

ФРИКЦІЙНИЙ КОНТАКТ ЖОРСТКОГО КОНУСА З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ

Розглянуто осесиметричну задачу про контактну взаємодію жорсткого конуса та пружного півпростору з урахуванням тертя і часткового зчеплення в області контакту. Узагальненим методом Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено радіуси області контакту та зони зчеплення, розподіл контактних напружень, просідання конуса.

Розв'язок осесиметричної задачі гладкого контакту жорсткого конуса з пружним півпростором $\zeta \geq 0$ знайдено А. Лявом (А. Е. Н. Love) [13]. За цим розв'язком розподіл нормальних контактних напружень у круговій області контакту $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $\zeta = 0$ має вигляд

$$\sigma_{\zeta} \Big|_{\zeta=0} = -\frac{P}{\pi R^2} \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - r^2}}{r}, \quad (1)$$

а радіус ділянки контакту R і просідання конуса δ зв'язані з прикладеною до конуса силою P таким чином:

$$R = \sqrt{\frac{(m-1)P}{\pi m G \operatorname{tg} \varepsilon}}, \quad \delta = \frac{\pi}{2} R \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi(m-1)P \operatorname{tg} \varepsilon}{m G}}, \quad (2)$$

де m – число Пуассона, G – модуль зсуву, ε – кут нахилу твірної конуса до граничної площини півпростору перед його деформацією. Більш повний розв'язок цієї задачі із застосуванням методу парних інтегральних рівнянь та інтегрального перетворення Ганкеля отримано І. Снеддоном [10], який, крім розподілу контактних напружень, визначив напруження у внутрішніх точках пружного півпростору та побудував лінії рівня максимальних дотичних напружень в осьовому перерізі півпростору.

При врахуванні сил тертя постановка задачі суттєво ускладнюється. Лінійний зв'язок між дотичними і нормальними напруженнями згідно із законом сухого тертя виникає тільки на краю ділянки контакту, а всередині області контакту поверхні контактуючих тіл зчіплюються [3]. Радіус зони зчеплення заздалегідь невідомий і залежить від коефіцієнта тертя. Крім того, при поступовому вдавлюванні жорсткого конуса область контакту разом із зоною зчеплення збільшуються і в зоні зчеплення накопичується так звана «защемлена деформація», розподіл якої залежить від історії навантаження. D. A. Spence показав [14], що для штампів поліноміального профілю з показником n у випадку, коли зі зростанням навантаження поле напружень залишається подібним самому собі, «защемлена деформація» пропорційна r^{n-1} , тобто є сталою для конуса, коли $n = 1$. У такій постановці плоскі задачі про вдавлювання параболічного або клиноподібного штампів, а також штампа поліноміального профілю розв'язано у роботах [4, 6, 9], однак осесиметричні задачі раніше не розглядалися.

Додатково зауважимо, що при вдавлюванні у пружний півпростір штампів з плоскою основою за наявності тертя область контакту і зона зчеплення залишаються незмінними в процесі навантаження, а «защемлена деформація» відсутня. У випадку плоскої деформації для штампа з прямолінійною горизонтальною основою контактну задачу зі зчепленням і проковзуванням вперше поставив і наближено розв'язав Л. А. Галін [2]. Огляду подальших досліджень задачі Галіна присвячена робота [12]. Осесиметричний аналог задачі Галіна розглянуто в статті [8], де, як і в запропонованій роботі, із застосуванням узагальненого методу Вінера – Гопфа [1, 5, 7] визначено аналітичний розв'язок задачі.

Постановка задачі. Нехай абсолютно жорсткий конус з кутом $\pi/2 - \varepsilon$ між твірною і віссю, який попередньо дотикається пружного півпростору $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$, $0 \leq \zeta < \infty$ у точці $r = 0$, $\zeta = 0$, вдавлюється у півпростір нормальною силою P так, що вісь конуса залишається перпендикулярною до недеформованої межі півпростору. В результаті на межі півпростору $\zeta = 0$ утворюється кругова область контакту $r \leq R$, яка поділяється на кругову зону зчеплення $r \leq R_1$ невідомого радіуса R_1 ($R_1 < R$) і кільцеву зону проковзування $R_1 < r \leq R$ ($0 \leq \vartheta < 2\pi$). Вважаємо, що в зоні проковзування точки поверхні пружного півпростору рухаються уздовж поверхні конуса в напрямку до його вершини. При цьому нормальні та дотичні напруження підпорядковані закону тертя Амонтона. Також вважаємо, що в зоні зчеплення згідно з теорією подібності Спенса [14] повздовжні радіальні деформації незмінні, а, отже, тангенціальні переміщення лінійні.

Змішані крайові умови на межі півпростору мають вигляд

$$\begin{aligned} u_\zeta \Big|_{\zeta=0} &= \delta - r \operatorname{tg} \varepsilon, & 0 \leq r \leq R, \\ u_r \Big|_{\zeta=0} &= C_0 r, & 0 \leq r \leq R_1, \\ \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} &= \mu_0 \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0}, & R_1 < r \leq R, \\ \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0} &= 0, & \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} &= 0, & R < r < \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

де C_0 – невідома стала «защемленої деформації», μ_0 – коефіцієнт тертя.

Згідно з прийнятим вище припущенням, тангенціальні переміщення поверхні півпростору задовольняють умову

$$u_r \Big|_{\zeta=0} < 0, \quad 0 < r < \infty. \quad (4)$$

За цією умовою вибрано знак при μ_0 у третій крайовій умові (3) у зоні проковзування $R_1 < r \leq R$. У зоні зчеплення $0 \leq r \leq R_1$ із (4) і другої умови (3) випливає, що $C_0 < 0$. Зі зростанням навантаження і розширенням області контакту граничні точки півпростору із зони проковзування переходять у зону зчеплення, де відносні тангенціальні переміщення виражаються другою з умов (3). Тому абсолютна величина тангенціального переміщення в кожній граничній точці (крім точки $r = 0$) у момент, коли точка знаходиться в зоні проковзування, повинна бути меншою, ніж у момент, коли ця точка опиняється в зоні зчеплення. Тобто в зоні проковзування маємо умову

$$u_r \Big|_{\zeta=0} > C_0 r, \quad R_1 < r \leq R. \quad (5)$$

У зоні зчеплення повинна бути накладена умова

$$\left| \tau_{r\zeta} \right| \Big|_{\zeta=0} < \mu_0 \left| \sigma_\zeta \right| \Big|_{\zeta=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1. \quad (6)$$

Таким чином, розв'язання задачі передбачає виконання крайових нерівностей (5), (6).

Крім сформульованих крайових умов (3), (5), (6), потрібно, щоб виконувалась також умова рівноваги півпростору

$$2\pi \int_0^R \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0} r dr = -P. \quad (7)$$

Система інтегральних рівнянь і її зведення до системи функціональних рівнянь Вінера – Гопфа. Введемо невідомі функції контактних напружень у зонах зчеплення та проковзування

$$\begin{aligned}
p(r) &= \frac{1}{2G} \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0}, & q(r) &= \frac{1}{2G} \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0}, & 0 \leq r \leq R_1, \\
\sigma(r) &= \frac{1}{2G} \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0}, & R_1 &< r < R, & \\
\end{aligned} \tag{8}$$

і розглянемо першу крайову задачу для пружного півпростору з умовами

$$\frac{1}{2G} \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0} = g_1(r), \quad \frac{1}{2G} \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} = g_2(r). \tag{9}$$

Тут

$$g_1(r) = \begin{cases} p(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ \sigma(r), & R_1 < r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad g_2(r) = \begin{cases} q(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ \mu_0 \sigma(r), & R_1 < r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язок крайової задачі (9) знайдемо за допомогою інтегрального перетворення Мелліна. Зокрема, переміщення на межі півпростору мають вигляд

$$\begin{aligned}
u_\zeta \Big|_{\zeta=0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s} \left(m_1 \frac{\Gamma(1+s/2)\Gamma(1/2-s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)\Gamma(1-s/2)} a_1(s) - m_2 a_2(s) \right) r^{-s} ds, \\
u_r \Big|_{\zeta=0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s-1} \left(m_2 a_1(s) - m_1 \frac{\Gamma(1/2+s/2)\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(1+s/2)\Gamma(1/2-s/2)} a_2(s) \right) r^{-s} ds, \\
m_1 &= 2 \frac{m-1}{m}, \quad m_2 = \frac{m-2}{m}, \quad 0 < c < 1, \tag{11}
\end{aligned}$$

де функції $a_1(s)$, $a_2(s)$ – трансформанти Мелліна функцій $g_1(r)$, $g_2(r)$ із умов (9):

$$a_j(s) = \int_0^\infty g_j(y) y^s ds, \quad j = 1, 2.$$

Розв'язок (11) задачі (9) використаємо як зображення розв'язку розглядуваної задачі (3), (5)–(7). При цьому третя, четверта та п'ята з крайових умов (3) будуть виконані.

Зображення розв'язку (11) підставимо у продиференційовані першу та помножену на r другу крайові умови (3). Виконавши заміни

$$s = -i\tau, \quad r = \operatorname{Re}^{-\xi}, \quad y = \operatorname{Re}^{-\eta}, \tag{12}$$

відносно нових невідомих функцій

$$\varphi(\eta) = \sigma(\operatorname{Re}^{-\eta})e^{-\eta}, \quad 0 \leq \eta < a, \quad a = \ln\left(\frac{R}{R_1}\right),$$

$$\psi_1(\eta) = p(\operatorname{Re}^{-\eta})e^{-\eta}, \quad \psi_2(\eta) = q(\operatorname{Re}^{-\eta})e^{-\eta}, \quad a \leq \eta < \infty, \tag{13}$$

отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \mu_0 \varphi(\xi), & \xi < a \\ \psi_2(\xi), & \xi \geq a \end{cases} - \frac{m_1}{m_2} L_1(\xi) = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{m_2} e^{-\xi}, \quad 0 < \xi < \infty, \\
\psi_1(\xi) - \frac{m_1}{m_2} L_2(\xi) = \frac{2}{m_2} C_0 e^{-\xi}, \quad a < \xi < \infty, \tag{14}$$

$$L_j(\xi) \equiv \mu_0^{j-1} \int_0^a k_j(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta + \int_a^\infty k_j(\xi - \eta) \psi_j(\eta) d\eta, \quad j = 1, 2,$$

з різницевиими ядрами

$$k_1(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad k_2(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{K}(\tau)} e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau,$$

$$\mathcal{K}(\tau) = \frac{\Gamma(1 - i\tau/2)\Gamma(1/2 + i\tau/2)}{\Gamma(1/2 - i\tau/2)\Gamma(1 + i\tau/2)}. \quad (15)$$

Продовжимо інтегральні рівняння (14) на всю числову вісь, поклавши $\varphi(\eta) = 0$, коли $\eta < 0$, $\eta \geq a$, і $\psi_{1,2}(\eta) = 0$, коли $\eta < a$, і застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Psi_j^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \psi_j(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \quad j = 1, 2,$$

$$\Psi_1^-(z) = \frac{m_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Psi_2^-(z) = \frac{m_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iza} \int_{-\infty}^a L_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi. \quad (16)$$

Функції, відмічені верхнім індексом «+», аналітичні у півплощині $\text{Im } z > c^+$ ($c^+ < 0$), індексом «-» – у півплощині $\text{Im } z < c^-$ ($c^- > 0$). Зокрема, $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ – цілі функції. Застосувавши теорему про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, отримаємо систему функціональних рівнянь Вінера – Гопфа

$$[m_1 \mathcal{K}(z) - \mu_0 m_2] \Phi^+(z) + e^{iza} [m_1 \mathcal{K}(z) \Psi_1^+(z) - m_2 \Psi_2^+(z)] - \Psi_1^-(z) = F_1^+(z),$$

$$-\frac{m_1 \mu_0}{\mathcal{K}(z)} \Phi^+(z) e^{-iza} + m_2 \Psi_1^+(z) - \frac{m_1}{\mathcal{K}(z)} \Psi_2^+(z) + \Psi_2^-(z) = F_2^+(z),$$

$$\Phi^+(z) = e^{iza} \Phi^-(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-, \quad (17)$$

праві частини якої мають вигляд

$$F_1^+(z) = -\frac{\text{tg } \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 - iz}, \quad F_2^+(z) = \frac{2C_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-a}}{1 - iz}. \quad (18)$$

Розв'язання системи функціональних рівнянь. Ввівши функції

$$\Psi^+(z) = \mu_0 \Psi_1^+(z) - \Psi_2^+(z), \quad \Phi_1^+(z) = \Phi^+(z) + e^{iza} \Psi_1^+(z),$$

$$\Psi^-(z) = \Psi_2^-(z) - m_2 e^{-iza} \Phi^+(z),$$

$$\mathcal{K}_1(z) = m_1 \mathcal{K}(z) - \mu_0 m_2 = \lambda_1(z) \Gamma(1 - iz/2) \Gamma(1/2 + iz/2),$$

$$\mathcal{K}_2(z) = m_2 - \frac{\mu_0 m_1}{\mathcal{K}(z)},$$

$$\lambda_1(z) = \frac{m_1}{\Gamma(1/2 - iz/2) \Gamma(1 + iz/2)} - \frac{\mu_0 m_2}{\Gamma(1 - iz/2) \Gamma(1/2 + iz/2)}, \quad (19)$$

систему функціональних рівнянь (17) перетворимо до вигляду

$$\mathcal{K}_1(z) \Phi_1^+(z) + m_2 e^{iza} \Psi^+(z) - \Psi_1^-(z) = F_1^+(z),$$

$$\mathcal{K}_1(z) \Psi^-(z) + e^{-iza} \mathcal{K}_2(z) [\Psi_1^-(z) + F_1^+(z)] + m_3 \Psi^+(z) = \mathcal{K}_1(z) F_2^+(z),$$

$$c^+ < \text{Im } z < c^-, \quad (20)$$

де стала $m_3 = \frac{3m - 4}{m}$.

Факторизуємо коефіцієнт $\mathcal{K}_1(z)$:

$$\mathcal{K}_1(z) = \mathcal{K}_1(0)\mathcal{K}_1^+(z)\mathcal{K}_1^-(z),$$

$$\mathcal{K}_1^+(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta'_n}\right) \left(1 - \frac{iz}{2n}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}_1^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta'_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{2n-1}\right)^{-1},$$

де $\mathcal{K}_1^+(z)$ і $\mathcal{K}_1^-(z)$ – аналітичні та відмінні від нуля функції у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ відповідно. Другі доданки і праві частини рівнянь (20), віднесені до $\mathcal{K}_1^\mp(z)$, подамо у вигляді різниці аналітичних у верхній ($\text{Im } z > c^+$) і нижній ($\text{Im } z < c^-$) півплощинах функцій:

$$\frac{m_2 e^{iza} \Psi^+(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z),$$

$$\frac{e^{-iza} \mathcal{K}_2(z) [\Psi_1^-(z) + F_1^+(z)]}{\mathcal{K}_1^+(z)} = \chi^+(z) - \chi^-(z),$$

$$\frac{F_1^+(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)} = f_1^+(z) - f_1^-(z), \quad \mathcal{K}_1(0)\mathcal{K}_1^-(z)F_2^+(z) = f^+(z) - f^-(z). \quad (21)$$

Тут позначено

$$\begin{aligned} \chi^+(z) &= i \frac{m_1}{m_2} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon \left(\frac{\gamma_0}{z+i} - \frac{i}{(z+i)^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_k^-}{\zeta'_k + iz} \left(\Psi_1^-(i\zeta'_k) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + \zeta'_k} \right) e^{\zeta'_k a} + \frac{\hat{\alpha}_k^-}{2k-1-iz} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\Psi_1^-(-i(2k-1)) + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2(k-1)} \right) e^{-2ka} \right], \\ \chi_1^-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k + iz} \Psi^+(i\zeta_k) e^{-\zeta_k a}, \quad f_1^+(z) = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2\pi} \mathcal{K}_1^-(-i)} \frac{1}{1-iz}, \\ f^+(z) &= \frac{2\alpha C_0}{1-iz}, \quad \gamma_0 = \frac{\mathcal{K}_1^-(-i)}{i\mathcal{K}_1^-(-i)} + 1 + \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{1}{\mu_0} - 2 \ln 2 - a, \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{K}_1(0)\mathcal{K}_1^-(-i) e^{-a}, \\ \alpha_k^+ &= -m_2 \mathcal{K}_1(0) \lambda_2(i\zeta_k) \mathcal{K}_1^+(i\zeta_k), \quad \alpha_k^- = -m_3 m_2^{-1} \mathcal{K}_1(0) \lambda_2(i\zeta'_k) \mathcal{K}_1^-(i\zeta'_k), \\ \hat{\alpha}_k^- &= \frac{m_1}{m_2} \mathcal{K}_1(0) e^a \frac{[(2k-1)!!]^2 \mathcal{K}_1^-(-i(2k-1))}{(2k-1)[(2k-2)!!]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \lambda_2(z) &= \frac{i}{[\lambda_1'(z)\Gamma(1-iz/2)\Gamma(1/2+iz/2)]}, \end{aligned} \quad (21')$$

де $\zeta_n, \zeta'_n, n = 1, 2, \dots$, – додатні та від'ємні корені рівняння $\lambda_1(is) = 0$, асимптотична поведінка яких є такою:

$$\begin{aligned} \zeta_n &= 2(n + \gamma) + o(1), \quad \zeta'_n = -2(n - \gamma) + 1 + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \\ \gamma &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{m_2 \mu_0}{m_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Із (20), (21) за узагальненою теоремою Ліувілля знаходимо [5, 7]

$$\Phi_1^+(z) = \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z)}{\mathcal{K}_1(0)\mathcal{K}_1^+(z)}, \quad \Psi_1^-(z) = \mathcal{K}_1^-(z)[f_1^-(z) - \chi_1^-(z)],$$

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{m_3} \mathcal{K}_1^+(z)[f^+(z) - \chi^+(z)], \quad \Psi^-(z) = -\frac{f^-(z) - \chi^-(z)}{\mathcal{K}_1(0)\mathcal{K}_1^-(z)}. \quad (23)$$

Розв'язок (23) системи функціональних рівнянь (20) містить невідомі значення $\Psi^+(i\zeta_k)$, $\Psi_1^-(i\zeta'_k)$, $\Psi_1^-(-i(2k-1))$, $k = 1, 2, \dots$, із (21'). Для їх визначення покладемо у третій рівності (23) $z = i\zeta_n$, а у другій — $z = i\zeta'_n$ і $z = -i(2n-1)$, $n = 1, 2, \dots$. Введемо малий параметр

$$\lambda = e^{-2a} = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (24)$$

і позначення

$$\tilde{\alpha}_k^+ = \alpha_k^+ e^{(2k-\zeta_k)a}, \quad \tilde{\alpha}_k^- = \alpha_k^- e^{(2k+\zeta'_k)a},$$

$$\beta_n^+ = m_3^{-1} \mathcal{K}_1^+(i\zeta_n), \quad \beta_n^- = \mathcal{K}_1^-(i\zeta'_n), \quad \hat{\beta}_n^- = \mathcal{K}_1^-(-i(2n-1)),$$

$$g_n^+ = \frac{\alpha \beta_n^+}{1 + \zeta_n} \left[2C_0 - \frac{m_1}{m_2} \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \left(\gamma_0 - \frac{1}{1 + \zeta_n} \right) \right],$$

$$g_n^- = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_n^-}{\mathcal{K}_1^-(-i)(1 + \zeta'_n)}, \quad \hat{g}_{n+1}^- = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\beta}_{n+1}^-}{2\mathcal{K}_1^-(-i)n}, \quad k, n = 1, 2, \dots,$$

$$\hat{g}_1^- = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathcal{K}_1'^-(-i)}{i\mathcal{K}_1^-(-i)}. \quad (25)$$

Тоді відносно невідомих

$$z_k^+ = \Psi^+(i\zeta_k), \quad z_k^- = \Psi_1^-(i\zeta'_k) - \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + \zeta'_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\hat{z}_1^- = \Psi_1^-(-i), \quad \hat{z}_k^- = \Psi_1^-(-i(2k-1)) + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (26)$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_k^-}{\zeta'_k - \zeta_n} z_k^- + \frac{\hat{\alpha}_k^-}{2k-1 + \zeta_n} \hat{z}_k^- \right) \lambda^k = g_n^+,$$

$$z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k - \zeta_n} z_k^+ \lambda^k = g_n^-, \quad \hat{z}_n^- + \hat{\beta}_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}_k^+}{\zeta_k + 2n-1} \hat{z}_k^+ \lambda^k = \hat{g}_n^-,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Коефіцієнти системи рівнянь (27) експоненціально спадають за k . Її розв'язок знаходимо у вигляді рядів за степенями параметра λ [1, 7].

Додаткові умови. Дві додаткові умови до нескінченної системи алгебричних рівнянь (27), необхідні для визначення сталих C_0 і λ , знайдемо, вимагаючи неперервності контактних напружень на лінії переходу із зони зчеплення у зону проковзування і виконання крайових нерівностей (5), (6).

Асимптотичний аналіз третього співвідношення (23) на підставі оцінок $\mathcal{K}_1^+(z) \sim A_1^+(-iz)^{1/2+\gamma}$, $f^+(z) = O(z^{-1})$, $\chi^+(z) = O(z^{-1})$, $|z| \rightarrow \infty$, і з леми Ватсона (про асимптотичну поведінку) [11, с. 58]

$$\int_0^{\infty} \xi^{\rho-1} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi \sim \Gamma(\rho) f(0) (-iz)^{-\rho}, \quad \rho > 0, \quad 0 < \arg z < \pi, \quad (28)$$

засвідчує, що лінійна комбінація напружень $(\mu_0 \sigma_\zeta - \tau_{r\zeta})|_{\zeta=0}$ на краю зони зчеплення ($r \rightarrow R_1 - 0$) необмежена. Додаткова умова $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z[f^+(z) - \chi^+(z)] = 0$, яку з урахуванням (21'), (25), (26) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_k^- z_k^- - \tilde{\alpha}_k^- \tilde{z}_k^-) \lambda^k = \gamma_1, \quad \gamma_1 = \alpha \left(\frac{m_1}{m_2} \gamma_0 \operatorname{tg} \varepsilon - 2C_0 \right), \quad (29)$$

забезпечує обмеженість вказаної комбінації напружень при $r = R_1 - 0$ і, як наслідок, — неперервність на лінії $r = R_1$ контактних напружень $\sigma_\zeta|_{\zeta=0}$ і $\tau_{r\zeta}|_{\zeta=0}$.

Виконавши умову (29), за лемою Ватсона (28) маємо

$$\frac{1}{2G} (\mu_0 \sigma_\zeta - \tau_{r\zeta})|_{\zeta=0} \sim -\frac{R}{R_1} \frac{AA_1^+}{\Gamma(3/2 - \gamma)} \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^{1/2 - \gamma}, \quad r \rightarrow R_1 - 0, \quad (30)$$

$$A = -\gamma_1 - \sum_{k=1}^{\infty} [\zeta_k' \tilde{\alpha}_k^- z_k^- + (2k - 1) \tilde{\alpha}_k^- \tilde{z}_k^-] \lambda^k.$$

Із другої рівності (11) з урахуванням другого функціонального рівняння (17) знаходимо

$$u_r|_{\zeta=0} = \frac{R}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_2^-(\tau)}{\tau - i} e^{i\tau(a-\xi)} d\tau + \begin{cases} C_0 \frac{R_1^2}{r}, & r > R_1 \\ C_0 r, & r \leq R_1 \end{cases}. \quad (31)$$

Звідси оберненим перетворенням Фур'є з урахуванням другої з крайових умов (3) отримаємо

$$e^{iza} \frac{\Psi_2^-(z)}{1 + iz} = \frac{1}{R\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \left(u_r|_{\zeta=0} - C_0 \frac{R_1^2}{r} \right) e^{iz\xi} d\xi. \quad (32)$$

Застосовуючи до цієї рівності лему (28) і розв'язок (23), матимемо

$$u_r|_{\zeta=0} = C_0 r - \frac{\sqrt{2\pi} R A A_1^+}{\Gamma(5/2 - \gamma) \sqrt{m_1^2 + \mu_0^2 m_2^2}} \left(\frac{r}{R_1} - 1 \right)^{3/2 - \gamma} + O\left(\left(\frac{r}{R_1} - 1 \right)^2 \right), \quad r \rightarrow R_1 + 0. \quad (33)$$

Асимптотична формула (30) вказує на те, що для виконання нерівності (6) необхідно, щоб $AA_1^+ \geq 0$. У той же час для виконання нерівності (5) на підставі (33) потрібно, щоб $AA_1^+ \leq 0$. Отже (оскільки $A_1^+ \neq 0$), робимо висновок, що крайові нерівності (5), (6) будуть виконані в околі лінії $r = R_1$ тоді, коли $A = 0$, тобто отримуємо ще одну додаткову умову

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\zeta_k' \tilde{\alpha}_k^- z_k^- + (2k - 1) \tilde{\alpha}_k^- \tilde{z}_k^-] \lambda^k = -\gamma_1, \quad (34)$$

яка з огляду на (30) є умовою гладкості контактних напружень при переході через лінію $r = R_1$.

Розв'язок нескінченної системи алгебричних рівнянь (27) подамо у вигляді

$$z_k^\pm = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot z_{1k}^\pm + C_0 z_{2k}^\pm, \quad \widehat{z}_k^- = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \widehat{z}_{1k}^- + C_0 \widehat{z}_{2k}^-,$$

де z_{jk}^\pm , \widehat{z}_{jk}^- , $j = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$, – розв'язки системи рівнянь (27) з правими частинами

$$\begin{aligned} g_{1n}^+ &= -\frac{m_1}{m_2} \frac{\alpha \beta_n^+}{1 + \zeta_n} \left(\gamma_0 - \frac{1}{1 + \zeta_n} \right), & g_{1n}^- &= -\frac{\beta_n^-}{\sqrt{2\pi} \mathcal{K}_1^-(-i)(1 + \zeta_n')}, \\ \widehat{g}_{11}^- &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathcal{K}_1'^-(-i)}{i \mathcal{K}_1^-(-i)}, & \widehat{g}_{1,n+1}^- &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\widehat{\beta}_{n+1}^-}{2 \mathcal{K}_1^-(-i)n}, \\ g_{2n}^+ &= \frac{2\alpha \beta_n^+}{1 + \zeta_n}, & g_{2n}^- &= 0, & \widehat{g}_{2n}^- &= 0, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Тоді з умови (29) знаходимо сталу «защемленої деформації»

$$C_0 = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \frac{\frac{m_1}{m_2} \alpha \gamma_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\alpha}_k^- z_{1k}^- - \widehat{\alpha}_k^- \widehat{z}_{1k}^-) \lambda^k}{2\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\alpha}_k^- z_{2k}^- - \widehat{\alpha}_k^- \widehat{z}_{2k}^-) \lambda^k}, \quad (36)$$

а умова (34) служить трансцендентним рівнянням для визначення відносно-го розміру зони зчеплення $\frac{R_1}{R} = \sqrt{\lambda}$.

Визначення радіуса області контакту, контактних напружень та про-сідання конуса. Радіус R області контакту знайдемо із умови рівноваги (7). Перетворивши інтеграл із (7):

$$\begin{aligned} \int_0^R \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0} r dr &= 2G \left(\int_0^{R_1} p(r) r dr + \int_{R_1}^R \sigma(r) r dr \right) = \\ &= 2GR^2 \left(\int_a^\infty \psi_1(\xi) e^{-\xi} d\xi + \int_0^a \varphi(\xi) e^{-\xi} d\xi \right) = \\ &= 2GR^2 \sqrt{2\pi} [e^{-a} \Psi_1^+(i) + \Phi^+(i)], \end{aligned}$$

з урахуванням розв'язку (23) отримаємо

$$R = \sqrt{\frac{k_0 P}{4\pi G}}, \quad k_0 = \mathcal{K}_1(0) \mathcal{K}_1^+(i) \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2 \mathcal{K}_1^-(-i)} + \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k - 1} z_k^+ \lambda^k \right)^{-1}. \quad (37)$$

Напруження в області контакту знайдемо, застосовуючи заміни (9), (10), (13) і виконуючи обернене перетворення Фур'є інтегралів із (16). Перетворивши відповідні інтеграли за теорією лишків у ряди, на підставі (21), (23) отримаємо наступні розподіли нормальних і дотичних контактних напружень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0} &= -2 \frac{m_2}{m_3} C_0 + \frac{m_1}{m_3} \left[\operatorname{tg} \varepsilon \cdot \left(\ln \frac{r}{4R} + 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi} [(2k-1)!!]^2 \widehat{z}_k^-}{(2k-1) [(2k-2)!!]^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k-2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G} \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} &= -\frac{m_2}{m_3} \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{m_1}{m_3} \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathcal{K}_1(0)} \times \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{(2k)!!(2k-2)!! \mathcal{K}_1(-2ik)} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2k-1} \times \\
&\times \left[\left(\gamma_1 + \frac{m_1}{m_2} \frac{\alpha \operatorname{tg} \varepsilon}{2k-1} \right) \frac{e^a}{2k-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_n^- z_n^-}{\zeta_n^- + 2k} + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\tilde{\alpha}_n^- z_n^-}{2(n-k)-1} \right) \lambda^{n-1/2} \right], \quad 0 \leq r \leq R_1, \\
\frac{1}{2G} \sigma_{\zeta} \Big|_{\zeta=0} &= \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{m_2 \mu_0} + \frac{R}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[m_2 \lambda_2(i\zeta_k) z_k^+ \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-\zeta_k} - \lambda_2(i\zeta_k') z_k^- \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-\zeta_k'} \right], \\
&R_1 < r < R. \tag{38}
\end{aligned}$$

В околі вершини конуса нормальні контактні напруження мають логарифмічну особливість, а дотичні напруження є скінченними:

$$\frac{1}{2G} \sigma_{\zeta} \Big|_{\zeta=0} \sim \frac{m_1}{m_3} \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \ln \frac{r}{R}, \quad \frac{1}{2G} \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} = -\frac{m_2}{m_3} \operatorname{tg} \varepsilon, \quad r \rightarrow 0. \tag{39}$$

На краю області контакту напруження перетворюються в нуль і мають таку асимптотичну поведінку:

$$\sigma_{\zeta} \Big|_{\zeta=0} = \mu_0^{-1} \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} = O((R-r)^{1/2+\gamma}), \quad r \rightarrow R-0,$$

яку знаходимо із розв'язку (16), (23) з використанням леми Ватсона (28).

Просідання конуса δ визначаємо, виходячи із виразу для нормальних переміщень $u_{\zeta} \Big|_{\zeta=0}$ із (11) при $r=0$ згідно з першою з крайових умов (3).

Використавши заміни (8), (13) і розвинувши інтеграл у ряд за теорією лишків з урахуванням (16), (21), (23), отримаємо

$$\delta = R \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\mathcal{K}_1^-(i)} + \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k^+} z_k^+ \lambda^k \right). \tag{40}$$

Випадок гладкого контакту. За відсутності тертя $\mu_0 = 0$ зона зчеплення зникає: $R_1 = 0$, $a = \infty$, і задача зводиться до інтегрального рівняння

$$\int_0^{\infty} k_1(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{m_1} e^{-\xi}, \quad 0 < \xi < \infty, \tag{41}$$

яке еквівалентне функціональному рівнянню

$$\mathcal{K}(z) \Phi^+(z) - \Psi_1^-(z) = F_1^+(z), \quad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-. \tag{42}$$

Після проведення необхідних факторизацій

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(z) &= \mathcal{K}^+(z) \mathcal{K}^-(z), & \mathcal{K}^+(z) &= \frac{\Gamma(1-iz/2)}{\Gamma(1/2-iz/2)}, \\
\mathcal{K}^-(z) &= \frac{\Gamma(1/2+iz/2)}{\Gamma(1+iz/2)}, & \mathcal{K}^+(z) &= \frac{z}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{2} \cdot \mathcal{K}^-(z), \\
\frac{F_1^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} &= f_1^+(z) - f_1^-(z), & f_1^+(z) &= -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2\sqrt{2} m_1 \mathcal{K}_1^-(i)} \frac{1}{1-iz}, \tag{43}
\end{aligned}$$

розв'язок рівняння (42) отримуємо у вигляді [5]

$$\Phi^+(z) = \frac{f_1^+(z)}{\mathcal{K}^+(z)}, \quad \Psi_1^-(z) = \mathcal{K}^-(z) f_1^-(z). \tag{44}$$

Оберненням першого зі співвідношень (16) знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (41):

$$\varphi(\xi) = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2\sqrt{\pi} m_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\pi\tau/2)}{\tau(1-i\tau)\mathcal{K}^-(\tau)} e^{-i\tau\xi} d\tau. \quad (45)$$

Звідси, застосовуючи теорію лишків, маємо

$$(e^{\xi}\varphi(\xi))' = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{\pi} m_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} e^{-2k\xi} = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{m_1} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\xi}}},$$

$$e^{\xi}\varphi(\xi) = -\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{m_1} \ln(e^{\xi} + \sqrt{e^{2\xi} - 1}), \quad 0 < \xi < \infty. \quad (46)$$

Зі співвідношення (46) з урахуванням заміни (12), (13) отримуємо нормальні контактні напруження у вигляді рівності (1). Виконавши умову рівноваги (7), приходимо до першої рівності із (2). Просідання конуса δ із формули (40) за умови, що $\lambda = 0$, $\mathcal{K}_1(z) = m_1\mathcal{K}(z)$, $\mathcal{K}_1^-(0) = 1$, $\mathcal{K}^-(0) = \sqrt{\pi}$, $\mathcal{K}_1^-(-i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{K}^-(-i) = \frac{2}{\pi}$, перетворюється до другого із виразів (2). Таким чином, приходимо до розв'язку (1), (2), отриманого А. Лявом [13].

Результати обчислень безрозмірних нормальних $\bar{\sigma} = (R^2/P)\sigma_{\zeta}|_{\zeta=0}$ і дотичних $\bar{\tau} = (R^2/P)\tau_{r\zeta}|_{\zeta=0}$ контактних напружень у випадку числа Пуассона $m = 10/3$ наведено графічно на рис. 1. Суцільна крива 1 показує розподіл величини $\bar{\sigma}$ для коефіцієнта тертя $\mu_0 = 0.25$ (відповідна крива для випадку $\mu_0 = 0.5$ практично співпадає з наведеною, а для випадку $\mu_0 = 0$ зображена пунктиром), криві 2, 3 – розподіли величини $\bar{\tau}$ для $\mu_0 = 0.25$ і $\mu_0 = 0.5$ відповідно.

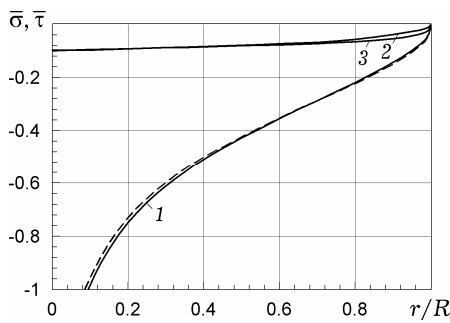


Рис. 1

Таблиця 1

μ_0	R_1/R	\bar{R}	$\bar{\delta}$	C_0
0	0	0.6676	1.0486	–
0.05	0.0105	0.6650	1.0470	–0.3978
0.1	0.1996	0.6626	1.0456	–0.2019
0.15	0.4869	0.6602	1.0443	–0.1475
0.2	0.6980	0.6583	1.0432	–0.1258
0.25	0.8239	0.6568	1.0425	–0.1154
0.3	0.8957	0.6558	1.0420	–0.1101
0.35	0.9369	0.6551	1.0417	–0.1071
0.4	0.9608	0.6546	1.0416	–0.1056
0.45	0.9751	0.6543	1.0415	–0.1046
0.5	0.9838	0.6541	1.0414	–0.1039

У табл. 1 наведено значення відносного розміру зони зчеплення R_1/R , нормалізованого радіуса області контакту $\bar{R} = R\sqrt{2G \operatorname{tg} \varepsilon/P}$, нормалізованої величини просідання конуса $\bar{\delta} = \delta\sqrt{2G/(P \operatorname{tg} \varepsilon)}$ та сталої «защемленої деформації» C_0 для різних значень коефіцієнта тертя μ_0 для числа Пуассона $m = 10/3$. Відмітимо, що відносний розмір зони зчеплення у розглядуваній осесиметричній задачі виявляється значно більшим, ніж у відповідній задачі плоскої деформації (про фрикційний контакт жорсткого клина з пружною півплощиною), де, наприклад, для $\mu_0 = 0.25$, $m = 10/3$ він складає 0.5432 [9].

1. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавлении кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1987. – № 7. – С. 29–33.
2. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. – 1945. – 9, Вып. 5. – С. 413–424.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
Te same: Johnson K. L. Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ., 1985.
4. Жупанська О. І. Фрикційна взаємодія жорсткого циліндра з пружним півпростором // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 2. – С. 91–100.
5. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
Te same: Noble B. Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon, 1958.
6. Острик В. І. Втискання індентора поліноміального профілю в пружну півплощину за наявності тертя // машинознавство. – 2003. – № 11. – С. 9–13.
7. Острик В. І. Контакт пружного та жорсткого клинів з урахуванням тертя і зчеплення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 88–100.
8. Острик В. І. Контактное взаимодействие кругового штампа с упругим полупространством при наличии трения и сцепления // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – Вып. 2 (48). – С. 22–28.
9. Острик В. І., Улитко А. Ф. Контактное взаимодействие жесткого клина с упругой полуплоскостью с учетом зон сцепления и проскальзывания в области контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 1. – С. 93–105.
10. Снеддон И. Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
Te same: Sneddon I. Fourier transforms. – New York: McGraw-Hill, 1951.
11. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
12. Zhupanska O. I. On the analytical approach to Galin's stick-slip problem. A survey // J. Elasticity. – 2008. – 90. – P. 315–333.
13. Love A. E. H. Boussinesq's problem for a rigid cone // Quart. J. Math. (Oxford series). – 1939. – 10, No. 1. – P. 161–175.
14. Spence D. A. An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1973. – 73. – P. 249–268.

ФРИКЦИОННЫЙ КОНТАКТ ЖЕСТКОГО КОНУСА С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Рассмотрена осесимметричная задача о контактном взаимодействии жесткого конуса и упругого полупространства с учетом трения и частичного сцепления в области контакта. Обобщенным методом Винера – Хопфа получено аналитическое решение задачи. Найдены радиусы области контакта и зоны сцепления, распределение контактных напряжений, осадка конуса.

FRICIONAL CONTACT OF RIGID CONE WITH ELASTIC HALF-SPACE

The axially symmetric problem for contact interaction of rigid cone and elastic half-space with taking into account friction and partial adhesion in the contact domain is studied. Using the Wiener – Hopf generalized method the analytical solution of the problem is obtained. The radii of contact domain and of adhesion zone, the distribution of contact stresses, the settling of cone are determined.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

Одержано
02.02.12