

ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ БЕРЕГІВ ДВОХ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН РІЗНИХ ДОВЖИН В РАМКАХ МОДЕЛІ ЛЕОНОВА – ПАНАСЮКА

У межах моделі Леонова – Панасюка досліджено напружено-деформований стан нескінченного ізотропного пружного тіла з двома колінеарними тріщинами різної довжини за умов прикладеного на нескінченності розтягувального зусилля, перпендикулярного до лінії тріщин. Отримано аналітичну форму рівнянь для визначення розкриття тріщин, наведено приклади результатів обчислень розкриття для різних випадків співвідношення довжин тріщин та їх взаємного розташування.

Вступ. У роботах [1, 2] було розв'язано задачу теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану пластини з двома тріщинами однакової довжини з зонами передруйнування, а в роботах [3, 4] на цій основі розв'язано задачі щодо визначення кінетики розвитку двох тріщин у в'язкопружному тілі. Вивченню напружено-деформованого стану тіла, послабленого системою двох колінеарних тріщин різної довжини, в рамках моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла присвячено роботи [6, 7].

У цій роботі на основі розв'язку задачі для площини з прямолінійними розрізами, отриманого в [5], запропоновано підхід до розв'язання таких задач у випадку прикладання зусиль на невеликих частинах контурів. Цей підхід базується на поданні загального розв'язку однорідної задачі лінійного спряження поліномами на відрізках, що відповідають зонам прикладання зусиль. Виходячи із зазначеного подання, інтеграли в сенсі головного значення, що фігурують у розв'язку задачі лінійного спряження, зведено до інтегралів, що легко обчислюються чисельно.

Постановка задачі. Нехай у нескінченному пружному тілі уздовж прямої розташована система двох тріщин різної довжини. До тіла прикладено рівномірно розподілене на нескінченності розтягувальне зусилля p , напрям якого збігається з напрямком нормалі до лінії розташування тріщин. Введемо ортогональну декартову систему координат, вісь x якої спрямуємо уздовж лінії тріщин (рис. 1).

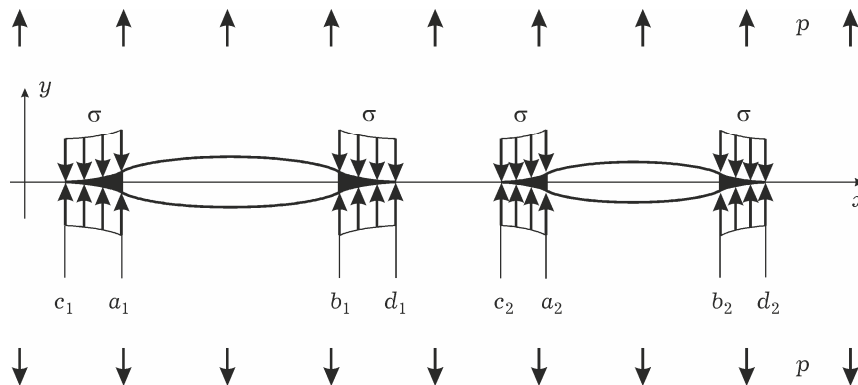


Рис. 1

Відповідно до моделі Леонова – Панасюка області нелінійної поведінки матеріалу в околі вершин тріщин можна замінити розрізами, до берегів яких прикладені стискувальні напруження інтенсивності σ . Відповідне позначення наведено на рис. 1. Таким чином, приходимо до задачі теорії пружності про розтяг пружної пластинки з розрізами вздовж відрізків (c_k, d_k) при наступних контурних умовах:

$$\tau_{xy}(t) = 0, \quad t \in L, \quad \sigma_y(t) = \begin{cases} 0, & t \in L', \\ \sigma, & t \in L'', \end{cases}$$

де

$$L = \bigcup_{k=1}^2 L_k, \quad L_k = (c_k, d_k), \quad L' = \bigcup_{k=1}^2 (a_k, b_k), \quad L'' = L - L'.$$

Кінці розрізів c_k і d_k треба визначати так, щоб у відповідних точках виконувалася умова скінченності напружень.

Загальний розв'язок задачі для площини з прямолінійними розрізами при нормальному до лінії тріщини напрямі прикладання зовнішнього навантаження в роботі [5] дається двома комплексними функціями $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{P_2(z)}{X(z)} - \frac{p}{4}, \quad \Omega(z) = \Phi(z) + \frac{p}{2}, \quad (1)$$

де

$$\Phi_0(z) = \sigma \frac{F(z)}{X(z)}, \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} \frac{X^+(t)}{t-z} dt,$$

$$X(z) = \prod_{k=1}^2 (z - c_k)^{1/2} (z - d_k)^{1/2},$$

$$P_2(z) = C_0 z^2 + C_1 z + C_2, \quad C_0 = \frac{p}{2}.$$

Коефіцієнти C_1 , C_2 визначаються з умови однозначності переміщень

$$2 \int_{L_k} \frac{C_0 t^2 + C_1 t + C_2}{X^+(t)} dt + \int_{L_k} [\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)] dt = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Переміщення у пружному тілі:

$$2\mu(u + iv) = \alpha\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)}, \quad (3)$$

де для випадку плоского напруженого стану $\alpha = (\lambda^* + 3\mu)/(\lambda^* + \mu)$; λ^* та μ – параметри Ляме матеріалу пластини,

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz, \quad \varphi(z) = \int \Phi(z) dz.$$

На краях розрізів

$$X^+(t) = (-1)^{2-k} i \hat{X}(t), \quad t \in L_k, \quad k = 1, 2,$$

$$\hat{X}(t) = \sqrt{\prod_{k=1}^2 (t - c_k)(t - d_k)}. \quad (4)$$

Використовуючи формули Сохоцького – Племеля, отримуємо

$$\Phi_0^\pm(t) = \frac{\sigma}{2} g(t) + \sigma_1 \frac{G(t)}{X^+(t)}, \quad (5)$$

де

$$\sigma_1 = \sigma/2\pi, \quad g(t) = \begin{cases} 1, & t \in L'', \\ 0, & t \in L', \end{cases} \quad G(t) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{2-k} \int_{L_k} \frac{\hat{X}(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (6)$$

Тоді

$$\begin{aligned}\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t) &= 2\sigma_1 \frac{G(t)}{X^+(t)}, \\ \int_{L_k} [\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)] dt &= \frac{2\sigma_1 J_k}{(-1)^{2-k} i}, \\ J_k &= \int_{L_k} \frac{G(t)}{\hat{X}(t)} dt.\end{aligned}\quad (7)$$

Перепишемо (6) у вигляді

$$G(t) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{2-k} [F_{c_k}(t) + F_{d_k}(t)],$$

де

$$F_{c_k}(t) = \int_{c_k}^{a_k} \frac{\hat{X}(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad F_{d_k}(t) = \int_{b_k}^{d_k} \frac{\hat{X}(\tau)}{\tau - t} d\tau.\quad (8)$$

Функцію в чисельнику підінтегральних виразів у (8) в околі кінців розрізів c_k , d_k можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\hat{X}(y) &= \sqrt{y \sum_{i=0}^3 q_{(c_k)_i} y^i}, & y = t - c_k, \\ \hat{X}(y) &= \sqrt{y \sum_{i=0}^3 q_{(d_k)_i} y^i}, & y = d_k - t.\end{aligned}\quad (9)$$

Через складнощі, які виникають при аналітичному визначенні інтегралів $F_{c_k}(t)$, $F_{d_k}(t)$, подамо функцію \hat{X} поліномом на кожному з відрізків $(0, y'_{c_k})$, $(0, y'_{d_k})$, де

$$y'_{c_k} = \alpha y_{c_k}, \quad y_{c_k} = a_k - c_k, \quad y'_{d_k} = \alpha y_{d_k}, \quad y_{d_k} = d_k - b_k,$$

а параметр α трохи більший від одиниці. Так, на відрізках $(0, y_{c_k})$ і $(0, y_{d_k})$ відповідно отримаємо

$$\begin{aligned}\hat{X}(y) &\approx \sqrt{y} \sum_{m=0}^{n_{c_k}} g_{(c_k)_m} (y/y'_{c_k})^m, \\ \hat{X}(y) &\approx \sqrt{y} \sum_{m=0}^{n_{d_k}} g_{(d_k)_m} (y/y'_{d_k})^m,\end{aligned}\quad (10)$$

де n визначається точністю подання.

Провівши в інтегралах (8) заміни відповідно $\tau = c_k + y_{c_k} x^2$ і $\tau = d_k - y_{d_k} x^2$, отримаємо

$$\begin{aligned}F_{c_k}(t) &\approx \int_0^1 \frac{\sqrt{y_{c_k}} x \sum g_{(c_k)_m} (y_{c_k} x^2 / y'_{c_k})^m}{y_{c_k} x^2 - (t - c_k)} 2y_{c_k} x dx, \\ F_{d_k}(t) &\approx \int_0^1 \frac{\sqrt{y_{d_k}} x \sum g_{(d_k)_m} (y_{d_k} x^2 / y'_{d_k})^m}{d_k - t - y_{d_k} x^2} 2y_{d_k} x dx\end{aligned}\quad (11)$$

або

$$F_{c_k}(\delta_{c_k}) \approx 2\sqrt{y_{c_k}} \int_0^1 \sum_{m=0}^{n_{c_k}} h_{(c_k)m} \frac{x^{2m+2}}{x^2 - \delta_{c_k}} dx,$$

$$F_{d_k}(\delta_{d_k}) \approx -2\sqrt{y_{d_k}} \int_0^1 \sum_{m=0}^{n_{d_k}} h_{(d_k)m} \frac{x^{2m+2}}{x^2 - \delta_{d_k}} dx, \quad (12)$$

де

$$h_{(c_k)m} = g_{(c_k)m} \left(\frac{y_{c_k}}{y'_{c_k}} \right)^m = \frac{g_{(c_k)m}}{x^m}, \quad \delta_{c_k} = \frac{t - c_k}{y_{c_k}},$$

$$h_{(d_k)m} = g_{(d_k)m} \left(\frac{y_{d_k}}{y'_{d_k}} \right)^m = \frac{g_{(d_k)m}}{x^m}, \quad \delta_{d_k} = \frac{d_k - t}{y_{d_k}}. \quad (13)$$

Після почленного інтегрування одержимо

$$F_{c_k}(\delta) \approx 2\sqrt{y_{c_k}} \sum_{m=0}^n h_m \zeta_m(\delta), \quad \delta = \frac{t - c_k}{y_{c_k}},$$

$$F_{d_k}(\delta) \approx -2\sqrt{y_{d_k}} \sum_{m=0}^n h_m \zeta_m(\delta), \quad \delta = \frac{d_k - t}{y_{d_k}}, \quad (14)$$

де

$$\zeta_m(\delta) = \int_0^1 \frac{x^{2m+2}}{x^2 - \delta} dx.$$

Як бачимо, форми подань F_{c_k} і F_{d_k} відрізняються лише знаком. Будемо іноді опускали позначки (c_k) і (d_k) біля коефіцієнтів h , g та інших (як у співвідношеннях (14)); про існування цих позначок сигналізуватиме індекс відповідних функцій.

При $|\delta| > 1$ маємо

$$\zeta_m(\delta) = -\delta^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta^{-j}}{2(m+j+1)+1}.$$

При $|\delta| < 1$ можна скористатися рекурентною формулою

$$\zeta_m(\delta) = \frac{1}{2m+1} + \delta \zeta_{m-1}(\delta), \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

де

$$\delta \zeta_{-1}(\delta) = \delta \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - \delta} = \sqrt{|\delta|} \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}}, & \delta \geq 0, \\ -\arctg \frac{1}{\sqrt{-\delta}}, & \delta < 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\zeta_m(\delta) = \sum_{j=0}^m \frac{\delta^j}{2(m-j)+1} + \delta^{m+1} \zeta_{-1}(\delta)$$

і

$$\sum_{m=0}^n h_m \zeta_m(\delta) = V(\delta) + \delta \zeta_{-1}(\delta) H(\delta),$$

де

$$V(\delta) = \sum_{m=0}^n v_m \delta^m, \quad H(\delta) = \sum_{m=0}^n h_m \delta^m, \quad v_m = \sum_{j=m}^n \frac{h_j}{2(j-m)+1}.$$

Таким чином, для заданих параметрів моделі c_k , a_k , b_k і d_k , $k = 1, 2$, отримуємо такі подання функцій $F_{c_k}(t)$ і $F_{d_k}(t)$ для $c_k \leq t \leq a'_k$ і $b'_k \leq t \leq d_k$ відповідно:

$$\begin{aligned} F_{c_k}(\delta) &\approx 2\sqrt{y_{c_k}} [V_{c_k}(\delta) + \delta\zeta_{-1}(\delta)H_{c_k}(\delta)], & \delta &= (t - c_k)/y_{c_k}, \\ F_{d_k}(\delta) &\approx -2\sqrt{y_{d_k}} [V_{d_k}(\delta) + \delta\zeta_{-1}(\delta)H_{d_k}(\delta)], & \delta &= (d_k - t)/y_{d_k}, \end{aligned} \quad (15)$$

кожне з яких задається своїм набором коефіцієнтів $h_{(c_k)_m}$, $v_{(c_k)_m}$, $m = 0, 1, \dots, n_{c_k}$, для поліномів H_{c_k} та V_{c_k} відповідно, $h_{(d_k)_m}$, $v_{(d_k)_m}$, $m = 0, 1, \dots, \dots, n_{d_k}$, для поліномів H_{d_k} і V_{d_k} відповідно.

Перейдемо до обчислення величин J_k , $k = 1, 2$, у виразах (7). Для цього розділимо інтервал інтегрування на три частини: $(c_k, d_k) = (c_k, a'_k) \cup \cup(a'_k, b'_k) \cup (b'_k, d_k)$ і запишемо J_k як суму трьох інтегралів по цих проміжках:

$$J_k = \int_{c_k}^{d_k} \frac{G(t)}{\hat{X}(t)} dt = I_{c_k} + I_{a_k} + I_{d_k}. \quad (16)$$

З чотирьох функцій $F_{c_k}(\delta_{c_k})$, $F_{d_k}(\delta_{d_k})$ на інтервалі (c_ℓ, a_ℓ) має неінтегровну особливість функція $F_{c_\ell}(\delta_{c_\ell})$, а на інтервалі (b_ℓ, d_ℓ) – функція $F_{d_\ell}(\delta_{d_\ell})$. Покажемо, як обчислити інтеграл в сенсі головного значення на прикладі інтервалу (c_2, a'_2) :

$$I_{c_2} = \int_{c_2}^{a'_2} \frac{F_{c_2} \left[\frac{t-c_2}{y_{c_2}} \right]}{\hat{X}(t)} dt + \int_{c_2}^{a'_2} \frac{-F_{c_1} \left[\frac{t-c_1}{y_{c_1}} \right] - F_{d_1} \left[\frac{d_1-t}{y_{d_1}} \right] + F_{d_2} \left[\frac{d_2-t}{y_{d_2}} \right]}{\hat{X}(t)} dt. \quad (17)$$

Проведемо в (17) заміну $t = c_2 + y_{c_2} x^2$. З (10) і (13) отримаємо

$$\hat{X}(t) = \sqrt{y_{c_2}} x H_{c_2}(x^2). \quad (18)$$

Використовуючи (15) і (16), запишемо

$$I_{c_2} = 4y_{c_2} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{V_{c_2}(x^2) + x^2 \zeta_{-1}(x^2) H_{c_2}(x^2)}{H_{c_2}(x^2)} dx + 2\sqrt{y_{c_2}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{B_{c_2}(x^2)}{H_{c_2}(x^2)} dx,$$

де

$$\begin{aligned} B_{c_2}(x^2) &= F_{d_1} \left[\frac{c_2 - c_1 + y_{c_2} x^2}{y_{c_1}} \right] - F_{c_2} \left[\frac{d_1 - c_2 - y_{c_2} x^2}{y_{d_1}} \right] + \\ &+ F_{d_2} \left[\frac{d_2 - c_2 - y_{c_2} x^2}{y_{d_2}} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Підінтегральна функція у другому інтегралі для I_{c_2} не має особливостей в області інтегрування, а перший інтеграл знаходимо у вигляді

$$4 \int_0^{\sqrt{x}} \left[\frac{V_{c_2}(x^2)}{H_{c_2}(x^2)} + \frac{x}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right] dx = 4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{V_{c_2}(x^2)}{H_{c_2}(x^2)} dx + x_0,$$

де

$$x_0 = (x-1) \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x}.$$

При визначенні переміщень берегів тріщини в її фізичних кінцях знадобиться останній інтеграл при $x=1$ (при цьому значенні x параметр $x_0 = -2$).

Отже, тепер

$$I_{c_2} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{4y_{c_2} V_{c_2}(x^2) + 2\sqrt{y_{c_2}} B_{c_2}(x^2)}{H_{c_2}(x^2)} dx + y_{c_2} x_0,$$

де підінтегральна функція особливостей не має.

Позначимо

$$I_{k,m} = \int_{c_k}^{d_k} \frac{t^m dt}{\hat{X}(t)}. \quad (20)$$

Обчислимо ці інтеграли за відпрацьованою схемою:

$$\begin{aligned} I_{k,m} &= \int_{c_k}^{a_k} \frac{t^m dt}{\hat{X}(t)} + \int_{a_k}^{b_k} \frac{t^m dt}{\hat{X}(t)} + \int_{b_k}^{d_k} \frac{t^m dt}{\hat{X}(t)} = 2\sqrt{y_{c_k}} \int_0^1 \frac{(c_k + y_{c_k} x^2)^m}{H_{c_k}(x^2)} dx + \\ &+ \int_{a_k}^{b_k} \frac{t^m dt}{\hat{X}(t)} + 2\sqrt{y_{d_k}} \int_0^1 \frac{(d_k - y_{d_k} x^2)^m}{H_{d_k}(x^2)} dx. \end{aligned}$$

Близькі тріщини. Обчислимо коефіцієнти J_k і $I_{k,m}$ для випадку, коли внутрішні границі розрізів розташовані достатньо близько. У цьому випадку коефіцієнти $q_{(d_1)_1}$ і $q_{(c_2)_1}$ у наближенні (9) значно зростають, що призводить до збільшення відповідно n_{d_1} і n_{c_2} у виразах (10).

Перепишемо вирази (9) у вигляді

$$\hat{X}(y) = \sqrt{y(y+c_2-d_1) \sum_{i=0}^2 q_{(c_2)_i} y^i}, \quad \hat{X}(y) = \sqrt{y(c_2-d_1-y) \sum_{i=0}^2 q_{(d_1)_i} y^i}. \quad (21)$$

Вирази (10) для подання функції $\hat{X}(t)$ в околі точок d_1 і c_2 набувають вигляду

$$\begin{aligned} \hat{X}(y) &\approx \sqrt{y(y+c_2-d_1)} \sum_{m=0}^{n_{c_2}} g_{(c_2)_m} (y/y'_{c_2})^m, \\ \hat{X}(y) &\approx \sqrt{y(y+c_2-d_1)} \sum_{m=0}^{n_{d_1}} g_{(d_1)_m} (y/y'_{d_1})^m. \end{aligned} \quad (22)$$

Далі

$$\begin{aligned} F_{c_2}(t) &\approx \int_0^1 \frac{\sqrt{y_{c_2}} x \sqrt{y_{c_2} x^2 + c_2 - d_1} \sum g_{(c_2)_m} (y_{c_2} x^2 / y'_{c_2})^m}{y_{c_2} x^2 - (t - c_2)} 2y_{c_2} x dx, \\ F_{d_1}(t) &\approx \int_0^1 \frac{\sqrt{y_{d_1}} x \sqrt{y_{d_1} x^2 + c_2 - d_1} \sum g_{(d_1)_m} (y_{d_1} x^2 / y'_{d_1})^m}{d_k - t - y_{d_1} x^2} 2y_{d_1} x dx. \end{aligned}$$

Вирази (12) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
 F_{c_2}(\delta_{c_2}) &\approx 2y_{c_2} \int_0^1 \sum_{m=0}^{n_{c_2}} h_{(c_2)m} \frac{\sqrt{x^2 + \varepsilon_{c_2}}}{x^2 - \delta_{c_2}} x^{2m+2} dx, \\
 F_{d_1}(\delta_{d_1}) &\approx -2y_{d_1} \int_0^1 \sum_{m=0}^{n_{d_1}} h_{(d_1)m} \frac{\sqrt{x^2 + \varepsilon_{d_1}}}{x^2 - \delta_{d_1}} x^{2m+2} dx,
 \end{aligned} \tag{23}$$

де $h_{(c_2)m}$ і $h_{(d_1)m}$ визначаються згідно з (13), а

$$\varepsilon_{c_2} = \frac{c_2 - d_1}{y_{c_2}}, \quad \varepsilon_{d_1} = \frac{c_2 - d_1}{y_{d_1}}.$$

Після почленного інтегрування в (23) отримуємо

$$\begin{aligned}
 F_{c_2}(\delta) &\approx 2y_{c_2} \sum_{m=0}^n h_m \zeta_m(\delta), \quad \delta = \frac{t - c_2}{y_{c_2}}, \\
 F_{d_1}(\delta) &\approx -2y_{d_1} \sum_{m=0}^n h_m \zeta_m(\delta), \quad \delta = \frac{d_1 - t}{y_{d_1}},
 \end{aligned} \tag{24}$$

де

$$\zeta_m(\delta) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + \varepsilon}}{x^2 - \delta} x^{2m+2} dx.$$

При $|\delta| > 1$ маємо

$$\begin{aligned}
 \zeta_m(\delta) &= -\delta^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{m+j+1} \delta^{-j}, \\
 \eta_m &= \int_0^1 \sqrt{x^2 + \varepsilon} x^{2m} dx = \frac{1}{2(m+1)} (\varepsilon Y_{m+1} + \sqrt{1 + \varepsilon}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\
 Y_1 &= \ln \frac{\sqrt{1 + \varepsilon} + 1}{\sqrt{\varepsilon}}, \\
 Y_{m+1} &= \frac{1}{2m} (-2m - 1) \varepsilon Y_m + \sqrt{1 + \varepsilon}, \quad m = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

При $|\delta| < 1$ використаємо рекурентну формулу

$$\zeta_m(\delta) = \eta_m + \delta \zeta_{m-1}(\delta), \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

де

$$\zeta_{-1}(\delta) = \begin{cases} Y_1 + \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + \varepsilon} - \gamma}{\sqrt{1 + \varepsilon} + \gamma}, & \gamma^2 = 1 + \frac{\varepsilon}{\delta} > 0, \\ Y_1 + \gamma \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \varepsilon}}, & \gamma^2 = -1 - \frac{\varepsilon}{\delta} > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\zeta_m(\delta) = \sum_{j=0}^m \eta_{m-j} \delta^j + \delta^{m+1} \zeta_{-1}(\delta)$$

і

$$\sum_{m=0}^n h_m \zeta_m(\delta) = V(\delta) + \delta \zeta_{-1}(\delta) H(\delta),$$

де

$$V(\delta) = \sum_{m=0}^n v_m \delta^m, \quad H(\delta) = \sum_{m=0}^n h_m \delta^m, \quad v_m = \sum_{j=m}^n h_j \eta_{j-m}.$$

Таким чином, отримали подання функцій $F_{c_k}(t)$ і $F_{d_k}(t)$ для $c_k \leq t \leq a'_k$ і $b'_k \leq t \leq d_k$ відповідно, аналогічні виразам (15) для віддалених тріщин:

$$\begin{aligned} F_{c_k}(\delta) &\approx 2y_{c_k} [V_{c_k}(\delta) + \delta \zeta_{-1}(\delta) H_{c_k}(\delta)], & \delta &= (t - c_k)/y_{c_k}, \\ F_{d_k}(\delta) &\approx -2y_{d_k} [V_{d_k}(\delta) + \delta \zeta_{-1}(\delta) H_{d_k}(\delta)], & \delta &= (d_k - t)/y_{d_k}, \end{aligned} \quad (25)$$

причому, як і раніше, кожне з цих подань задається своїм набором коефіцієнтів $h_{(c_k)m}$, $v_{(c_k)m}$, $m = 0, 1, \dots, n_{c_k}$, для поліномів H_{c_k} і V_{c_k} відповідно і $h_{(d_k)m}$, $v_{(d_k)m}$, $m = 0, 1, \dots, n_{d_k}$, для поліномів H_{d_k} і V_{d_k} відповідно.

Перейдемо до визначення величин J_k , $k = 1, 2$, означених (16). Як і раніше, з чотирьох функцій $F_{c_k}(\delta_{c_k})$, $F_{d_k}(\delta_{d_k})$ на інтервалі (c_ℓ, a'_ℓ) має неінтегровну особливість функція $F_{c_\ell}(\delta_{c_\ell})$, а на інтервалі (b'_ℓ, d_ℓ) – функція $F_{d_\ell}(\delta_{d_\ell})$. Покажемо, як обчислити інтеграл в сенсі головного значення на прикладі інтервалу (c_2, a_2) , як робили вже це для випадку віддалених тріщин. Для цього проведемо в (17) заміну $t = c_2 + y_{c_2} x^2$. З (22) і (25) отримаємо

$$\hat{X}(t) = \sqrt{y_{c_2}} x \sqrt{y_{c_2} x^2 + c_2 - d_1} H_{c_2}(x^2). \quad (26)$$

Використовуючи (25), запишемо

$$I_{c_2} = 4y_{c_2} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{V_{c_2}(x^2) + x^2 \zeta_{-1}(x^2) H_{c_2}(x^2)}{\sqrt{x^2 + \varepsilon_{c_2}} H_{c_2}(x^2)} dx + 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{B_{c_2}(x^2)}{H_{c_2}(x^2)} dx,$$

де $B(x^2)$ визначено рівністю (19), а

$$\begin{aligned} x_0(x, \varepsilon) &= 4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{x^2 \zeta_{-1}(x^2)}{\sqrt{x^2 + \varepsilon_{c_2}}} dx = 2 \left(Y_1 \sqrt{x(x + \varepsilon)} - \varepsilon_b \ln \frac{\sqrt{x + \varepsilon} + \sqrt{x}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + \\ &+ x \ln \frac{\sqrt{x(1 + \varepsilon)} - \sqrt{x + \varepsilon}}{\sqrt{x(1 + \varepsilon)} + \sqrt{x + \varepsilon}}. \end{aligned}$$

При визначенні переміщень берегів тріщини в її фізичних кінцях нам знадобиться останній інтеграл при $x = 1$ (при цьому значенні x параметр $x_0(1, \varepsilon) = -2Y_1^2 \varepsilon$).

Отже, остаточно маємо

$$I_{c_2} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{4y_{c_2} V_{c_2}(x^2) + 2B_{c_2}(x^2)}{\sqrt{x^2 + \varepsilon_{c_2}} H_{c_2}(x^2)} dx + y_{c_2} x_0(x, \varepsilon),$$

і підінтегральна функція не має особливостей.

Коефіцієнти $I_{k,m}$ обчислюємо згідно з (20) та (26):

$$I_{k,m} = 2 \int_0^1 \frac{(c_k + y_{c_k} x^2)^m}{\sqrt{x^2 + \varepsilon_{c_k}} H_{c_k}(x^2)} dx + \int_{a_k}^{b_k} \frac{t^m dt}{\hat{X}(t)} + 2 \int_0^1 \frac{(d_k - y_{d_k} x^2)^m}{\sqrt{x^2 + \varepsilon_{d_k}} H_{d_k}(x^2)} dx.$$

Визначення довжин зон передруйнування та вертикального переміщення берегів розрізів. Умова однозначності переміщень (2) у введених позначеннях набуває вигляду системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$I_{1,1}C_1 + I_{1,0}C_2 = -\sigma_1 J_1 - I_{1,2}C_0,$$

$$I_{2,1}C_1 + I_{2,0}C_2 = -\sigma_1 J_2 - I_{2,2}C_0,$$

яка дозволяє визначити коефіцієнти C_1, C_2 . Зазначимо, що в цій системі

$$I_{2,0} = I_{1,0}, \quad I_{2,1} = I_{1,1} + \pi, \quad I_{2,2} = I_{1,2} + \frac{\pi}{2}(c_1 + d_1 + c_2 + d_2).$$

Таким чином, функцію $\Phi(z)$ знайдено:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma F(z) + P_2(z)}{X(z)} - \frac{p}{4}.$$

Згідно з (5),

$$\Phi^\pm(t) = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma_1 G(t) + P_2(t)}{X^\pm(t)} - \frac{p}{4}, \quad (27)$$

де функція $G(t)$ визначена у (6) і є функцією лише геометричних параметрів.

Границі c_1, d_1, c_2, d_2 розрізів знайдемо з умови скінченності функції Φ у цих точках:

$$\sigma_1 G(c_k) + P_2(c_k) = 0,$$

$$\sigma_1 G(d_k) + P_2(d_k) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Маємо систему чотирьох нелінійних рівнянь. Коефіцієнти C_1, C_2 полінома $P_2(t)$ разом зі значеннями функції G у точках $z = c_k, \tau = d_k$ слід розглядати як функції координат границь розрізів c_k, d_k .

Далі визначимо переміщення берегів тріщин. Згідно з (3), для переміщення верхнього берега k -го розрізу маємо

$$[u(t) + iv(t)]^\pm = \frac{1}{2\mu} \int [x\Phi^\pm(t) - \Omega^\pm(t)] dt.$$

Використовуючи другу із формул (1) і вирази (27), отримаємо

$$[u(t) + iv(t)]^\pm = \Lambda_1 \int \left[\frac{\sigma_1 G(t) + P_2(t)}{X^\pm(t)} - \frac{p}{4} \right] dt + \Lambda_2 \frac{\sigma}{2} \int g(t) dt.$$

За умов плоского напруженого стану $\Lambda_1 = 4/E, \Lambda_2 = 2(1-\nu)/E$.

З урахуванням (4) вертикальне переміщення верхнього берега k -го розрізу ($k = 1, 2$)

$$v^\pm(t) = \pm(-1)^{2-k+1} \Lambda_1 \int_{c_k}^t \frac{\sigma_1 G(\tau) + P_2(\tau)}{\hat{X}(\tau)} d\tau.$$

Випадок об'єднаної внутрішньої зони передруйнування. У цьому випадку вертикальне переміщення берегів вже одного розрізу можна подати у вигляді

$$v(x) = \frac{x+1}{2\mu} \sigma_1 \sum_{k=1}^2 \{K(x, b_k) - K(x, a_k)\}, \quad (28)$$

де

$$K(x, \xi) = (x - \xi) \ln \frac{\delta(\xi) - \delta(x)}{\delta(\xi) + \delta(x)}, \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{x - c_1}{d_2 - x}},$$

а координати кінців зон передруйнування визначаються з системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^2 \{\arctg \delta(b_k) - \arctg \delta(a_k)\} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi}{\sigma}\right),$$

$$\sum_{k=1}^2 \{\hat{X}(b_k) - \hat{X}(a_k)\} = 0, \quad \hat{X}(t) = \sqrt{(t - c_1)(d_2 - t)}. \quad (29)$$

При зникненні внутрішньої зони передруйнування отримаємо одиничну тріщину, переміщення берегів якої можна отримати з (28) і (29) шляхом відкидання у сумах другого доданку.

Отримані чисельні результати. Наведемо деякі чисельні розв'язки. Сумістимо праву границю першої фізичної тріщини b_1 з початком координат. При такому виборі b_1 значення параметра, що описує розташування лівого кінця другої фізичної тріщини, a_2 , буде дорівнювати відстані між тріщинами.

На рис. 2 наведено вертикальні переміщення берегів розрізів для випадку, коли ліва границя правої фізичної тріщини $a_1 = -0.3$, а ліва границя правої фізичної тріщини a_2 змінюється від нуля (одинична тріщина без внутрішньої зони передруйнування) з кроком 0.03 до 0.3. Праву границю другої тріщини вибрано так, щоб її довжина дорівнювала одиниці: $b_2 = a_2 + 1$.

При $a_2 = 0.03, 0.06, 0.09, 0.12, 0.15$ і 0.18 отримано розв'язок з внутрішньою зоною передруйнування, для інших a_2 – дві окремі тріщини. Для останнього типу конфігурації при наближенні великої тріщини до малої контур малого розрізу змінюється несуттєво.

На рис. 3 довжину лівої фізичної тріщини покладено одиничною ($a_1 = -1$), а меншу праву тріщину (з довжиною $b_2 - a_2 = 0.3$) віддаляємо, змінюючи a_2 від нуля до 0.6 з кроком 0.15.

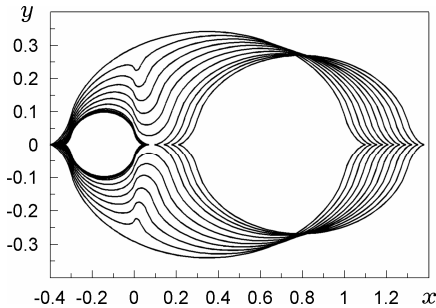


Рис. 2

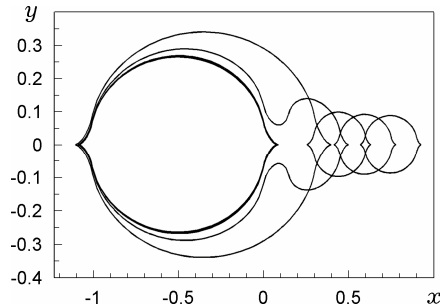


Рис. 3

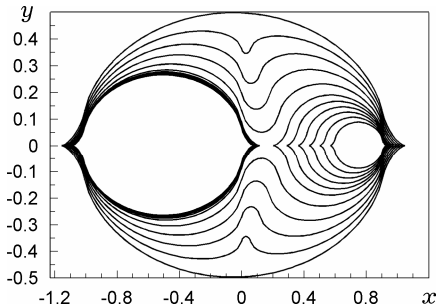


Рис. 4

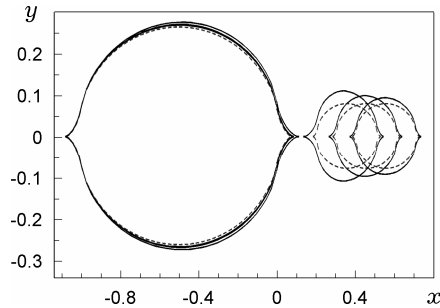


Рис. 5

На рис. 4 довжину лівої фізичної тріщини покладено одиничною ($a_1 = -1$), а меншу праву тріщину віддаляємо, змінюючи a_2 від нуля до 0.6 з кроком 0.06. Але в цьому випадку праву границю другої тріщини фіксуємо ($b_2 = 0.9$) так, щоб її довжина зменшувалась при віддаленні.

На рис. 5 проілюстровано взаємний вплив двох тріщин. Пунктирні лінії на рисунку відповідають контурам розрізів при відсутності другої тріщини. Можна прослідкувати, як вплив другої тріщини зменшується при віддаленні тріщин.

1. *Витвицкий П. М.* Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами // Концентрация напряжений. – Вып. 1. – Киев: Наук. думка, 1965. – С. 78–85.
2. *Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Черноіван Ю. О.* Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини // Доп. НАН України. – 2011. – № 11. – С. 70–75.
3. *Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Черноіван Ю. О.* Модель зростання і злиття двох колінеарних тріщин у в'язкопружному тілі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 61–71.
Те саме: *Kamins'kyi A. O., Selivanov M. F., Chornoivan Yu. O.* Model of growth and coalescence of two collinear cracks in a viscoelastic body // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, No. 5. – P. 697–709.
4. *Каминский А. А., Селиванов М. Ф., Черноиван Ю. А.* Докритический рост двух коллинеарных трещин в вязкоупругом теле // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – **48**. – С. 40–50.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
6. *Bhargava R. R., Hasan S.* The Dugdale solution for two unequal straight cracks weakening in an infinite plate // Sadhana. – 2010. – **35**, No. 1. – P. 19–29.
7. *Bhargava R. R., Hasan S.* Crack opening displacement for two unequal straight cracks with coalesced plastic zone – A modified Dugdale model // Appl. Math. Model. – 2011. – **35**, No. 8. – P. 3788–3796.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БЕРЕГОВ ДВУХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН РАЗНЫХ ДЛИН В РАМКАХ МОДЕЛИ ЛЕОНОВА – ПАНАСЮКА

На основе модели Леонова – Панасюка исследовано напряженно-деформированное состояние бесконечного изотропного упругого тела с двумя коллинеарными трещинами разной длины при условии приложения к телу на бесконечности растягивающего усилия, перпендикулярного к линии трещин. Получена аналитическая форма уравнений для определения раскрытия трещин, приведены примеры результатов вычислений раскрытия для разных случаев соотношения длин трещин и их взаимного расположения.

DETERMINATION OF DISPLACEMENTS OF FACES OF TWO COLLINEAR CRACKS OF UNEQUAL LENGTHS USING LEONOV – PANASYUK MODEL

Using Leonov – Panasyuk model the stress-strain state of infinite isotropic elastic body weakened by two collinear unequal cracks is studied. It is supposed that the body is loaded by the tensile force normal to the crack line at the infinity. The analytical form of the equation for crack opening is obtained. Numerical examples are given for different cases of crack lengths ratio as well as for different mutual locations of the cracks.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
15.05.12