

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ КВАЗІСТАТИЧНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПІВПРОСТОРИ З ПОКРИТТЯМ

З використанням інтегральних перетворень Лагерра та Ганкеля побудовано розв'язок осесиметричної квазістатичної задачі термопружності для півпростору з покриттям. Подано результати числового аналізу термонапруженого стану залежно від відносних геометричних та термомеханічних властивостей покриття та півпростору. З'ясована можливість застосування запропонованого методу до аналізу впливу нанопокриттів.

Для багатьох елементів сучасної техніки, які, залежно від призначення, можуть зазнавати теплових і силових навантажень різного типу, характерною є неоднорідність їх властивостей. З одного боку, використання неоднорідності пов'язане з неможливістю задовольнити високі експлуатаційні вимоги, які тепер ставляться до матеріалів і конструкцій з них, лише за допомогою однорідних структур, а з іншого – з хімічними та фізичними процесами, що відбуваються під час їх виготовлення та експлуатації. Крім того, в останні роки досить інтенсивно розвивається науково-технічний напрямок із створення і введення в практику наноматеріалів з їхніми високими питомими фізико-механічними характеристиками. Оскільки через надзвичайно дрібну будову та крихкість ці матеріали не можуть самостійно формувати ті чи інші конструкційні макроелементи, то їх успішно використовують в ролі армувальних, термозахисних, покривних наповнювачів композитів для наступного виготовлення нових типів матеріалів, модифікації властивостей вже існуючих конструкційних елементів.

Основи теорії і методи розв'язування задач теплопровідності та термопружності для тіл з різними тонкими неоднорідностями викладені у працях багатьох авторів [3, 4, 8, 14]. Значне місце в цих працях займає вивчення температурних полів і напружень у тілах з неоднорідностями, один з характерних розмірів яких істотно менший від двох інших [8]. Схема розв'язування задач термопружної рівноваги тіл з тонкими неоднорідностями полягає в тому, що власне неоднорідність з розгляду виключається, а її наявність моделюється певною математичною залежністю між температурою, тепловими потоками, напруженнями і переміщеннями на поверхнях, які з обох боків прилягають до включення, товщина якого тепер вважається нульовою.

Якщо опис неоднорідності з використанням математичних спрощень призводить до значних похибок, використовують просторові постановки [3, 4, 17]. Цей підхід ґрунтується на розгляді відповідних вихідних рівнянь для кожного елемента композитного тіла з подальшим узгодженням розв'язків через умови спряження елементів. Такий підхід реалізується з використанням комп'ютерного моделювання у багатьох авторів, зокрема, в працях [3, 5, 10, 11, 15, 18].

Слід зазначити, що вказані підходи при розгляді квазістатичних задач термопружності та застосуванні до них класичного методу інтегрального перетворення Лапласа [5, 13] призводять до значних труднощів обчислювального характеру, оскільки рівняння на визначення нулів знаменника трансформанти та його корені, що використовуються при оберненні інтегрального перетворення Лапласа, залежать від кількості шарів композита, а у випадку просторових задач – ще й від параметра обраного інтегрального перетворення за просторовою змінною [3, 5]. У таких випадках спільне числове обернення інтегрального перетворення Лапласа та інтегрального перетворення за просторовою змінною (Фур'є, Ганкеля тощо) може істотно впливати не лише на точність одержаних результатів, але й спотворювати якісну картину досліджуваного явища.

Поряд із традиційними підходами до розв'язування квазістатичних задач термопружності неоднорідних тіл останнім часом одержав розвиток відносно новий – метод поліномів Лагерра чи, як його ще називають, метод інтегрального перетворення Лагерра [1, 2, 9]. Основною перевагою цього підходу є простота обернення за допомогою підсумовування ряду. Крім того, при застосуванні методу поліномів Лагерра до класичних початково-крайових задач математичної фізики утворюються трикутні послідовності крайових задач [1], що дає можливість відразу записати їх загальний розв'язок і тим самим створити узагальнений алгоритм знаходження коефіцієнтів розкладу [2, 9, 16].

Формулювання задачі теплопровідності. Розглянемо півпростір з покриттям, що моделюється плоско-паралельним шаром завтовшки h з відмінними від півпростору теплофізичними характеристиками. Джерелом нестационарного теплового процесу в цій системі є тепловий потік $Q(r, t)$ на вільній поверхні покриття, осесиметрично розподілений в крузі радіуса R . Вважаємо, що початкова температура всього пакета дорівнює нулеві, а на межі поділу покриття та півпростору виконуються умови ідеального теплового контакту.

Після введення у розгляд безрозмірних змінних та величин

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \gamma = \frac{z}{R}, \quad \tau = \frac{a_2 t}{R^2}, \quad \gamma_1 = \frac{h}{R}, \quad \tilde{a}_i = \frac{a_2}{a_i},$$

$$\tilde{\lambda}_T = \frac{\lambda_T^{(1)}}{\lambda_T^{(2)}}, \quad q(\rho, \tau) = Q(\rho, \tau) \frac{R}{\lambda_T^{(1)}}$$

задачу формулюємо таким чином:

$$\partial_{\rho\rho}^2 T^{(i)} + \rho^{-1} \partial_{\rho} T^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_i \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\partial_{\gamma} T^{(1)} = q(\rho, \tau), \quad \gamma = 0, \quad (3)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \tilde{\lambda}_T \partial_{\gamma} T^{(1)} = \partial_{\gamma} T^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1, \quad (4)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} T^{(2)}(\rho, \gamma, \tau) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \partial_{\gamma} T^{(2)}(\rho, \gamma, \tau) = 0. \quad (5)$$

Тут r, z – змінні циліндричної системи координат; $\lambda_T^{(i)}, a_i$ – відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності покриття ($i = 1$) та півпростору ($i = 2$); $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$, $i = 1, 2$, – температурне поле в покритті та півпросторі.

Припустимо, що функції $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$ можна поставити у відповідність ряд за поліномами Лагерра [7]

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(i)}(\rho, \gamma) L_n(\lambda\tau), \quad (6)$$

де

$$T_n^{(i)}(\rho, \gamma) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau, \quad (7)$$

а $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра, λ – додатний параметр.

Надалі формулу (7) будемо розглядати як інтегральне перетворення функції $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$, а ряд (6) – як формулу обернення цього перетворення.

Домножимо рівняння (1) на ядро перетворення $\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)$ і виконаємо почленне інтегрування отриманого виразу за змінною τ в інтервалі $[0, \infty)$. Згідно з рівністю (7) і формулою диференціювання поліномів Лагерра [7]

$$\partial_t[\exp(-\lambda t)L_n(\lambda t)] = -\lambda \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^n L_k(\lambda t),$$

після інтегрування частинами, враховуючи нульові початкові умови (2), одержимо

$$\partial_{\rho\rho}^2 T_n^{(i)} + \rho^{-1} \partial_{\rho} T_n^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_i \sum_{k=0}^n T_k^{(i)}. \quad (8)$$

Припустимо, крім того, що $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$ задовольняють умови застосовності інтегрального перетворення Ганкеля [6]. Тоді відповідно, замість (8), одержимо послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_i \sum_{k=0}^n \bar{T}_k^{(i)},$$

з якої після перенесення доданка з індексом n в ліву частину одержимо

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \tilde{a}_i) \bar{T}_n^{(i)} = \lambda \tilde{a}_i \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_k^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Відповідно з умов (3)–(5) одержимо трансформовані крайові умови та умови спряження:

$$d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)} = -\bar{q}_n(\xi), \quad \gamma = 0, \quad (10)$$

$$\bar{T}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{T}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1), \quad \tilde{\lambda}_T d_{\gamma} \bar{T}_n^{(1)} = d_{\gamma} \bar{T}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1, \quad (11)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \bar{T}_n^{(2)}(\xi, \gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(2)} = 0, \quad (12)$$

де

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \right] \rho J_0(\xi\rho) d\rho$$

– зображення за Лагерром і Ганкелем.

Послідовність рівнянь (9) має трикутну структуру – оператор у лівій частині не залежить від n , а права частина зі збільшенням n поповнюється попередніми розв'язками. Загальний розв'язок такої послідовності, як відомо з праці [1], має вигляд

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma)], \quad (13)$$

де $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ і $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$ – набір функцій, що визначається з крайових умов, а $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ та $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ – фундаментальні лінійно незалежні розв'язки послідовностей (9), які, зокрема, можна одержати з використанням методу невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$G_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(-\omega\gamma) \sum_{k=0}^j \frac{a_{j,k}^{(i)}}{k!} \left(\frac{\omega_i \gamma}{2} \right)^k,$$

$$W_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(\omega\gamma) \sum_{k=0}^j \frac{a_{j,k}^{(i)}}{k!} \left(-\frac{\omega_i \gamma}{2} \right)^k. \quad (14)$$

При цьому коефіцієнти $a_{j,k}^{(i)}$ повинні задовольняти рекурентні співвідношення

$$a_{j,k+1}^{(i)} = \frac{a_{j,k+2}^{(i)}}{4} - \frac{\lambda \tilde{a}_i}{\omega_i^2} \sum_{p=k}^{j-1} a_{p,k}^{(i)}, \quad j=1,2,\dots, \quad k=j-1, j-2, \dots, 1, 0, \quad a_{j,k}^{(i)} \equiv 0,$$

при $k > j$ і при довільних $a_{j,0}^{(i)}$.

З умов (12), врахувавши вигляд функцій $W_j^{(2)}(\xi, \gamma)$, знайдемо, що

$$B_k^{(2)} \equiv 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Для зручності запису введемо позначення

$$G_j^{(i)}(\xi, \gamma) \equiv G_j(\omega_i \gamma), \quad W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \equiv W_j(\omega_i \gamma),$$

$$G_j'(\omega_i \gamma) \equiv \frac{dG_j(\omega_i \gamma)}{d\gamma}, \quad W_j'(\omega_i \gamma) \equiv \frac{dW_j(\omega_i \gamma)}{d\gamma}.$$

Тоді умови (10), (11), враховуючи подання (14), набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j'(0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j'(0)] &= -\bar{q}_n(\xi), \\ \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j(\omega_1 \gamma_1) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j(\omega_1 \gamma_1)] - \sum_{j=0}^n A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j(\omega_2 \gamma_1) &= 0, \\ \tilde{\lambda}_T \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j'(\omega_1 \gamma_1) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j'(\omega_1 \gamma_1)] - \sum_{j=0}^n A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j'(\omega_2 \gamma_1) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

У лівих частинах рівнянь (16) залишимо доданки при $j = 0$, а решту перенесемо в праву частину. В результаті одержимо послідовності лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, A_n^{(2)}$:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n,1} \\ c_{n,2} \\ c_{n,3} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

де

$$b_{1,1} = -\omega_1, \quad b_{1,2} = \omega_1, \quad b_{2,1} = \exp(-\omega_1 \gamma_1), \quad b_{2,2} = \exp(\omega_1 \gamma_1),$$

$$b_{2,3} = -\exp(-\omega_2 \gamma_1), \quad b_{3,1} = -\tilde{\lambda}_T \omega_1 \exp(-\omega_1 \gamma_1),$$

$$b_{3,2} = \tilde{\lambda}_T \omega_1 \exp(\omega_1 \gamma_1), \quad b_{3,3} = \omega_2 \exp(-\omega_2 \gamma_1),$$

$$c_{n,1} = \bar{g}_n(\xi) - \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j'(0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j'(0)],$$

$$c_{n,2} = \sum_{j=1}^n A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j(\omega_2 \gamma_1) - \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j(\omega_1 \gamma_1) + B_{n-j}^{(1)}W_j(\omega_1 \gamma_1)],$$

$$c_{n,3} = \sum_{j=1}^n A_{n-j}^{(2)}(\xi)G_j'(\omega_2 \gamma_1) - \tilde{\lambda}_T \sum_{j=1}^n [A_{n-j}^{(1)}(\xi)G_j'(\omega_1 \gamma_1) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)W_j'(\omega_1 \gamma_1)].$$

З систем (17) знайдемо рекурентний розв'язок:

$$\begin{aligned}
A_n^{(1)} &= -c_{n,1}(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1) + (\omega_2 c_{n,2} + c_{n,3}) \times \\
&\quad \times [(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1) + (\omega_2 - \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1)]^{-1}, \\
B_n^{(1)} &= \frac{\omega_2 c_{n,2} + c_{n,3} - (\omega_2 - \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(-\omega_1 \gamma_1) A_n^{(1)}}{(\omega_2 + \tilde{\lambda}_T \omega_1) \exp(\omega_1 \gamma_1)}, \\
A_n^{(2)} &= \frac{-c_n^{(3)} + \tilde{\lambda}_T \omega_1 \exp(\omega_1 \gamma_1) B_n^{(1)} - \tilde{\lambda}_T \omega_2 \exp(-\omega_1 \gamma_1) A_n^{(1)}}{\omega_2 \exp(-\omega_2 \gamma_1)}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Формули (18) дають змогу формально завершити побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності. При цьому температурне поле розраховується за формулою

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi \rho) d\xi \right] L_n(\lambda \tau), \quad i = 1, 2. \tag{19}$$

Визначення напружено-деформованого стану. Напружено-деформований стан в півпросторі з покриттям, викликаний температурним полем (19), визначимо в припущенні, що поверхня покриття $\gamma = 0$ вільна від навантажень, на нескінченності переміщення та напруження дорівнюють нулеві, а на поверхнях поділу матеріалу шару та півпростору виконуються умови ідеального термомеханічного контакту.

Таким чином, задача полягає у відшуванні розв'язку двох рівнянь Пуассона відносно ключових функцій $\theta^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \operatorname{div} \mathbf{U}^{(i)}$, $i = 1, 2$, – об'ємного розширення і $w^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$, $i = 1, 2$, – нормальних компонент вектора пружного переміщення $\mathbf{U}^{(i)}$:

$$\Delta \theta^{(i)} = \alpha_T^{(i)} (3 - 4x_i^{-2}) \Delta T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \tag{20}$$

$$\Delta w^{(i)} = (1 - x_i^2) \partial_\gamma \theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3x_i^2 - 4) \partial_\gamma T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \tag{21}$$

при крайових умовах

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\rho, 0, \tau) = 0, \quad \sigma_{\rho\gamma}^{(1)}(\rho, 0, \tau) = 0, \tag{22}$$

умовах на нескінченності

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \theta^{(2)}(\rho, \gamma, \tau) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w^{(2)}(\rho, \gamma, \tau) = 0 \tag{23}$$

і умовах спряження шарів

$$w^{(1)}(\rho, \gamma_1, \tau) = w^{(2)}(\rho, \gamma_1, \tau), \quad u^{(1)}(\rho, \gamma_1, \tau) = u^{(2)}(\rho, \gamma_1, \tau), \tag{24}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\rho, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}(\rho, \gamma_1, \tau), \quad \sigma_{\rho\gamma}^{(1)}(\rho, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\rho\gamma}^{(2)}(\rho, \gamma_1, \tau). \tag{25}$$

Тут $\Delta = \partial_{\rho\rho}^2 + \rho^{-1} \partial_\rho + \partial_{\gamma\gamma}^2$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат; $x_i^2 = (\lambda_i + 2\mu_i)/\mu_i$; $\alpha_T^{(i)}$, λ_i , μ_i – коефіцієнт лінійного температурного розширення і сталі Ляме матеріалу покриття та півпростору відповідно.

До рівнянь (20), (21) та умов (22)–(25) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра та інтегральне перетворення Ганкеля. Внаслідок цього одержимо послідовність крайових задач:

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{\theta}_n^{(i)} = \alpha_T^{(i)} (3 - 4x_i^{-2}) (d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)}), \quad i = 1, 2, \tag{26}$$

$$d_{\gamma}^2 \bar{w}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)} = (1 - \mathbf{x}_i^2) d_{\gamma} \bar{\theta}_n^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3\mathbf{x}_i^2 - 4) d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma, n}^{(1)}(\xi, 0) = 0, \quad \bar{\sigma}_{\rho\gamma, n}^{(1)}(\xi, 0) = 0, \quad (28)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \theta_n^{(2)}(\xi, \gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} w_n^{(2)}(\xi, \gamma) = 0, \quad (29)$$

$$\bar{w}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{w}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1), \quad \bar{u}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{u}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1), \quad (30)$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma, n}^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{\sigma}_{\gamma, n}^{(2)}(\xi, \gamma_1), \quad \bar{\sigma}_{\rho\gamma, n}^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{\sigma}_{\rho\gamma, n}^{(2)}(\xi, \gamma_1). \quad (31)$$

Розв'язок рівняння (26), очевидно, має вигляд

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \alpha_T^{(i)} (3 - 4\mathbf{x}_i^{-2}) \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma). \quad (32)$$

Враховуючи (32), розв'язок рівняння (27) знайдемо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) &= F_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + H_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \frac{\gamma}{2} (1 - \mathbf{x}_i^2) \times \\ &\times [C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma)] + \\ &+ \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} (3 - 4\mathbf{x}_i^{-2}) d_{\gamma} \tilde{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma), \end{aligned} \quad (33)$$

де

$$\tilde{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi, \gamma), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \tilde{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma).$$

Враховуючи умови (29), знайдемо, що

$$D_n^{(2)} = H_n^{(2)} \equiv 0. \quad (34)$$

Для обчислення решти невідомих запишемо крайові умови та умови спряження у термінах ключових функцій [16]:

$$(\mathbf{x}_1^2 - 2)\bar{\theta}_n^{(1)} + 2d_{\gamma} \bar{w}_n^{(1)} - \alpha_T^{(1)} (3\mathbf{x}_1^2 - 4) \bar{T}_n^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0,$$

$$d_{\gamma} \bar{\theta}_n^{(1)} - d_{\gamma}^2 \bar{w}_n^{(1)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0,$$

$$\bar{\theta}_n^{(1)} - d_{\gamma} \bar{w}_n^{(1)} = \bar{\theta}_n^{(2)} - d_{\gamma} \bar{w}_n^{(2)}, \quad \bar{w}_n^{(1)} = \bar{w}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 [(\mathbf{x}_1^2 - 2)\bar{\theta}_n^{(1)} + 2d_{\gamma} \bar{w}_n^{(1)} - \alpha_T^{(1)} (3\mathbf{x}_1^2 - 4) \bar{T}_n^{(1)}] = \\ = (\mathbf{x}_2^2 - 2)\bar{\theta}_n^{(2)} + 2d_{\gamma} \bar{w}_n^{(2)} - \alpha_T^{(2)} (3\mathbf{x}_2^2 - 4) \bar{T}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mu}_1 (d_{\gamma} \bar{\theta}_n^{(1)} - d_{\gamma}^2 \bar{w}_n^{(1)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(1)}) = d_{\gamma} \bar{\theta}_n^{(2)} - d_{\gamma}^2 \bar{w}_n^{(2)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1,$$

тут $\tilde{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2$. Це дає систему алгебричних рівнянь

$$[d_{k, \ell}] \{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, C_n^{(2)}, F_n^{(2)}\}^{\top} = \{f_{n, k}\}, \quad (35)$$

де ненульові елементи матриці $[d_{k, \ell}]$ мають вигляд

$$d_{1,1} = -1, \quad d_{1,2} = -1, \quad d_{1,3} = -2\xi, \quad d_{1,4} = 2\xi,$$

$$d_{2,1} = -\mathbf{x}_1^2, \quad d_{2,2} = \mathbf{x}_1^2, \quad d_{2,3} = -2\xi, \quad d_{2,4} = -2\xi,$$

$$d_{3,1} = \frac{\gamma_1}{2} (1 - \mathbf{x}_1^2) \exp(-\xi\gamma_1), \quad d_{3,2} = \frac{\gamma_1}{2} (1 - \mathbf{x}_1^2) \exp(\xi\gamma_1),$$

$$\begin{aligned}
d_{3,3} &= \exp(-\xi\gamma_1), & d_{3,4} &= \exp(\xi\gamma_1), \\
d_{3,5} &= -\frac{\gamma_1}{2}(1-x_2^2)\exp(-\xi\gamma_1), & d_{3,6} &= -\exp(-\xi\gamma_1), \\
d_{4,1} &= \frac{1}{2}[(1-x_1^2)\xi\gamma_1+x_1^2+1]\exp(-\xi\gamma_1), \\
d_{4,2} &= \frac{1}{2}[(x_1^2-1)\xi\gamma_1+x_1^2+1]\exp(\xi\gamma_1), \\
d_{4,3} &= \xi\exp(-\xi\gamma_1), & d_{4,4} &= -\xi\exp(\xi\gamma_1), \\
d_{4,5} &= -\frac{1}{2}[(1-x_2^2)\xi\gamma_2+x_2^2+1]\exp(-\xi\gamma_1), & d_{4,6} &= -\xi\exp(-\xi\gamma_1), \\
d_{5,1} &= -\tilde{\mu}_1[(1+x_1^2)\xi\gamma_1+1]\exp(-\xi\gamma_1), \\
d_{5,2} &= \tilde{\mu}_1[(1+x_1^2)\xi\gamma_1-1]\exp(\xi\gamma_1), \\
d_{5,3} &= -2\tilde{\mu}_1\xi\exp(-\xi\gamma_1), & d_{5,4} &= 2\tilde{\mu}_1\xi\exp(\xi\gamma_1), \\
d_{5,5} &= [(1+x_2^2)\xi\gamma_1+1]\exp(-\xi\gamma_1), & d_{5,6} &= 2\xi\exp(-\xi\gamma_1), \\
d_{6,1} &= \tilde{\mu}_1[2(x_1^2-1)\xi\gamma_1-x_1^2]\xi\exp(-\xi\gamma_1), \\
d_{6,2} &= \tilde{\mu}_1[2(x_1^2-1)\xi\gamma_1+x_1^2]\xi\exp(\xi\gamma_1), \\
d_{6,3} &= -2\tilde{\mu}_1\xi^2\exp(-\xi\gamma_1), & d_{6,4} &= -2\tilde{\mu}_1\xi^2\exp(\xi\gamma_1), \\
d_{6,5} &= -[2(x_2^2-1)\xi\gamma_1-x_2^2]\xi\exp(-\xi\gamma_1), & d_{6,6} &= 2\xi^2\exp(-\xi\gamma_1).
\end{aligned}$$

Відповідно елементи стовпчика вільних членів мають вигляд

$$\begin{aligned}
f_{n,1} &= -2\frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1}\xi^2\left(3-\frac{4}{x_1^2}\right)\tilde{T}_n^{(1)}(\xi,0), \\
f_{n,2} &= 2\frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1}\xi\left(3-\frac{4}{x_1^2}\right)d_\gamma\tilde{T}_n^{(1)}(\xi,0), \\
f_{n,3} &= \left\{\tilde{\lambda}_T\frac{\alpha_T^{(2)}}{\beta_2}\left(3-\frac{4}{x_2^2}\right)-\frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1}\left(3-\frac{4}{x_1^2}\right)\right\}d_\gamma\tilde{T}_n^{(1)}(\xi,\gamma_1), \\
f_{n,4} &= \xi^2\left\{\frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1}\left(3-\frac{4}{x_1^2}\right)-\frac{\alpha_T^{(2)}}{\beta_2}\left(3-\frac{4}{x_2^2}\right)\right\}\tilde{T}_n^{(1)}(\xi,\gamma_1), \\
f_{n,5} &= 2\xi^2\left\{\frac{\alpha_T^{(2)}}{\beta_2}\left(3-\frac{4}{x_2^2}\right)-\tilde{\mu}_1\frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1}\left(3-\frac{4}{x_1^2}\right)\right\}\tilde{T}_n^{(1)}(\xi,\gamma_1), \\
f_{n,6} &= 2\xi^2\left\{\tilde{\mu}_1\frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1}\left(3-\frac{4}{x_1^2}\right)-\tilde{\lambda}_T\frac{\alpha_T^{(2)}}{\beta_2}\left(3-\frac{4}{x_2^2}\right)\right\}d_\gamma\tilde{T}_n^{(1)}(\xi,\gamma_1).
\end{aligned}$$

Визначивши всі $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $F_n^{(1)}$, $H_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $F_n^{(2)}$ із систем (35), остаточно розв'язок задачі (20)–(25) можемо подати як

$$\theta^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi \rho) d\xi \right] L_n(\lambda \tau),$$

$$w^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi \rho) d\xi \right] L_n(\lambda \tau).$$

Компонента вектора пружного переміщення $u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$ визначається при цьому співвідношенням

$$u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} [\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma)] J_1(\xi \rho) d\xi \right] L_n(\lambda \tau),$$

а ненульові компоненти тензора напружень – за співвідношеннями Дюамеля – Неймана.

5. Числовий аналіз та висновки. За формулою (19) розраховано температурне поле в півпросторі з покриттям у випадку, коли інтенсивність потоку тепла на межі покриття задається співвідношенням

$$q(\rho, \tau) = q^* (1 - \rho^2)^2 (1 - \exp(-\tau_0 \tau)),$$

де q^* – деяка розмірна величина, а τ_0 визначає час виходу теплового навантаження на стаціонарне значення. Тоді

$$\bar{q}_n(\xi) = 8q^* \frac{J_3(\xi)}{\xi^3} \left[\frac{1}{\lambda} \delta_{0n} - \frac{1}{\lambda + \tau_0} \left(\frac{\tau_0}{\lambda + \tau_0} \right)^n \right],$$

де δ_{0n} – символ Кронекера.

Особлива увага в розрахунках була приділена можливості здійснення обчислень для дуже малої відносної товщини покриття – для тіл з нанопокриттям вона, залежно від розмірів ділянки нагрівання, перебуває у межах $10^{-5} \div 10^{-8}$, що поряд зі значними (на декілька порядків) відмінностями фізико-механічних властивостей покриття і основи створює великі проблеми при прямому використанні числових методів. Тут завдяки розробленій методиці вдалося отримати стійкий при реалізації числових процедур розв'язок задачі для довільної відносної товщини покриття.

На рис. 1 подано результати розрахунку залежності від часу знерозміреної температури $T^*(\rho, \gamma, \tau) = T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)/q^*$ при $\tau_0 = 4$, $a_1/a_2 = 0.1$ на поверхні поділу матеріалів покриття і півпростору в точці $\rho = 0$ при різних значеннях відносної товщини покриття γ_1 і відносного коефіцієнта теплопровідності. Як бачимо, температура поверхні поділу матеріалів майже прямо пропорційна до величини λ_1/λ_2 . Вплив товщини покриття на температурне поле істотно залежить від відносного коефіцієнта теплопровідності покриття: у випадку теплоізолюючого покриття ($\lambda_1/\lambda_2 = 0.1$) цей вплив практично непомітний, а для теплопровідного покриття – є значним. Відносна товщина покриття впливає як на абсолютне значення температури, так і на час її виходу на стаціонарне значення.

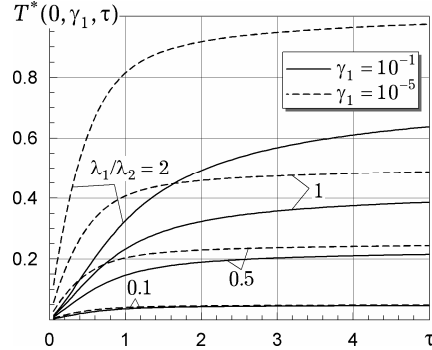


Рис. 1

За знайденим температурним полем розраховано напружений стан у півпросторі з покриттям при $\lambda_1/\lambda_2 = 0.1$, $\alpha_1 = 0.28$, $\alpha_2 = 0.39$, $\tilde{\alpha}_T^{(1)} = 10^{-6}$, $\tilde{\alpha}_T^{(2)} = 5 \cdot 10^{-6}$ ($\tilde{\alpha}_T^{(i)} = q^* \alpha_T^{(i)}/R$). Напруження були знерозмірені з використанням коефіцієнта Ляме півпростору: $\sigma_{k\ell}(\rho, \gamma, \tau) = \sigma_{k\ell}^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)/\mu_2$.

На рис 2 подано результати розрахунку дотичних напружень уздовж поверхні $\rho = 0.5$ в момент часу $\tau = 1$ для випадку $\mu_1/\mu_2 = 10$, а на рис. 3 – для випадку $\mu_1/\mu_2 = 10^4$. Бачимо, що відносна товщина покриття γ_1 при таких значеннях відношення μ_1/μ_2 істотно впливає як на кількісну, так і на якісну картину залежності дотичних напружень від змінної γ . Для випадку $\mu_1/\mu_2 = 10$ та не дуже малих значень відносної товщини покриття дотичні напруження набувають свого максимального абсолютного значення в покритті ($\gamma_1 = 0.5$) чи півпросторі ($\gamma_1 = 0.1$) та змінюють свій знак. Зі зменшенням відносної товщини покриття дотичні напруження перестають змінювати свій знак та стають найбільшими за абсолютною величиною спочатку на межі поділу матеріалів покриття та півпростору, потім (при $\gamma_1 \leq 10^{-3}$) – знову в масиві. Величину відносної товщини покриття для випадку $\mu_1/\mu_2 = 10$ достатньо враховувати до $\gamma_1 = 10^{-4}$ – далі результати практично не відрізняються, наявність покриття нівелюється, і числові результати якісно виходять на результати відповідної задачі для півпростору з вільною межею.

У випадку $\mu_1/\mu_2 = 10^4$ значна відмінність модуля пружності покриття призводить як до збільшення рівня напружень, так і до зміни картини їх розподілу з глибиною – максимального значення напруження досягають на межі поділу матеріалів, а відмінність між ними зберігається для ширшого діапазону зміни відносної товщини покриття γ_1 .

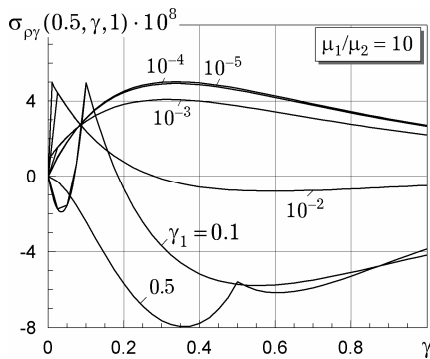


Рис. 2

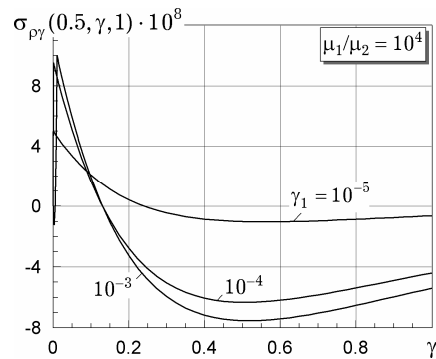


Рис. 3

На рис. 4 показано зміну в часі (для моментів $\tau = 0.1, 0.5, 1.0, 5.0, 7.0$) дотичних напружень на межі поділу матеріалів при $\gamma_1 = 10^{-3}$, $\mu_1/\mu_2 = 10^3$. Видно, що максимального значення впродовж всього перехідного процесу ці напруження набувають поблизу лінії $\rho = 0.75$. До моменту часу $\tau = 1$ найбільша інтенсивність збільшення в часі дотичних напружень спостерігається безпосередньо під плямою нагріву, а після моменту часу $\tau = 1$ напруження інтенсивніше зростають в областях поза нею.

Для тих самих геометричних співвідношень було обчислено також і радіальні напруження на межі поділу матеріалів в різні моменти часу (рис. 5). Максимального значення ці напруження досягають у центрі плями нагріву і воно майже на три порядки перевищує максимальне значення дотичних напружень. Зовні плями нагріву радіальні напруження під час перехідного періоду змінюють свій знак і стають скрізь розтягувальними вже після виходу на стаціонарний режим.

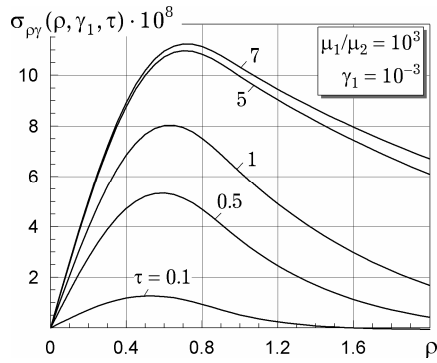


Рис. 4

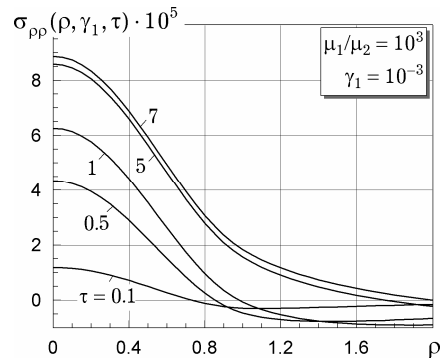


Рис. 5

На рис. 6 відображено розподіл радіальних напружень у центрі плями нагріву по товщині покриття при $\gamma_1 = 10^{-2}$, $\tau = 1$ і значеннях відношення $\mu_1/\mu_2 = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$. При цьому, щоб уникнути зростання знерозміреного напруження внаслідок впливу зміни модуля пружності, для знерозмірення використовуємо μ_1 . Як бачимо, радіальні напруження в покритті є стискувальними і зі збільшенням відношення μ_1/μ_2 практично перестають змінюватись по товщині; їх абсолютне значення спочатку зменшується, а потім збільшується, досягаючи максимуму при $\mu_1/\mu_2 = 10^5$. Як свідчать результати інших обчислень, цей максимум збільшується зі зменшенням відносної товщини покриття.

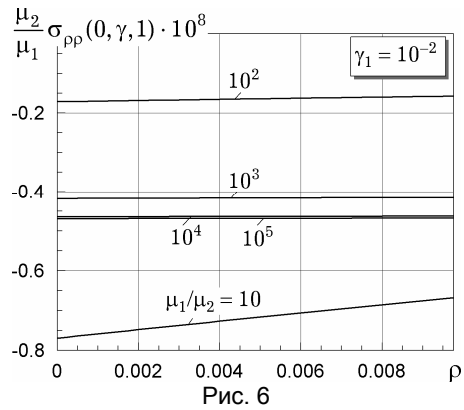


Рис. 6

Таким чином, у цій праці з використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Ганкеля за радіальною змінною одержано розв'язок квазістатичної задачі термопружності для півпростору з покриттям із іншого матеріалу, що нагрівається осесиметрично розподіленним на поверхні покриття тепловим потоком, причому процедура числової реалізації побудованого розв'язку зберігає свою стійкість та ефективність за довільно малих значень товщини покриття і довільних значень фізико-механічних параметрів складових матеріалів.

Здійснено числовий аналіз задачі для різних значень відносної товщини покриття, відношення теплових та механічних характеристик матеріалів півпростору та покриття. Виявлено, що запропонований метод дає змогу аналізувати термонапружений стан тіл з довільними типами однорідних покриттів, у тому числі і з нанопокриттями.

1. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева–Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
2. Галазюк О. В., Турчин І. М. Квазістатична плоска неосесиметрична задача термопружності радіально-шаруватого циліндричного тіла // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2007. – Вип. 11, т. 2 (№ 2/2). – С. 58–65.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
5. Процюк Б. В. Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоскопаралельними границями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 103–112.

6. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
Te same: *Sneddon I.* Fourier transforms. – New York: McGraw-Hill, 1951.
7. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.* – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
Te same: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Editors M. Abramowitz, I. A. Stegun.* – New York: Dover, 1972.
8. *Суллим Г.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. *Турчин О., Турчин І.* Нестационарное осесимметричное температурное поле в шароватому півпросторі, зумовлене імпульсним нагрівом // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 256–261.
10. *Belghazi H., El Ganaoui M., Labbe J. C.* Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source // *Int. J. Therm. Sci.* – 2010. – **49**, No. 2. – P. 311–318.
11. *Kushnir R. M.* Generalized conjugation problems in mechanics of piecewise-homogeneous elements of constructions // *Z. angew. Math. Mech.* – 1996. – **76**, No. S5. – P. 283–284.
12. *Kushnir R. M.* Thermal stresses – Advanced theory and applications // *J. Therm. Stresses.* – 2010. – **33**, No. 1. – P. 76–78.
13. *Sugano Y.* An expression for transient thermal stress in a nonhomogeneous plate with temperature variation through thickness // *Ing. Arch.* – 1987. – **57**. – P. 147–156.
14. *Tanigawa Y.* Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials // *Appl. Mech. Rev.* – 1995. – **48**, No. 6. – P. 287–300.
15. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *J. Therm. Stresses.* – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.
16. *Timar I., Turcsin I., Szulim G., Scsukin V.* Quasistatic thermal elastic task for layer elastic half-space system with local pulsed heating // *ГЭП.* – 2007. – **58**, No. 12. – P. 39–42.
17. *Wang B. L., Han J. C., Du S. Y.* Thermoelastic fracture mechanics for nonhomogeneous material subjected to unsteady thermal load // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2000. – **67**, No. 1. – P. 87–95.
18. *Yangjian X., Daihui T., Haiyang D.* Convective heat transfer steady heat conduction and thermal stress in a ceramic/FGM/metal composite EFBF plate // *J. Softw.* – 2011. – **6**, No. 2. – P. 201–208.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПОКРЫТИЕМ

С использованием интегральных преобразований Лагерра и Ханкеля построено решение осесимметричной квазистатической задачи термоупругости для полупространства с покрытием. Приведены результаты численного анализа термонапряженного состояния в зависимости от относительных геометрических и термо-механических свойств покрытия и полупространства. Выявлена возможность применения предложенного метода к анализу влияния нанопокровтий.

AXISYMMETRIC QUASI-STATIC THERMAL STRESS STATE IN A HALF-SPACE WITH COATING

Using the Laguerre and Hankel integral transforms the solution of axisymmetric quasi-static thermoelasticity problem for a half-space with coating is constructed. The results of numerical analysis of thermal stress state depending on the relative geometric and thermo-mechanical properties of the coating and half-space are presented. The possibility of applying the proposed method to analyze the effect of nanocoatings is revealed.

¹ Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів,
² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів