta_{j+1}^\pm - \eta_j^\pm) S_-(\alpha - \alpha_j), \\
t_c^\pm(\alpha) &= t_{c,1}^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} (t_{c,j+1}^\pm - t_{c,j}^\pm) S_-(\alpha - \alpha_j), \\
t_{1,2}(\alpha) &= \gamma_1^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_{j+1}^\pm - \gamma_j^\pm) S_-(\alpha - \alpha_j), \\
\eta_j^\pm &= \frac{\mu_j^+ \pm \mu_j^-}{2} h, \quad \gamma_j^\pm = \frac{t_{c,j}^+ \pm t_{c,j}^-}{2}.
\end{aligned}$$

Врахувавши введені вище позначення, систему рівнянь (1) і крайові умови (2) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial T_1(\alpha)}{\partial \alpha} \right) - \eta_1^+ T_1(\alpha) - \eta_1^- T_2(\alpha) = T_1(\alpha) Q_1(\alpha) + \\
& + T_2(\alpha) \left(Q_2(\alpha) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2\alpha} \right) - (\eta_1^+ + Q_1(\alpha))(\gamma_1^+ + \Pi_1(\alpha)) - \\
& - (\eta_1^- + Q_2(\alpha))(\gamma_1^- + \Pi_2(\alpha)) - \frac{h}{2\lambda} W_1(\alpha), \\
& \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial T_2(\alpha)}{\partial \alpha} \right) - 3(1 + \eta_1^+) T_2(\alpha) - 3\eta_1^- T_1(\alpha) = 3T_1(\alpha) \left(Q_2(\alpha) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2\alpha} \right) + \\
& + 3T_2(\alpha) Q_1(\alpha) - 3(\eta_1^+ + Q_1(\alpha))(\gamma_1^- + \Pi_2(\alpha)) - \\
& - 3(\eta_1^- + Q_2(\alpha))(\gamma_1^+ + \Pi_1(\alpha)) - \frac{h}{2\lambda} W_2(\alpha), \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T_i(\alpha)}{\partial \alpha} - b_1(T_i(\alpha) - T_i^c) = 0, \quad \alpha = \ell_1,$$

$$\frac{\partial T_i(\alpha)}{\partial \alpha} + b_2(T_i(\alpha) - T_i^{c*}) = 0, \quad \alpha = \ell_2, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Тут

$$Q_1(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1} (\eta_{j+1}^+ - \eta_j^+) S_-(\alpha - \alpha_j), \quad Q_2(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1} (\eta_{j+1}^- - \eta_j^-) S_-(\alpha - \alpha_j),$$

$$\Pi_1(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_{j+1}^+ - \gamma_j^+) S_-(\alpha - \alpha_j), \quad \Pi_2(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_{j+1}^- - \gamma_j^-) S_-(\alpha - \alpha_j).$$

Система рівнянь (4) з розривними коефіцієнтами є взаємозв'язаною. Для знаходження її розв'язку зробимо деякі перетворення. Ввівши заміну

$$T_i(\alpha) = \frac{(-1)^{2-i} [-\lambda_2^{2-i} F_1(\alpha) + \lambda_1^{2-i} \lambda_2 F_2(\alpha)]}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

змінні в рівняннях системи (4) можемо частково відокремити. В результаті одержимо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial F_1(\alpha)}{\partial \alpha} \right) - [\eta_1^+ + 3\eta_1^- \lambda_1] F_1(\alpha) = D_1(\alpha) F_1(\alpha) + \\
& + D_2(\alpha) F_2(\alpha) + D_5(\alpha), \\
& \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial F_2(\alpha)}{\partial \alpha} \right) - [\eta_1^+ + 3\eta_1^- \lambda_2] F_2(\alpha) = D_3(\alpha) F_1(\alpha) + \\
& + D_4(\alpha) F_2(\alpha) + D_6(\alpha). \tag{7}
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
D_1(\alpha) &= \frac{\lambda_2 - 3\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} Q_1(\alpha) - \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(Q_2(\alpha) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2\alpha} \right), \\
D_2(\alpha) &= -\frac{2}{3(\lambda_2 - \lambda_1)} Q_1(\alpha) + \frac{\lambda_2(1 - 3\lambda_1^2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(Q_2(\alpha) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2\alpha} \right),
\end{aligned}$$

$$D_3(\alpha) = -\frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} Q_1(\alpha) - \frac{1 - 3\lambda_2^2}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \left(Q_2(\alpha) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2\alpha} \right),$$

$$D_4(\alpha) = \frac{3\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} Q_1(\alpha) + \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(Q_2(\alpha) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{2\alpha} \right),$$

$$D_5(\alpha) = -(\eta_1^+ + 3\eta_1^- \lambda_1 + Q_1(\alpha) + 3\lambda_1 Q_2(\alpha))(\gamma_1^+ + \Pi_1(\alpha)) - \\ - (\eta_1^- + 3\eta_1^+ \lambda_1 + 3\lambda_1 Q_1(\alpha) + Q_2(\alpha))(\gamma_1^- + \Pi_2(\alpha)) - \\ - h \frac{W_1(\alpha) + \lambda_1 W_2(\alpha)}{2\lambda},$$

$$D_6(\alpha) = -\left(\frac{\eta_1^+ + Q_1(\alpha)}{\lambda_2} + 3\eta_1^- + 3Q_2(\alpha) \right) (\eta_1^+ + \Pi_1(\alpha)) - \\ - \left[\frac{\eta_1^- + Q_2(\alpha)}{\lambda_2} + 3(\eta_1^+ + Q_1(\alpha)) \right] (\gamma_1^- + \Pi_2(\alpha)) - \\ - h \frac{W_1(\alpha) + \lambda_2 W_2(\alpha)}{2\lambda\lambda_2},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 + 2\eta_1^+ \mp \sqrt{(3 + 2\eta_1^+)^2 + 12\eta_1^{-2}}}{6\eta_1^-}.$$

Для відшукування загального розв'язку системи рівнянь (7) застосуємо метод варіації сталої. Після перетворень одержимо

$$F_1(\alpha) = AI_0(p_1\alpha) + BK_0(p_1\alpha) + \int_{\ell_1}^{\alpha} x [D_1(x)F_1(x) + D_2(x)F_2(x) + D_5(x)] \times \\ \times \Phi_1(\alpha, x) dx, \\ F_2(\alpha) = CI_0(p_2\alpha) + DK_0(p_2\alpha) + \int_{\ell_1}^{\alpha} x [D_3(x)F_1(x) + D_4(x)F_2(x) + D_6(x)] \times \\ \times \Phi_2(\alpha, x) dx. \quad (8)$$

Тут

$$\Phi_1(\alpha, x) = I_0(p_1\alpha)K_0(p_1x) + K_0(p_1\alpha)I_0(p_1x),$$

$$p_1^2 = \eta_1^+ + 3\eta_1^- \lambda_1,$$

$$\Phi_2(\alpha, x) = I_0(p_2\alpha)K_0(p_2x) + K_0(p_2\alpha)I_0(p_2x),$$

$$p_2^2 = \eta_1^+ + 3\eta_1^- \lambda_2,$$

$I_0(p_i\alpha)$, $K_0(p_i\alpha)$ – модифіковані функції Бесселя, $i = 1, 2$; A, B, C, D – сталі.

Крайові умови третього роду (5) після заміни (6) матимуть вигляд

$$\frac{\partial F_i(\alpha)}{\partial \alpha} - b_1(F_i(\alpha) - F_i^c) = 0, \quad \alpha = \ell_1,$$

$$\frac{\partial F_i(\alpha)}{\partial \alpha} + b_2(F_i(\alpha) - F_i^{c*}) = 0, \quad \alpha = \ell_2, \quad i = 1, 2.$$

Задовольнивши ці умови, з (8) отримаємо систему інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольєрра другого роду для визначення функцій $F_i(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha) - \int_{\ell_1}^{\alpha} x [D_1(x)F_1(x) + D_2(x)F_2(x) + D_5(x)]\Phi_1(\alpha, x) dx &= \\
&= \frac{mb - kc}{db - ak} I_0(p_1\alpha) + \frac{cd - am}{db - ak} K_0(p_1\alpha), \\
F_2(\alpha) - \int_{\ell_1}^{\alpha} x [D_3(x)F_1(x) + D_4(x)F_2(x) + D_6(x)]\Phi_2(\alpha, x) dx &= \\
&= \frac{\tilde{m}\tilde{b} - \tilde{k}\tilde{c}}{\tilde{d}\tilde{b} - \tilde{a}\tilde{k}} I_0(p_2\alpha) + \frac{\tilde{c}\tilde{d} - \tilde{a}\tilde{m}}{\tilde{d}\tilde{b} - \tilde{a}\tilde{k}} K_0(p_2\alpha). \tag{9}
\end{aligned}$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
c &= b_1 R(\ell_1) - R'(\ell_1) - b_1 F_1^c, & m &= -b_2 R(\ell_2) - R'(\ell_2) + b_2 F_1^{c*}, \\
a &= p_1 I_0'(p_1\alpha)|_{\alpha=\ell_1} - b_1 I_0(p_1\ell_1), & b &= p_1 K_0'(p_1\alpha)|_{\alpha=\ell_1} - b_1 K_0(p_1\ell_1), \\
d &= p_1 I_0'(p_1\alpha)|_{\alpha=\ell_2} + b_2 I_0(p_1\ell_2), & k &= p_1 K_0'(p_1\alpha)|_{\alpha=\ell_2} + b_2 K_0(p_1\ell_2),
\end{aligned}$$

$$R(\alpha) = \int_{\ell_1}^{\alpha} x [D_1(x)F_1(x) + D_2(x)F_2(x) + D_5(x)]\Phi_1(\alpha, x) dx,$$

$$\begin{aligned}
R'(\alpha) = \frac{dR(\alpha)}{d\alpha} &= \int_{\ell_1}^{\alpha} x [D_1(x)\bar{F}_1(x) + D_2(x)\bar{F}_2(x) + D_5(x)] \frac{d\Phi_1(\alpha, x)}{d\alpha} dx + \\
&+ \alpha [D_1(\alpha)\bar{F}_1(\alpha) + D_2(\alpha)\bar{F}_2(\alpha) + D_5(\alpha)]\Phi_1(\alpha, \alpha),
\end{aligned}$$

$$\tilde{c} = b_1 P(\ell_1) - P'(\ell_1) - b_1 \bar{F}_2^c, \quad \tilde{m} = -b_2 P(\ell_2) - P'(\ell_2) + b_2 \bar{F}_2^{c*},$$

$$\tilde{a} = p_2 I_0'(p_2\alpha)|_{\alpha=\ell_1} - b_1 I_0(p_2\ell_1), \quad \tilde{b} = p_2 K_0'(p_2\alpha)|_{\alpha=\ell_1} - b_1 K_0(p_2\ell_1),$$

$$\tilde{d} = p_2 I_0'(p_2\alpha)|_{\alpha=\ell_2} + b_2 I_0(p_2\ell_2),$$

$$\tilde{m} = p_2 K_0'(p_2\alpha)|_{\alpha=\ell_2} + b_2 K_0(p_2\ell_2),$$

$$P(\alpha) = \int_{\ell_1}^{\alpha} x [D_1(x)F_1(x) + D_2(x)F_2(x) + D_5(x)]\Phi_2(\alpha, x) dx,$$

$$\begin{aligned}
P'(\alpha) = \frac{dP(\alpha)}{d\alpha} &= \int_{\ell_1}^{\alpha} x [D_1(x)F_1(x) + D_2(x)F_2(x) + D_5(x)] \frac{d\Phi_2(\alpha, x)}{d\alpha} dx + \\
&+ \alpha [D_1(\alpha)F_1(\alpha) + D_2(\alpha)F_2(\alpha) + D_5(\alpha)]\Phi_2(\alpha, \alpha).
\end{aligned}$$

Систему інтегральних рівнянь (9) розв'язуємо методом квадратурних формул [1]. Знайшовши функції $F_i(\alpha)$, температурні характеристики $T_i(\alpha)$ визначаємо за формулами (6).

У випадку, якщо на торцях оболонки $\alpha = \ell_1$, $\alpha = \ell_2$ задано умови першого роду, які у розглядуваному випадку мають вигляд

$$F_i(\alpha) = F_i^c, \quad \alpha = \ell_1,$$

$$F_i(\alpha) = F_i^{c*}, \quad \alpha = \ell_2, \quad i = 1, 2,$$

задовольнивши їх, з (8) отримаємо систему інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра та Фредгольма другого роду для визначення значень функцій $F_i(\alpha)$:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) - \int_{\ell_1}^{\alpha} x[D_1(x)F_1(x) + D_2(x)F_2(x) + D_5(x)]\Phi_1(\alpha, x) dx = \\ = -EI_0(p_1\alpha) \left\langle \left\{ \int_{\ell_1}^{\ell_2} x[D_1(x)F_1(x) + D_2(x)F_2(x) + D_5(x)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi_1(\ell_2, x) dx - F_1^{c*} \right\} K_0(p_1\ell_1) + F_1^c K_0(p_1\ell_2) \right\rangle + \\ + EK_0(p_1\alpha) \left\langle \left\{ \int_{\ell_1}^{\ell_2} x[D_1(x)F_1(x) + D_2(x)F_2(x) + D_5(x)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi_1(\ell_2, x) dx - F_1^{c*} \right\} I_0(p_1\ell_1) + F_1^c I_0(p_1\ell_2) \right\rangle, \\ F_2(\alpha) - \int_{\ell_1}^{\alpha} x[D_3(x)F_1(x) + D_4(x)F_2(x) + D_6(x)]\Phi_2(\alpha, x) dx = \\ = -EI_0(p_2\alpha) \left\langle \left\{ \int_{\ell_1}^{\ell_2} x[D_3(x)F_1(x) + D_4(x)F_2(x) + D_6(x)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi_2(\ell_2, x) dx - F_2^{c*} \right\} K_0(p_2\ell_1) + F_2^c K_0(p_2\ell_2) \right\rangle + \\ + EK_0(p_2\alpha) \left\langle \left\{ \int_{\ell_1}^{\ell_2} x[D_3(x)F_1(x) + D_4(x)F_2(x) + D_6(x)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi_2(\ell_2, x) dx - F_2^{c*} \right\} I_0(p_2\ell_1) + F_2^c I_0(p_2\ell_2) \right\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут

$$E = \frac{1}{2[K_0(p_1\ell_1)I_0(p_1\ell_2) - I_0(p_1\ell_1)K_0(p_1\ell_2)]}.$$

Невідомі температурні характеристики $T_i(\alpha)$ визначаємо, як і для крайових умов третього роду, за формулами (6).

Числові дослідження. Як приклад розглянемо тонку зрізану конічну оболонку $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = 16$, $2 \leq \alpha \leq 18$, яка обмінюється теплом з зовнішнім середовищем за законом Ньютона. На шести частинах (смугах) лицевих поверхонь $z = \pm h$ коефіцієнти тепловіддачі та температури зовнішнього

середовища є різними. На торцях $\alpha = \ell_1$, $\alpha = \ell_2$ задано конвективний теплообмін або температуру.

На рис. 2 та рис. 4 наведено розподіл середньої температури T_1 , а на рис. 3, і рис. 5 – температурного моменту T_2 уздовж координати α , коли кут $\theta = 45^\circ$.

Крива 1 на рис. 2 відповідає умовам, коли на лицевих поверхнях оболонки ($z = \pm h$) температура зовнішнього середовища є нульовою: $t_{c,1}^+ = t_{c,2}^+ = t_{c,3}^+ = t_{c,1}^- = t_{c,2}^- = t_{c,3}^- = 0^\circ\text{C}$. На торцях $\alpha = \ell_1$ і $\alpha = \ell_2$ відповідно задано температуру середовища $T_1^c = 0^\circ\text{C}$ і $T_2^c = 100^\circ\text{C}$. Відносні коефіцієнти тепловіддачі з лицевих поверхонь однакові: $\mu_1^+ = \mu_2^+ = \mu_3^+ = \mu_1^- = \mu_2^- = \mu_3^- = 100\text{ м}^{-1}$. Крива 1 співпадає з результатом, отриманим у роботі [2]. Температурний момент для таких умов є нульовим: $T_2 = 0$.

Далі обчислення виконано для випадку, коли на верхній лицевій поверхні оболонки ($z = h$) температура зовнішнього середовища є нульовою: $t_{c,1}^+ = t_{c,2}^+ = t_{c,3}^+ = 0^\circ\text{C}$, на нижній поверхні ($z = -h$) – $t_{c,1}^- = t_{c,2}^- = t_{c,3}^- = 100^\circ\text{C}$, відносні коефіцієнти тепловіддачі з обох лицевих поверхонь оболонки однакові: $\mu_1^- = \mu_2^- = \mu_3^- = \mu_1^+ = \mu_2^+ = \mu_3^+ = 100\text{ м}^{-1}$ (якщо не буде вказано іншого), на торцях $\alpha = \ell_1$ і $\alpha = \ell_2$ відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем нульової температури $T_1^c = T_2^c = 0^\circ\text{C}$ з коефіцієнтами тепловіддачі $b_1 = b_2 = 1$.

Криві 2 на рис. 2 і рис. 3 відповідають однаковим відносним коефіцієнтам тепловіддачі з обох лицевих поверхонь оболонки. У цьому випадку максимальне значення середньої температури T_1 та мінімальне значення температурного моменту T_2 зміщене від середини оболонки у бік меншого радіуса, що пояснюється наявністю у неї змінної кривини.

Криві 3 на цих рисунках відповідають випадку, коли відносний коефіцієнт тепловіддачі з середньої ділянки $8 \leq \alpha \leq 12$ нижньої листої поверхні є нульовим: $\mu_2^- = 0$. При цьому спостерігаємо зниження середньої температури T_1 і досягнення нею локального мінімуму в околі середини оболонки завдяки непроникності температури середовища в неї на цій ділянці. Температурний момент T_2 на середній ділянці спадає, досягаючи локального максимуму, оскільки там отримуємо меншу різницю температур між лицевими поверхнями.

Криві 5 побудовано для випадку, коли відносні коефіцієнти тепловіддачі на відповідних ділянках з верхньої листої поверхні приймають значення $\mu_1^+ = 30\text{ м}^{-1}$ для $2 \leq \alpha \leq 8$, $\mu_2^+ = 50\text{ м}^{-1}$ – для $8 < \alpha < 12$, $\mu_3^+ = 80\text{ м}^{-1}$ – для $12 \leq \alpha \leq 18$. У цьому випадку середня температура зменшується, а температурний момент збільшується зі збільшенням значення відносного коефіцієнта тепловіддачі, що пояснюється більшим відтоком температури через верхню листою поверхню оболонки ($z = h$).

Криві 4 на рис. 2 і рис. 3 показують розподіл T_1 та T_2 при температурі навколишнього середовища $t_{c,1}^- = 40^\circ\text{C}$ на ділянці $2 \leq \alpha \leq 8$ нижньої листої поверхні оболонки, $t_{c,2}^- = 0^\circ\text{C}$ на ділянці $8 < \alpha < 12$ і $t_{c,3}^- = 80^\circ\text{C}$ на ділянці $12 \leq \alpha \leq 18$. Криві 6 побудовано для випадку, коли $t_{c,2}^- = 50^\circ\text{C}$ на середній ділянці $8 < \alpha < 12$, а на двох інших ділянках температура задана, як

для кривої 4. (Нагадаємо, що ці криві побудовано при однакових відносних коефіцієнтах тепловіддачі з обох лицевих поверхонь оболонки.) При таких умовах характер поведінки температури і температурного моменту у середній ділянці оболонки є подібним до поведінки кривих 3 та 5 – у випадку зміни відносних коефіцієнтів тепловіддачі. Це означає, що температуру у кінчній оболонці можна регулювати або зміною температури навколишнього середовища, або зміною відносних коефіцієнтів тепловіддачі на відповідних її ділянках.

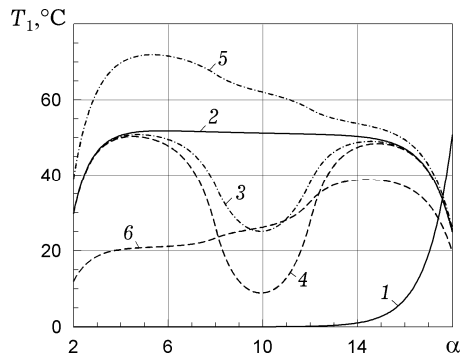


Рис. 2

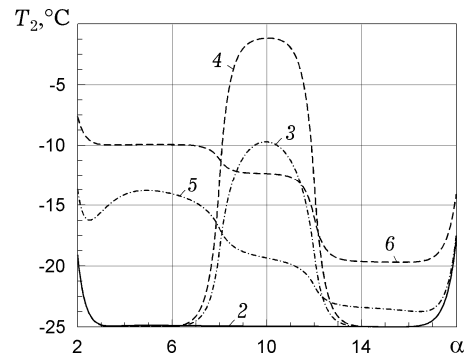


Рис. 3

На рис. 4 і рис. 5 наведено розподіл температурних характеристик T_1 , T_2 для різних значень розміру середньої ділянки, на якій відносний коефіцієнт тепловіддачі з нижньої лицевої поверхні є нульовим: $\mu_2^- = 0$. Кривим 1–5 відповідають значення середньої ділянки таких розмірів: $9.9 < \alpha < 10.1$; $9.5 < \alpha < 10.5$; $9 < \alpha < 11$; $8 < \alpha < 12$; $4 < \alpha < 16$. При збільшенні середньої ділянки, на якій відносний коефіцієнт тепловіддачі є нульовий, спостерігається загальне зниження середньої температури T_1 і спадання її мінімального значення на цій ділянці, а величина температурного моменту T_2 , навпаки, – зростає.

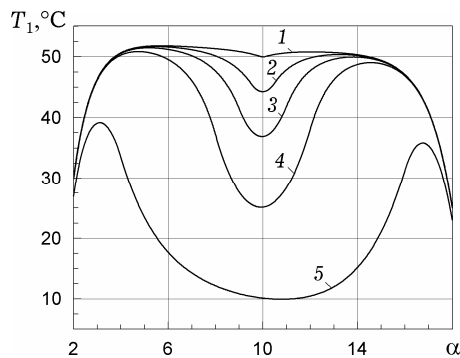


Рис. 4

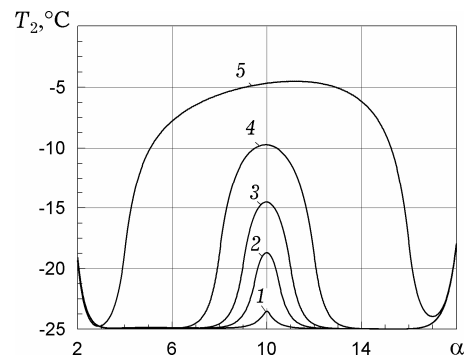


Рис. 5

На рис. 6 та рис. 7 наведено розподіл температурних характеристик T_1 і T_2 , коли змінюється кут $\frac{\pi}{2} - \theta$ при вершині кінчної оболонки за збереження її довжини $\ell_2 = 16$. Коли кут $\theta = 0$ ($\text{tg } \theta = 0$) з кінчної оболонки отримуємо круглу пластинку радіуса $\ell_1 + \ell_2 = 18$ із концентричним отвором радіуса $\ell_1 = 2$. Розподіли середньої температури T_1 та температурного

моменту T_2 співпадають з результатами, отриманими для круглої пластинки в роботах [11, 12]. При зростанні кута, $\theta \approx 26^\circ$ ($\text{tg } \theta = 0.5$) та $\theta = 45^\circ$ ($\text{tg } \theta = 1$), середня температура T_1 і температурний момент T_2 більше зростають поблизу меншого радіуса конічної оболонки порівняно з результатом для круглої пластинки, оскільки зменшується площа віддачі тепла через меншу ($\ell_1 = 2$) торцеву поверхню.

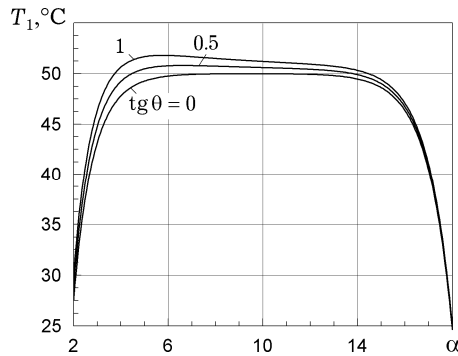


Рис. 6

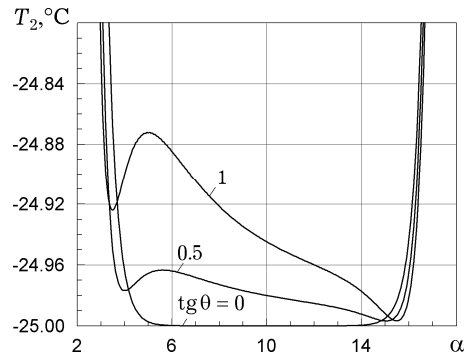


Рис. 7

Висновки. Визначення температурного поля зрізаної конічної оболонки з різними на кожному із $2n$ розглядуваних відрізків лицевих поверхонь коефіцієнтами тепловіддачі та температурою зовнішнього середовища зведено до системи двох інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра та Фредгольма другого роду. Розроблено аналітично-числову схему розв'язування системи цих інтегральних рівнянь.

З наведених графіків випливає, що нерівномірність тепловіддачі з лицевих поверхонь та температури зовнішнього середовища для тонких зрізаних конічних оболонок значно впливає на розподіл у них середньої температури та викликає температурний момент. Слід зауважити, що зміною температури навколишнього середовища можна отримати розподіл температурних характеристик, які одержуємо при зміні коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь, але навпаки не завжди є вірно.

При прямуванні кута θ до нуля отримуємо з конічної оболонки круглу пластинку з концентричним отвором. У цьому випадку отримані в роботі результати співпадають з результатами, одержаними в [11, 12].

1. Верлянь А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. — Киев: Наук. думка, 1978. — 292 с.
2. Гелбара В. М. Осесимметричный напряженный стан конічної оболонки при нестационарному тепловому режимі // Зб. робіт аспірантів мех.-мат. та фіз. фак. Львів. орд. Леніна держ. ун-ту ім. І. Франка. — 1961. — Вип. 1. — С. 11–18.
3. Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. — Киев: Изд-во АН УССР, 1963. — 287 с.
4. Кушнір Р. М. Ключові рівняння для складеної циліндричної оболонки з власними напруженнями та дефектами структури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2001. — 44, № 4. — С. 77–84.
5. Нерубайло Б. В., Смирнов Л. Г., Струкова О. А. К решению задачи термоупругости конических оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2008. — № 4. — С. 107–121.
6. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Учет теплоотдачи при локальном нагреве тонкостенных элементов конструкций // Докл. АН СССР. — 1975. — 225, № 4. — С. 778–781.
7. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовых В. И., Лозбень В. Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. — Киев: Наук. думка, 1977. — 158 с.

8. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
9. *Халко Б. С.* Неустановившиеся температурные поля в конической оболочке с разрезами, когда источники тепла распределены вдоль произвольной кривой // *Материалы 9-й конф. молодых ученых Ин-та прикл. проблем механики и математики АН УССР.* – Львов, 1982. – Ч. 1. – С. 190–193. – Деп. в ВИНТИ 10.01.84; № 323-84.
10. *Халко Б. С.* Про розв'язок крайової задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних з імпульсними коефіцієнтами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – **49**, № 3. – С. 47–55.
11. *Халко Б. С., Чиж А. І.* Термічні переміщення круглої пластинки за залежних від радіуса коефіцієнтів тепловіддачі // *Машинознавство.* – 2009. – № 11. – С. 19–23.
12. *Чиж А. І.* Термопружний стан в круглій пластині з концентричним отвором за залежних від радіуса коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь // *Конф. молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача: Тези доп.* – Львів, 2009. – С. 46.
13. *Швец Р. Н., Халко Б. С., Чиж А. І.* Уравнения теплопроводности для оболочек с изломами при переменных коэффициентах теплоотдачи // *Теорет. и прикл. механика.* – 2010. – Вып. 1 (47). – С. 69–76.
14. *Jane K. C., Wu Y. H.* A generalized thermoelasticity problem of multilayered conical shells // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – **41**, No. 9-10. – P. 2205–2233.
15. *Wang Yong-gang, Dai Shi-liang.* Thermoelastically coupled axisymmetric nonlinear vibration of shallow spherical and conical shells // *Appl. Math. Mech.* – 2004. – **25**, No. 4. – P. 430–439.
16. *Zhao X., Liew K. M.* An element-free analysis of mechanical and thermal buckling of functionally graded conical shell panels // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 2011. – **86**, No. 3. – P. 269–285.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ УСЕЧЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛОТДАЧИ

Предложен способ сведения задачи теплопроводности для усеченной конической оболочки при зависящих от координаты коэффициентах теплоотдачи и температуре внешней среды к решению системы интегральных уравнений с интегральными операторами Вольтерра и Фредгольма второго рода, которая решается численно с помощью метода квадратурных формул. Приведен численный анализ распределения средней температуры и температурного момента.

AXISYMMETRIC TEMPERATURE FIELD OF A TRUNCATED CONIC SHELL WITH VARIABLE HEAT TRANSFER COEFFICIENTS

A method of solving a heat conduction problem of a truncated conic shell with coordinate-dependent heat transfer coefficient and ambient temperature is reduced to the solution of system of integral equations with the second kind Volterra and Fredholm integral operators, which is solved numerically using the method of quadrature formulas. A numerical analysis of distribution of average temperature and temperature moment is performed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.09.12