

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ З ОПУКЛИМ ГОФРОВАНИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ

Розглянуто в просторовій постановці рівновагу порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів. Переріз задано неперервною кривою – укороченою епіциклоїдою. Для розв'язання задачі застосовано чисельно-аналітичний підхід, який базується на використанні методів відокремлення змінних та апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, а також чисельного методу дискретної ортогоналізації. Наведено результати розв'язання задачі у вигляді графіків розподілу полів переміщень і напружень.

В аерокосмічних та інших механічних застосуваннях, використовуються оболонкові конструкції з круговим та некруговим поперечним перерізом [9]. Оболонкам з хвилеподібним поперечним перерізом притаманні певні специфічні особливості в розподілі параметрів жорсткості, що позитивно впливає на характеристики конструкцій та їх елементів різного призначення. Некругова форма поперечного перерізу оболонок подібного класу, вимагає застосування просторової моделі. Один із підходів, що базується на застосуванні дискретних рядів Фур'є [7], до розв'язування задач про напружений стан порожнистих циліндрів в просторовій постановці запропоновано в роботах [2, 4, 8]. У роботі [3] цей метод застосовано для розв'язування задачі про напружений стан порожнистих циліндрів складної форми поперечного перерізу та проведення аналізу напруженого стану залежно від зміни кривини поперечного перерізу.

У пропонованій статті розглядаються деякі питання розв'язування задачі про напружений стан порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом при певних умовах на торцях із застосуванням дискретних рядів Фур'є.

1. Постановка задачі. Розглядаємо пружний порожнистий некруговий циліндр сталі товщини h , у кожній точці поверхні якого поперечний переріз задано укороченою епіциклоїдою [5]. Циліндр знаходиться під дією зовнішнього поверхневого навантаження $q_\gamma = q_\gamma(s, \psi)$.

У криволінійних ортогональних координатах s, ψ, γ перша квадратична форма має вигляд

$$dS^2 = ds^2 + B_2(\psi, \gamma)d\psi^2 + d\gamma^2,$$

де

$$B_2(\psi, \gamma) = H_2(\psi, \gamma)\omega(\psi),$$

$$H_2(\psi, \gamma) = 1 + \frac{\gamma}{R(\psi)}, \quad \omega = \omega(\psi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2},$$

$$R_\psi = R(\psi) = \frac{(A+a)(1+\lambda^2 - 2\lambda \cos(A\psi/a))^{3/2}}{1 + \lambda^2 \left(\frac{A+a}{a}\right) - \lambda \left(\frac{A+2a}{a}\right) \cos(A\psi/a)}.$$

Тут s – довжина дуги твірної; ψ – кутовий параметр, центральний кут ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) у поперечному перерізі (рис. 1); γ – нормальна координата по товщині циліндра ($\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$); R_ψ – радіус кривини в поперечному пере-

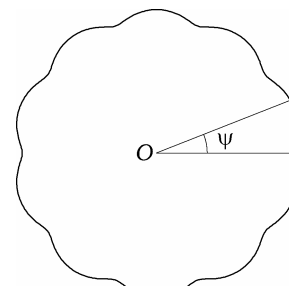


Рис. 1

різі; ω – коефіцієнт переходу від координати дуги напрямної до кутового параметра ψ .

Рівняння кривої поверхні відліку задається в параметричній формі [5]

$$x = (A + a) \cos \psi - \lambda a \cos \left(\frac{A + a}{a} \psi \right),$$

$$y = (A + a) \sin \psi - \lambda a \sin \left(\frac{A + a}{a} \psi \right),$$

де A – радіус нерухомого кола; a – радіус рухомого кола, $a > 0$; λ – відстань до радіуса рухомого кола, $\lambda < 0$.

Задача описується рівняннями просторової теорії пружності [6]:

– *вирази деформацій через переміщення*

$$e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s}, \quad e_\psi = \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma, \quad e_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma},$$

$$e_{s\psi} = \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s}, \quad e_{s\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \gamma},$$

$$e_{\psi\gamma} = -\frac{1}{H_2 R_\psi^2} u_\psi + \frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \quad (1)$$

– *рівняння рівноваги*

$$H_2 \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{R_\psi} \tau_{s\gamma} + H_2 \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \psi} + 2 \frac{1}{R_\psi} \tau_{\psi\gamma} + H_2 \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} + H_2 \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{1}{R_\psi} \sigma_\gamma + H_2 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} + H_2 \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} - \frac{1}{R_\psi} \sigma_\psi = 0; \quad (2)$$

– *співвідношення закону Гука*

$$e_s = \frac{1}{E} [\sigma_s - \nu(\sigma_\psi + \sigma_\gamma)], \quad e_\psi = \frac{1}{E} [\sigma_\psi - \nu(\sigma_s + \sigma_\gamma)],$$

$$e_\gamma = \frac{1}{E} [\sigma_\gamma - \nu(\sigma_s + \sigma_\psi)],$$

$$e_{\psi\gamma} = \frac{1}{G} \tau_{\psi\gamma}, \quad e_{s\gamma} = \frac{1}{G} \tau_{s\gamma}, \quad e_{s\psi} = \frac{1}{G} \tau_{s\psi}, \quad (3)$$

$$0 \leq s \leq \ell, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2.$$

На торцях циліндра розглядаються умови

$$\sigma_s = 0, \quad u_\psi = 0, \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = \ell, \quad (4)$$

що відповідає наявності діафрагми, абсолютно жорсткої в своїй площині та гнучкої при виході з неї.

Додаючи до основних рівнянь (1)–(3) граничні умови на бічних поверхнях у вигляді

$$\sigma_\gamma = 0, \quad \tau_{s\gamma} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1, \quad (5)$$

$$\sigma_\gamma = q_\gamma, \quad \tau_{s\gamma} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2, \quad (6)$$

дістанемо тривимірну крайову задачу.

2. Метод розв'язування. За розв'язувальні функції обираємо компоненти напружень і переміщень $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\psi\gamma}, u_\gamma, u_s, u_\psi$. Після певних перетворень для тривимірної крайової задачі отримуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь шостого порядку зі змінними коефіцієнтами у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{H_2 R_\psi} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} + \\
&\quad + \frac{1}{H_2 R_\psi} \left[\frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\gamma + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) \right], \\
\frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{H_2} \frac{1}{R_\psi} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \frac{1}{H_2} \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{R_\psi} u_\gamma \right) \right] + \\
&\quad + \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_\gamma \left] - \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \right) \right], \\
\frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{2}{H_2 R_\psi} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) \right] + \\
&\quad + \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_\gamma \left] - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \right) \right], \\
\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} - \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) + \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sigma_\gamma, \\
\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}, \\
\frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\psi, \\
0 \leq s \leq \ell, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2, \quad (7)
\end{aligned}$$

з граничними умовами (5), (6).

Наявність граничних умов (4) дозволяє відокремити змінні вздовж твірної циліндра, подавши компоненти навантаження і розв'язувальні функції у вигляді розвинень у ряди Фур'є уздовж координати s і для кожного члена цих розвинень отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, що описують двовимірну крайову задачу [4].

Замінюючи в розв'язувальній системі рівнянь добутки розв'язувальних функцій і коефіцієнтів, що перешкоджають відокремленню змінних за координатою ψ , новими доповняльними функціями і подаючи далі розв'язувальні функції, компоненти навантаження та доповняльні функції у вигляді розвинень у ряди Фур'є за координатою ψ , після відокремлення змінних отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних значень відповідних розвинень рядів Фур'є:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\gamma,m}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,m} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \Phi_{1,m}^1 - \Phi_{4,m}^1 - \\
&\quad - \frac{E}{1-\nu^2} (\lambda_n \Phi_{1,m}^4 + \Phi_{4,m}^3 + \Phi_{1,m}^5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau_{s\gamma,m}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,m} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,m} - \varphi_{1,m}^2 - \\
&\quad - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{4,m}^2 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,m}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,m}, \\
\frac{d\tau_{\psi\gamma,m}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{\psi,m} - 2\varphi_{2,m}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{3,m}^3 - \\
&\quad - \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{7,m} + \varphi_{5,m}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,m}^1, \\
\frac{du_{\gamma,m}}{d\gamma} &= \frac{(1-\nu-2\nu^2)}{(1-\nu)E} \sigma_{\gamma,m} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,m} - \varphi_{4,m}^2 - \varphi_{1,m}^3), \\
\frac{du_{s,m}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,m} - \lambda_n u_{\gamma,m}, \\
\frac{du_{\psi,m}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma,m} - \varphi_{3,m}^2 + \varphi_{2,m}^2, \quad m = 0, \dots, M, \quad (8)
\end{aligned}$$

з граничними умовами

$$\sigma_{\gamma,m} = 0, \quad \tau_{s\gamma,m} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma,m} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1, \quad (9)$$

$$\sigma_{\gamma,m} = q_{\gamma,m}, \quad \tau_{s\gamma,m} = 0, \quad \tau_{\psi\gamma,m} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \quad (10)$$

Отриману крайову задачу (8)–(10) розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [1] одночасно для всіх гармонік m розвинень у ряди Фур'є. При цьому амплітудні значення доповняльних функцій

$$\varphi_1^j = \frac{1}{H_2 R_\psi} \{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s \}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad \varphi_1^5 = \left(\frac{1}{H_2 R_\psi} \right)^2 u_\gamma,$$

$$\varphi_2^j = \frac{1}{H_2 R_\psi} \{ \tau_{\psi\gamma}; u_\psi \}, \quad j = 1, 2,$$

$$\varphi_3^j = \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\varphi_4^j = \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}; \frac{1}{R_\psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3, \quad \varphi_6 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3, \quad \varphi_7 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2,$$

обчислюємо за поточними значеннями амплітуд розв'язувальних функцій на кожному кроці інтегрування із використанням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [2–4].

3. Числові результати. На основі викладеного підходу проведемо аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом, що знаходяться під дією зовнішнього навантаження.

Задачу розв'язано при таких вихідних даних: $\nu = 0.3$; довжина циліндра $\ell = 60$; товщина $h = 0.25, 0.375, 0.5, 1.0$; $A = 20$; $a = 2$; $\lambda = 0.4$.

Радіус кривини R_ψ поверхні відліку в інтервалі $0 \leq \psi \leq \pi/10$ приймає значення $R_\psi = -2.32$ для $\psi = 0$; $R_\psi = 40.48$ для $\psi = \pi/30$; $R_\psi = 7.99$ для

$\psi = \pi/20$. При цьому відношення товщини циліндра до радіуса кривини для $h = 0.25$ знаходиться в границях, допустимих в теорії тонких оболонок; при $h = 0.375$ – в теорії оболонок середньої товщини і для $h = 0.5, 1.0$ – в теорії товстостінних оболонок.

Результати розв'язання задачі наведено для поверхні відліку в середньому перерізі $\ell = 30$ по довжині циліндра на рис. 2, рис. 3 уздовж напрямної циліндра ($0 \leq \psi \leq \pi/10$).

На рис. 2 зображено графіки зміни нормальних переміщень u_γ . З графіків бачимо, що зміна товщини циліндра призводить до незначного перерозподілу полів переміщень уздовж напрямної. Так, для $h = 0.25, 0.375$ при переході із зони западини до зони верхівки гофрів переміщення збільшуються в 1.24 рази, а для $h = 0.5, 1.0$ – в 1.25 рази, при цьому зі збільшенням товщини циліндра він стає більш жорстким, що призводить до зменшення значень переміщень в 1.5 рази для $h = 0.375$; в 2.0 рази для $h = 0.5$ і в 4.1 рази для $h = 1.0$ порівняно з товщиною $h = 0.25$.

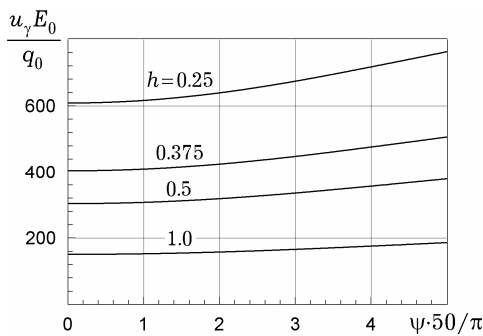


Рис. 2

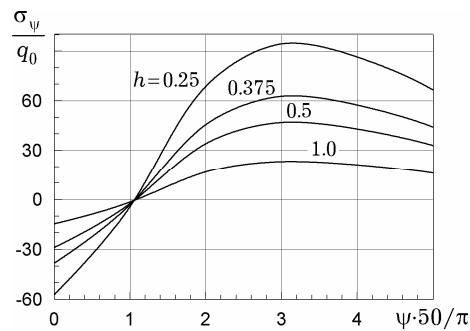


Рис. 3

На рис. 3 наведено графіки розподілу полів напружень σ_ψ . З наведених графіків видно, що максимальних значень напруження досягають в перерізі $\psi = 3\pi/50$ і при збільшенні товщини їх значення, порівняно з товщиною $h = 0.25$, зменшуються в 1.5, 2.0, 5.1 рази для товщини $h = 0.375, 0.5, 1.0$ відповідно. У западині гофрів напруження змінюють знак на протилежний, зменшуючись при цьому в 1.4 рази порівняно з максимальним значенням для всіх значень товщини.

Таким чином, на основі чисельно-аналітичного підходу, що базується на застосуванні методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, було проведено аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів зі складною формою поперечного перерізу, що являє собою з'єднані напівгофри, які описуються рівняннями скороченої епіциклоїди, для деяких значень товщини.

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 171–174.
2. Григоренко Я. М. Решение краевых задач о напряженном состоянии упругих тел сложной геометрии и структуры с применением дискретных рядов Фурье // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 5. – С. 3–52.
The same: Grigorenko Ya. M. Using discrete Fourier series to solve boundary-value stress problems for elastic bodies with complex geometry and structure // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 5. – P. 469–513.
3. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Анализ влияния изменения кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с некруговым поперечным сечением сложной формы // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 7. – С. 3–10.

- Те саме: *Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S.* Influence of curvature on the stress state of hollow cylinders with complex-shaped noncircular cross-section // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, No. 7. – P. 737–743.
4. *Григоренко Я. М., Рожок Л. С.* Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2005. – **48**, № 2. – С. 79–100.
 5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1968. – 720 с.
Те саме: *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. – New York: McGraw-Hill, 1961.
 6. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
Те саме: *Timoshenko S. P.* Course of the theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1970.
 7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Москва: Наука, 1949. – Т. 3. – 783 с.
 8. *Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S.* Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section // *J. Eng. Math.* – 2006. – **54**. – P. 145–157.
 9. *Soldatos K. P.* Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section. A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, No. 8. – P. 237–274.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С ВЫПУКЛЫМ ГОФРИРОВАННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Рассмотрено в пространственной постановке равновесие полых цилиндров с поперечным сечением в виде соединенных полугофров. Сечение задается непрерывной кривой, являющей собой укороченную эпициклоиду. Для решения задачи использован численно-аналитический подход, основанный на применении методов разделения переменных и аппроксимации функций дискретными рядами Фурье, а также численный метод дискретной ортогонализации. Приводятся результаты решения задачи в виде графиков распределения полей перемещений и напряжений.

STRESS STATE OF HOLLOW CYLINDERS WITH A CONVEX CORRUGATED CROSS-SECTION

In spatial formulation the equilibrium of hollow cylinders which cross-section has the shape of connected semi-corrugations is considered. The cross-section is given by a continuous curve which is a shortened epicycloid. The problem is solved by using numerical-analytical approach based on application of the methods of separation of variables and approximation of functions by discrete Fourier series, and the numerical method of discrete orthogonalization. The results of solutions of the problem are presented in the form of plots of stresses and displacements fields.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
14.03.12