

**ЕФЕКТ ЧАСТКОВОГО ЗАКРИТТЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ З ТЕПЛОПРОВІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ І ПОВЕРХНЕВИМИ ПЛІВКАМИ ПРИ ДІЇ НА БІМАТЕРІАЛ ТЕРМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Сформульовано задачу термопружності для біматеріального тіла з міжфазною тріщиною з урахуванням контакту її берегів на центральній частині під дією термічних деформацій, викликаних перпендикулярним до інтерфейсу тепловим потоком. Компоненти біматеріалу відрізняються коефіцієнтами теплопровідності та лінійного теплового розширення. Тріщина заповнена теплопровідним середовищем, а її береги наділені термоопором, який зумовлений тонкими поверхневими плівками. Задача зведена до системи нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибка температури між берегами тріщини та її розкриття, для розв'язання якої розроблено ітераційний алгоритм, що базується на методі послідовних наближень. Проаналізовано вплив теплового потоку і термоопору плівок на величину ділянки контакту берегів тріщини, її розкриття, стрибок температури між її поверхнями та коефіцієнти інтенсивності міжфазних напружень.*

**Вступ.** Контакт берегів тріщин зумовлює перерозподіл напружень в їх околі і може істотно впливати на міцність і руйнування тіл з дефектами. Часткове закриття дефектів може відбуватися не лише під дією механічних навантажень, а й теплових. Термонапружений стан однорідних тіл з урахуванням контакту берегів внутрішніх тріщин, зумовленого термічними чинниками, вивчався в працях [3, 5, 17]. Побудовано [14, 20] фізично коректні (неосцилюючі) розв'язки задач термопружності для кусково-однорідних тіл з міжфазними термоізолюваними тріщинами на основі контактної моделі, що передбачає налягання берегів дефектів поблизу їх вершин. Досліджено явище часткового термічного закриття попередньо розкритої міжфазної тріщини і часткового розкриття попередньо закритої тріщини [6, 7, 9], які спостерігаються за певних співвідношень між тепловими і механічними навантаженнями та фізичними характеристиками компонент біматеріалу для випадку теплоізолюваної тріщини і тріщини, наділеної термоопором, що не змінюється в процесі навантаження. Напружений стан однорідних тіл з урахуванням тиску газу або рідини, що заповнюють дефекти, вивчався у працях [2, 4, 13]. Вплив поверхневої мікроструктури тріщини (мікронерівностей, тонких плівок [21, 23, 26]) на напружений стан і міцність тіл особливо істотний, якщо тріщина закривається під дією зовнішніх навантажень. Теоретичні й експериментальні дослідження в цьому напрямі відображені у працях [1, 15, 18, 22–25]. Термонапружений стан біматеріалу з міжфазною тріщиною, що має шорсткі поверхні, з урахуванням її закриття і теплопровідності заповнювача мікропустот між шорсткостями, змодельовано у праці [8]. Вивчено [16, 19] термічні напруження в кусково-однорідному тілі з частково закритою тріщиною, термоопір якої на ділянці контакту залежить від тиску, а на розкритій ділянці береги термоізолювані. На основі аналізу термонапруженого стану біматеріалу, який має розкрити міжфазну тріщину з поверхневими плівками і теплопровідним заповнювачем, виявлено [11], що термоопір плівок може викликати часткове закриття тріщини за теплового потоку через інтерфейс.

Ця стаття присвячена дослідженню термомеханічної поведінки біматеріалу, компоненти якого відрізняються теплофізичними характеристиками, з міжфазною теплопроникною тріщиною з урахуванням контакту її берегів на центральній частині, зумовленого термоопором плівок.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо біматеріальне тіло, складене з ізотропних півплощин  $D_1$  і  $D_2$ , на лінії з'єднання яких розташована міжфазна тріщина (дефект) завдовжки  $2a$  (рис. 1). Матеріали півплощин від-

різняються коефіцієнтами теплопровідності ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) і коефіцієнтами лінійного теплового розширення ( $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ), а їх механічні властивості однакові ( $G_1 = G_2 = G$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ). На безмежності в перпендикулярному до міжфазної лінії напрямі на тіло діють однорідні розтягувальні напруження  $p$ , що зумовлюють розкриття тріщини, і однорідний стаціонарний тепловий потік  $q$ . Окрім того, до кожної з півплощин  $D_1$  і  $D_2$  на нескінченності вздовж осі  $Ox$  прикладені лінійно розподілені за координатою  $y$  напруження, які усувають глобальне викривлення меж півплощин, зумовлене тепловим потоком  $q$ . У тілі реалізується стаціонарне двовимірне температурне поле і стан плоскої деформації.

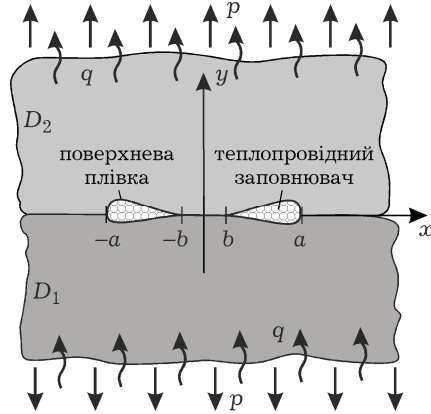


Рис. 1

Береги тріщини покриті тонкими плівками, які зумовлюють виникнення на межі півплощин  $D_1$  і  $D_2$  уздовж тріщини (при  $|x| \leq a$ ) поверхневого термоопору  $r_1(x) = r_{01} \sqrt{a^2 - x^2}$  і  $r_2(x) = r_{02} \sqrt{a^2 - x^2}$  відповідно. Вважаємо, що плівки не чинять опору деформуванню тіла. Порожнина тріщини при її розкритті заповнюється середовищем (газом, рідиною), коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_0$  якого значно менший від коефіцієнтів теплопровідності матеріалів півплощин  $D_1$  і  $D_2$ . З огляду на мале пружне розкриття тріщини  $h(x)$  ( $h(x) \ll a$ ) це дає підстави [11] враховувати теплопередачу між берегами тріщини через заповнювач лише в її поперечному напрямі, вважаючи, що заповнювач створює термоопір  $r(x) = h(x)/\lambda_0$ .

Згідно з правилом підсумовування послідовно з'єднаних опорів [12] результуючий термоопір  $R(x)$  плівок і заповнювача дорівнює сумі їх термоопорів:

$$R(x) = r_{01}(x) + r_{02}(x) + r(x).$$

Отже, моделюючи термоопором  $R(x)$  вплив тріщини з плівками і заповнювачем на теплопередачу між півплощинами, при визначенні температурного поля  $T(x, y)$  в біматеріалі наявність міжфазного дефекту будемо враховувати такими умовами неідеального теплового контакту півплощин  $D_1$  і  $D_2$  на відрізку  $x \in [-a, a]$ :

$$q_y^+(x, 0) = q_y^-(x, 0), \quad (1)$$

$$T^-(x, 0) - T^+(x, 0) = \left[ r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{h(x)}{\lambda_0} \right] q_y^-(x, 0). \quad (2)$$

Тут  $q_y$  – нормальна до міжфазної лінії компонента вектора теплового потоку;  $T$  – температура;  $r_0 = r_{01} + r_{02}$  – сумарний термоопір плівок в центрі тріщини.

Якщо береги тріщини вступають у механічний контакт на деякій ділянці, то розкриття тріщини на ній дорівнює нулеві ( $h(x) = 0$ ) і умова (2) набуває вигляду

$$T^-(x, 0) - T^+(x, 0) = r_0 q_y^-(x, 0) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}. \quad (3)$$

У праці [11] показано, що при розглянутому тепловому й механічному навантаженні термонапружений стан біматеріалу в околі тріщини істотно залежить від співвідношення між термічними дистортивностями  $\eta_1$  і  $\eta_2$  компонентів  $D_1$  і  $D_2$  та напрямку теплового потоку. Термічна дистортивність матеріалу  $\eta_n = \alpha_n(1 + \nu)/\lambda_n$ ,  $n = 1, 2$ , характеризує термічне викривлення прямолінійного елемента, зумовлене перпендикулярним до нього стаціонарним тепловим потоком одиничної інтенсивності. За теплового потоку, напрямленого від матеріалу з меншою до матеріалу з більшою термічною дистортивністю (тобто при  $q(\eta_2 - \eta_1) > 0$ ), термічні напруження зумовлюють збільшення розкриття тріщини. Якщо ж потік скерований до матеріалу з меншою термічною дистортивністю (тобто  $q(\eta_2 - \eta_1) < 0$ ), то ефект протилежний – розкриття тріщини зменшується. При перевищенні ж інтенсивності теплового потоку певного порогового значення розкриття посередині тріщини стає від’ємним (див. нижню криву на рис. 5 в статті [11]), що фізично нереально, оскільки береги тріщини не можуть проникати один за інший. Це означає виникнення механічного контакту берегів на деякій центральній частині тріщини. Тому фізично коректний розв’язок задачі термопружності для біматеріалу, міжфазна тріщина в якому має поверхневі плівки і заповнювач, за такого термічного навантаження повинен бути отриманий на основі припущення про часткове налягання берегів. Саме такий випадок розглянемо у цій статті. Зауважимо, що для тріщини, заповненої теплопроникним середовищем, яка не має поверхневих плівок, налягання її берегів за такого навантаження не відбувається [10].

Отже, тут будемо досліджувати вплив часткового закриття міжфазної тріщини на термонапружений стан кусково-однорідної площини у випадку теплового потоку, напрямленого до матеріалу з меншою термічною дистортивністю. Вважаємо, що механічний контакт берегів відбувається на деякій центральній ділянці тріщини завдовжки  $2b$  (рис. 1). Силами тертя на ділянці налягання берегів та механічним впливом заповнювача на поверхні розкритої частини тріщини нехтуємо. Умови теплового контакту берегів тріщини мають вигляд (1), (2) на розкритій частині тріщини та (1), (3) – на ділянці закриття. На міжфазній лінії ззовні тріщини виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту півплощин.

Запишемо контактні-крайові умови сформульованої задачі

– на ділянці закриття тріщини ( $y = 0$ ,  $|x| < b$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^- = 0, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad v^+ = v^-, \quad q_y^+ = q_y^-, \\ T^- - T^+ = q_y^+ \cdot r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}; \end{aligned} \quad (4)$$

– на розкритих ділянках тріщини ( $y = 0$ ,  $b \leq |x| < a$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_y^+ = 0, \quad \sigma_y^- = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^- = 0, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad q_y^+ = q_y^-, \\ T^- - T^+ = q_y^+ \left[ r_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{h(x)}{\lambda_0} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

– на міжфазній лінії поза тріщиною ( $y = 0$ ,  $|x| \geq a$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, \quad u^+ = u^-, \quad v^+ = v^-, \\ T^+ = T^-, \quad q_y^+ = q_y^-; \end{aligned} \quad (6)$$

– на нескінченності ( $|x| \rightarrow \infty$ ,  $|y| \rightarrow \infty$ ) у кожній з півплощин  $D_n$ ,  $n = 1, 2$ :

$$\sigma_y = p, \quad \sigma_x = \frac{2G\eta_n q y}{\lambda_n(1 - \nu)}. \quad (7)$$

Тут  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $u$ ,  $v$  – компоненти вектора переміщень;  $q_x$ ,  $q_y$  – компоненти вектора теплового потоку.

**2. Система сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь задачі.** Згідно з викладеною у працях [6, 7, 9] методикою температури, компоненти векторів теплового потоку та переміщення і тензора напружень в біматеріалі виражаємо через три заздалегідь невідомі функції: стрибки температури  $\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0)$  і дотичних переміщень  $U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0)$  на берегах тріщини та розкриття тріщини  $h(x) = v^+(x, 0) - v^-(x, 0)$ , де  $h(x) = 0$  при  $|x| < b$ . Ці подання побудовано таким чином, що вони задовольняють всі крайові умови (4)–(7) сформульованої задачі, за винятком другої і шостої з (4) та першої, третьої і шостої з (5). За формулами (6) з праці [6] визначимо через ці функції температуру, тепловий потік і напруження на поверхнях тріщини:

$$\begin{aligned} T^+ &= -\frac{\lambda}{2\lambda_2} \gamma(x), & T^- &= \frac{\lambda}{2\lambda_1} \gamma(x), \\ q_y^\pm &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} + q, \\ \sigma_y^\pm &= \frac{\lambda\eta^-}{K} \gamma(x) + \frac{2}{\pi K} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} + p, \\ \tau_{xy}^\pm &= \frac{\lambda\eta^+}{\pi K} \int_{-a}^a \frac{\gamma(t) dt}{t-x} - \frac{2}{\pi K} \int_{-a}^a \frac{U'(t) dt}{t-x}, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad K = \frac{4(1-\nu)}{G}, \quad \eta^\pm = \eta_2 \pm \eta_1.$$

Задовольняючи за допомогою подань (8) другу і шосту умови з (4), першу, третю і шосту умови з (5) та враховуючи парність функції  $h(x)$ , отримуємо систему нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь для визначення стрибків температури і дотичних переміщень берегів тріщини та розкриття тріщини:

$$\frac{\gamma(x)}{h(x)/\lambda_0 + r_0\sqrt{1-(x/a)^2}} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = q, \quad |x| < a, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{h'(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{h'(t) dt}{t+x} + \frac{\lambda\eta^-}{2} \gamma(x) = -\frac{Kp}{2}, \quad b < x < a, \quad (10)$$

$$\int_{-a}^a \frac{U'(t) dt}{t-x} - \frac{\lambda\eta^+}{2} \int_{-a}^a \frac{\gamma(t) dt}{t-x} = 0, \quad |x| < a. \quad (11)$$

Шукані функції повинні задовольняти умови

$$\begin{aligned} \gamma(\pm a) &= 0, & U(\pm a) &= 0, & h(\pm a) &= 0, \\ h(\pm b) &= 0, & h'(\pm b) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Остання з умов у (12) означає плавне змикання берегів тріщини в точках  $x = \pm b$ , які розмежовують її закрити і розкрити частину, і буде використана для визначення довжини ділянки контакту берегів.

Міжфазні нормальні та дотичні напруження  $\sigma_y(x, 0)$  і  $\tau_{xy}(x, 0)$  ззовні тріщини (при  $|x| > a$ ) виражаються через функції  $\gamma(x)$ ,  $U(x)$  і  $h(x)$  двома

останніми співвідношеннями з (8), в яких належить покласти  $\gamma(x) = 0$  при  $|x| > a$ . Коефіцієнти інтенсивності цих напружень  $K_I$  і  $K_{II}$  визначаємо за формулами

$$K_I = \lim_{x \rightarrow a} \{ \sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_y(x, 0) \},$$

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow a} \{ \sqrt{2\pi(x-a)} \tau_{xy}(x, 0) \}.$$

З рівняння (11), враховуючи другу з умов (12), знаходимо похідну від стрибка дотичних переміщень берегів тріщини через стрибок температури:

$$U'(x) = \frac{\lambda \eta^+}{2} \left[ \gamma(x) - \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \gamma(x) dx \right].$$

Отже розв'язок задачі цілком визначається стрибком температури  $\gamma(x)$  і розкриттям тріщини  $h(x)$ , які знаходяться із системи двох рівнянь (9), (10).

**3. Методика числового розв'язування задачі.** Введемо безрозмірні величини: розкриття тріщини  $\bar{h} = h/a$ , стрибок температури  $\bar{\gamma} = -\gamma \lambda \eta^-$ , розтягувальні напруження  $\bar{p} = pK$ , тепловий потік  $\bar{q} = -q a \eta^-$ , коефіцієнт теплопровідності заповнювача тріщини  $\bar{\lambda}_c = \lambda_c / \lambda$ , сумарний термоопір плівок в центрі тріщини  $\bar{r}_0 = (r_{01} + r_{02}) \lambda / a$ , коефіцієнти інтенсивності нормальних і дотичних міжфазних напружень  $\bar{K}_I = K_I K / \sqrt{a}$  і  $\bar{K}_{II} = K_{II} K / \sqrt{a}$ , координату  $\bar{x} = x/a$ .

Використовуючи ці величини, запишемо систему інтегро-диференціальних рівнянь (9), (10) та першу, третю, четверту і п'яту умови з (12) у безрозмірному вигляді:

$$\frac{\bar{\gamma}_q(\bar{x})}{\bar{h}(\bar{x}) / \bar{\lambda}_0 + \bar{r}_0 \sqrt{1 - \bar{x}^2}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}'_q(\bar{t})}{\bar{t} - \bar{x}} d\bar{t} = 1, \quad |\bar{x}| < 1, \quad (13)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}'(\bar{t})}{\bar{t} - \bar{x}} d\bar{t} + \frac{1}{\pi} \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}'(\bar{t})}{\bar{t} + \bar{x}} d\bar{t} = \frac{1}{2} \bar{q} \bar{\gamma}_q(\bar{x}) - \frac{\bar{p}}{2}, \quad \bar{b} < \bar{x} < 1, \quad (14)$$

$$\bar{\gamma}_q(\pm 1) = 0, \quad \bar{h}(\pm \bar{b}) = \bar{h}(\pm 1) = 0, \quad \bar{h}'(\pm \bar{b}) = 0, \quad (15)$$

де  $\bar{\gamma}_q(\bar{x}) = \bar{\gamma}(\bar{x}) / \bar{q}$ .

Для розв'язування нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (13), (14) за умов (15) розроблено наступний ітераційний алгоритм. Задаємо значення термоопору  $\bar{r}_0$  поверхневих плівок і коефіцієнта теплопровідності  $\bar{\lambda}_0$  заповнювача. Вибираємо розтягувальні зусилля  $\bar{p}$  з деякого інтервалу їх зміни, який нас цікавить. Розглядаємо збільшення півдовжини  $\bar{b}$  ділянки контакту берегів тріщини в межах певного діапазону  $\bar{b}^- < \bar{b} < \bar{b}^+$ , де  $0 < \bar{b}^- < \bar{b}^+ < 1$ ; фіксуємо набір дискретних значень  $\bar{b}$  з цього діапазону і почергово вибираємо  $\bar{b}$  рівним одному з них. Це означає, що параметр  $\bar{b}$  виведено з числа невідомих задачі, натомість вважаємо невідомим тепловий потік  $\bar{q}$ , за якого ділянка контакту досягає заданої довжини  $2\bar{b}$ .

Далі розв'язуємо нелінійну систему сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (13), (14) методом послідовних наближень. На кожному  $i$ -му,

$i = 1, 2, \dots$ , кроці ітераційного процесу для визначення чергових наближень розкриття тріщини  $\bar{h}^{(i)}(\bar{x})$ , стрибка температури  $\bar{\gamma}^{(i)}(\bar{x})$  і теплового потоку  $\bar{q}^{(i)}$  записуємо, враховуючи (13)–(15), лінійні інтегро-диференціальні рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}'^{(i)}(\bar{t})}{\bar{t} - \bar{x}} d\bar{t} + \frac{1}{\pi} \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}'^{(i)}(\bar{t})}{\bar{t} + \bar{x}} d\bar{t} = \frac{1}{2} \bar{q}^{(i)} \bar{\gamma}^{(i-1)}(\bar{x}) - \frac{\bar{p}}{2}, \quad \bar{b} < \bar{x} < 1,$$

$$\bar{h}^{(i)}(\pm \bar{b}) = \bar{h}^{(i)}(\pm 1) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\bar{\gamma}_q^{(i)}(\bar{x})}{\bar{h}^{(i)}(\bar{x})/\bar{\lambda}_0 + \bar{r}_0 \sqrt{1 - \bar{x}^2}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}_q'^{(i)}(\bar{t})}{\bar{t} - \bar{x}} d\bar{t} = 1, \quad |\bar{x}| < 1,$$

$$\bar{\gamma}^{(i)}(\pm 1) = 0, \quad (17)$$

і умову

$$\bar{h}^{(i)}(\pm \bar{b}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Права частина інтегро-диференціального рівняння (16) для  $\bar{h}^{(i)}$  містить наближення стрибка температури  $\bar{\gamma}^{(i-1)}$ , отримане на попередньому кроці. Початкове наближення стрибка температури  $\bar{\gamma}^{(0)}(\bar{x})$  вибираємо (з фізичних міркувань) за формулою

$$\bar{\gamma}^{(0)}(\bar{x}) = \frac{4\bar{\lambda}_c \bar{r}_0 + 2\bar{p}}{4\bar{\lambda}_c + 2\bar{\lambda}_c \bar{r}_0 + \bar{p}} \sqrt{1 - \bar{x}^2},$$

що відповідає стрибку температури на берегах тріщини, цілком розкритої під дією лише розтягувальних зусиль  $\bar{p}$ , коли не враховується вплив термічних деформацій.

Враховуючи лінійність рівняння (16) та структуру правої його частини, його розв'язок (функцію  $\bar{h}^{(i)}(\bar{x})$ ) подамо у вигляді суми:

$$\bar{h}^{(i)}(\bar{x}) = \bar{p} \bar{h}_p(\bar{x}) + \bar{q}^{(i)} \bar{h}_q^{(i)}(\bar{x}), \quad (19)$$

де  $\bar{h}_p(\bar{x})$  і  $\bar{h}_q^{(i)}(\bar{x})$  визначаються із сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{\pi} \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}_p'(\bar{t})}{\bar{t} - \bar{x}} d\bar{t} + \frac{1}{\pi} \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}_p'(\bar{t})}{\bar{t} + \bar{x}} d\bar{t} = -\frac{1}{2},$$

$$\bar{h}_p(\pm \bar{b}) = \bar{h}_p(\pm 1) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}_q'^{(i)}(\bar{t})}{\bar{t} - \bar{x}} d\bar{t} + \frac{1}{\pi} \int_{\bar{b}}^1 \frac{\bar{h}_q'^{(i)}(\bar{t})}{\bar{t} + \bar{x}} d\bar{t} = \frac{1}{2} \bar{\gamma}_q^{(i-1)}(\bar{x}),$$

$$\bar{h}_q^{(i)}(\pm \bar{b}) = \bar{h}_q^{(i)}(\pm 1) = 0. \quad (21)$$

Рівняння (20) не залежить від порядкового номера ( $i$ ) ітерації, тому розв'язуємо лише один раз. Рівняння (20), (21) розв'язуємо числово, шукаючи необмежені в точках  $\bar{x} = \bar{b}$  і  $\bar{x} = 1$  функції  $\bar{h}_p'(\bar{x})$  і  $\bar{h}_q^{(i)}(\bar{x})$ , виділивши явно їх кореневі особливості. Підставивши вираз (19) в умову (18) обмеженості функції  $\bar{h}^{(i)}(\bar{x})$  у точці  $\bar{x} = \bar{b}$ , визначаємо наближення  $\bar{q}^{(i)}$  теплового потоку

$$\bar{q}^{(i)} = -\frac{1}{\bar{p}} \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{\bar{h}'_p(\bar{x})}{\bar{h}'_q^{(i)}(\bar{x})} \right\}, \quad (22)$$

за якого досягається задана довжина ділянки контакту.

Далі, підставляючи отримані  $\bar{h}_p(\bar{x})$ ,  $\bar{h}_q^{(i)}(\bar{x})$  і  $\bar{q}^{(i)}$  у формулу (19), визначаємо функцію  $\bar{h}^{(i)}(\bar{x})$ . Врахувавши її в інтегро-диференціальному рівнянні (17), розв'язуємо його числово і визначаємо  $i$ -те наближення стрибка температури  $\bar{\gamma}^{(i)}(\bar{x})$ .

За критерій зупинки ітераційного процесу вибираємо одночасне виконання умов

$$\frac{[\bar{\gamma}_q^{(i)}(\bar{x}) - \bar{\gamma}_q^{(i-1)}(\bar{x})]}{\bar{\gamma}_q^{(i)}(\bar{x})} \leq 10^{-5},$$

$$\frac{[\bar{h}_q^{(i)}(\bar{x}) - \bar{h}_q^{(i-1)}(\bar{x})]}{\bar{h}_q^{(i)}(\bar{x})} \leq 10^{-5}.$$

Якщо вони справджуються, ітераційний процес завершується і шуканим функціям присвоюємо їх значення на останній ітерації.

**4. Числові результати та їх аналіз.** Використовуючи розроблений ітераційний алгоритм, числово проаналізовано вплив прикладеного теплового потоку  $\bar{q}$  і сумарного термоопору плівки  $\bar{r}_0$  на термомеханічну поведінку біматеріалу з дефектом за фіксованих значень зовнішніх зусиль  $\bar{p} = 0.01$  і коефіцієнта теплопровідності заповнювача  $\bar{\lambda}_0 = 0.01$ , коли півдовжина ділянки контакту берегів тріщини  $\bar{b}$  змінюється в діапазоні  $0.005 < \bar{b} < 0.9$ .

На рис. 2 зображено залежність півдовжини ділянки контакту берегів  $\bar{b}$  від теплового потоку  $\bar{q}$  для значень термоопору плівки  $\bar{r}_0 = 1, 2, 3$ . Зі збільшенням  $\bar{q}$  ділянка контакту зростає, причому залежність  $\bar{b}$  від  $\bar{q}$  є нелінійною. Що більший термоопір плівки  $\bar{r}_0$ , то при меншому потоці починається налягання берегів. При фіксованому значенні потоку  $\bar{q}$  ділянка контакту більша для більшого  $\bar{r}_0$ .

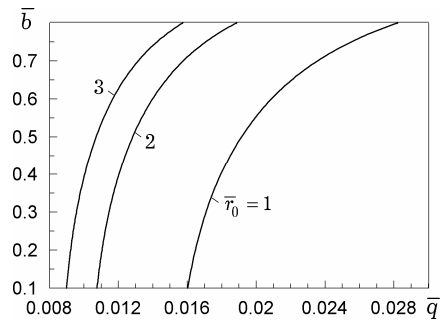


Рис. 2

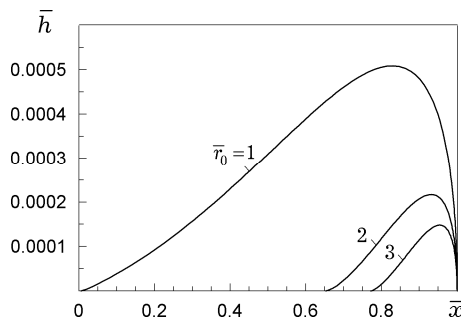


Рис. 3

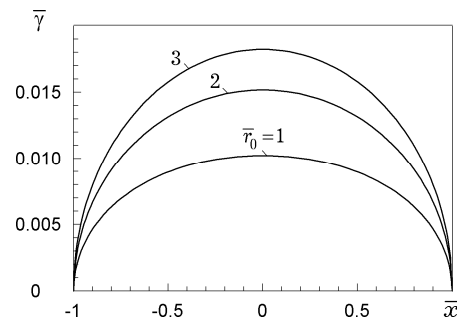


Рис. 4

Розкриття тріщини  $\bar{h}$  на її правій половині і стрибок температури  $\bar{\gamma}$  між її берегами для значень термоопору плівок  $\bar{r}_0 = 1, 2, 3$  та фіксованого теплового потоку  $\bar{q} = -0.0151$  зображено на рис. 3 і рис. 4 відповідно. Зі збільшенням  $\bar{r}_0$  розкриття тріщини спадає. Максимального значення  $\bar{h}_{\max}$  розкриття набуває поблизу краю тріщини (рис. 3) і дорівнює  $\bar{h}_{\max} = 0.00014$  при  $\bar{r}_0 = 3$ ,  $\bar{h}_{\max} = 0.00021$  при  $\bar{r}_0 = 2$ ,  $\bar{h}_{\max} = 0.0005$  при  $\bar{r}_0 = 1$ .

Стрибок температури  $\bar{\gamma}$  зростає зі збільшенням термоопору плівок  $\bar{r}_0$  і завжди набуває максимального значення в центрі тріщини (рис. 4).

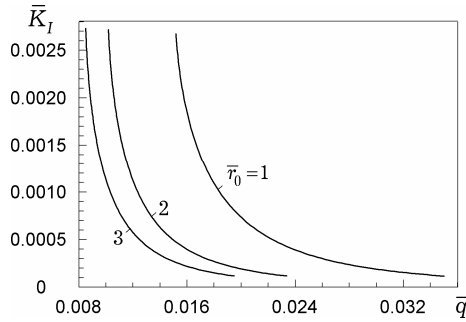


Рис. 5

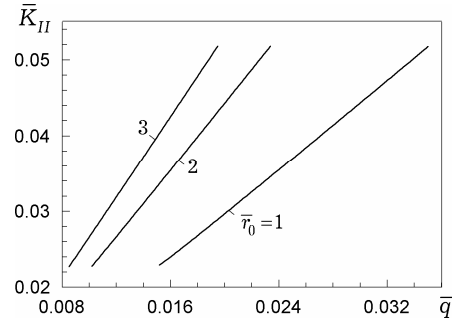


Рис. 6

На рис. 5 і рис. 6 проілюстровано залежності коефіцієнтів інтенсивності нормальних і дотичних міжфазних напружень  $\bar{K}_I$  і  $\bar{K}_{II}$  від теплового потоку  $\bar{q}$  для різних значень термоопору плівок  $\bar{r}_0$ . Бачимо, що закономірності зміни  $\bar{K}_I$  і  $\bar{K}_{II}$  при зміні  $\bar{q}$  і  $\bar{r}_0$  є протилежними:  $\bar{K}_I$  спадає зі зростанням  $\bar{q}$  і  $\bar{r}_0$ , а  $\bar{K}_{II}$  зростає. Залежність  $\bar{K}_I$  від  $\bar{q}$  нелінійна (рис. 5), тоді як  $\bar{K}_{II}$  практично лінійно залежить від  $\bar{q}$  (рис. 6).

1. *Андрейків А. О.* Узагальнена задача Гріффітса для зсуву з урахуванням шорсткості поверхонь тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 2. – С. 49–54.  
Te same: *Andreikiv A. O.* Generalized Griffith problem of shear with regard for the roughness of the crack surfaces // Mater. Sci. – 2000. – **36**, No. 2. – P. 210–217.
2. *Балуєва А. В., Гольдштейн Р. В.* Метод расчета кинетики трещин в среде с объемным газовыделением // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 3. – С. 149–159.
3. *Балуєва А. В., Гольдштейн Р. В., Матчинский М.* Пространственная задача о закрытии трещины вблизи тепловых источников // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 4. – С. 85–92.
4. *Евтушенко А. А., Сулим Г. Т.* Концентрация напряжений возле полости, заполненной жидкостью // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1980. – **16**, № 6. – С. 70–73.  
Te same: *Evtushenko A. A., Sulim G. T.* Stress concentration near a cavity filled with a liquid // Mater. Sci. – 1980. – **16**, No. 6. – P. 210–217.
5. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
6. *Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Нагалка С. П., Гончар Х. И.* Задача термоупругости для биматериала с межфазной трещиной, берега которой контактируют на центральном участке // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 83–90.
7. *Мартыняк Р. М.* Термічне розкриття початково закритої міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту берегів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 5. – С. 14–22.



- Te same: *Martynyak R. M.* Thermal opening of an initially closed interface crack under conditions of imperfect thermal contact between its lips // *Mater. Sci.* – 1999. – **35**, No. 5. – P. 612–622.
8. *Мартиняк Р. М.* Термонапружений стан біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною з шорсткими поверхнями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 1. – С. 71–79.  
Te same: *Martynyak R. M.* Thermal stress state of a bimaterial with a closed interfacial crack having rough surfaces // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**, No. 4. – P. 578–589.
  9. *Мартиняк Р. М., Гончар Х. І., Нагалка С. П.* Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2003. – **39**, № 5. – С. 59–66.  
Te same: *Martynyak R. M., Honchar Kh. I., Nahalka S. P.* Simulation of thermomechanical closure of an initially open interface crack with heat resistance // *Mater. Sci.* – 2003. – **39**, No. 5. – P. 672–681.
  10. *Мартиняк Р. М., Гончар Х. І.* Термоупругое деформирование биматериала с межфазным дефектом, заполненным теплопроводной средой // *Теорет. и прикл. механика.* – 2005. – Вып. 41. – С. 58–62.
  11. *Мартиняк Р. М., Середницькая Х. І.* Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной // *Теорет. и прикл. механика.* – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 91–98.
  12. *Шлыков Ю. П., Ганин Е. А., Царевский С. Н.* Контактное термическое сопротивление. – Москва: Энергия, 1977. – 328 с.
  13. *Andreikiv O. Ye.* Mathematical modeling of the hydrogen assisted fracture in metals // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1997. – **33**, № 4. – С. 53–64.  
Te same: *Andreikiv O. Ye.* Mathematical modeling of hydrogen-assisted fracture in metals // *Mater. Sci.* – 1997. – **33**, No. 4. – P. 450–464.
  14. *Barber J. R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 2: Imperfect contact // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1983. – **50**, No. 4a. – P. 770–776.
  15. *Garsia A. M., Sehitoglu H.* Contact of crack surfaces during fatigue: Part 1. Formulation of the model // *Metal. Mater. Trans. A.* – 1997. – **28A**, No. 11. – P. 2263–2275.
  16. *Giannopoulos G. I., Anifantis N. K.* A BEM analysis for thermomechanical closure of interfacial cracks incorporating friction and thermal resistance // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 2007. – **196**, No. 4–6. – P. 1018–1029.
  17. *Gross D., Heimer St.* Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load // *Eng. Fract. Mech.* – 1993. – **46** – P. 633–640.
  18. *Gross T. S., Mendelsohn D. A.* On the effect of crack face contact and friction due to fracture surface roughness in edge crack subjected to external shear // *Eng. Fract. Mech.* – 1988. – **31**, No. 3. – P. 405–420.
  19. *Keppas L. K., Anifantis N. K.* Boundary element prediction on TBC fracture resistance // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2010. – **33**, No. 3. – P. 174–182.
  20. *Kharun I. V., Loboda V. V.* A thermoelastic problem for interface crack with contact zones // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – **41**, No. 1. – P. 159–175.
  21. *Kobayashi T., Shockey D. A.* Fracture surface topography analysis (FRASTA) – Development, accomplishments and future applications // *Eng. Fract. Mech.* – 2010. – **77**, No. 12. – P. 2370–2384.
  22. *Mendelsohn D. A., Gross T. S., Goulet R. U., Zhouc M.* Experimental-computational estimation of rough fracture surface contact stresses // *Mater. Sci. Eng. A.* – 1998. – **249**, No. 1–2. – P. 1–6.
  23. *Newman J. A., Piascik R. S.* Interactions of plasticity and oxide crack closure mechanisms near the fatigue crack growth threshold // *Int. J. Fatigue.* – 2004. – **26**, No. 9. – P. 923–927.
  24. *Riemelmoser F. O., Pippan R.* Crack closure: a concept of fatigue crack growth under examination // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 1997. – **20**, No. 11. – P. 1529–1540.
  25. *Sehitoglu H., Garsia A. M.* Contact of crack surfaces during fatigue: Part 2. Simulations // *Metal. Mater. Trans. A.* – 1997. – **28A**, No. 11. – P. 2277–2289.
  26. *Semprimoschnig C. O. A., Stampfl J., Pippan R., Kolednik O.* A new powerful tool for surveying cleavage fracture surface // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 1997. – **20**, No. 11. – P. 1541–1550.

**ЭФФЕКТ ЧАСТИЧНОГО ЗАКРЫТИЯ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ  
С ТЕПЛОПРОВОДНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ И ПОВЕРХНОСТНЫМИ ПЛЕНКАМИ  
ПРИ ДЕЙСТВИИ НА БИМАТЕРИАЛ ТЕРМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ**

Сформулирована задача термоупругости для биматериального тела с межфазной трещиной с учетом контакта ее берегов на центральном участке под действием термических деформаций, вызванных перпендикулярным к интерфейсу тепловым потоком. Компоненты биматериала отличаются коэффициентами теплопроводности и линейного теплового расширения, трещина заполнена теплопроводной средой, а ее берега обладают термическим сопротивлением, обусловленным тонкими поверхностными пленками. Задача сведена к системе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно скачка температуры между берегами трещины и ее раскрытия, для решения которой разработан итерационный алгоритм, основанный на методе последовательных приближений. Проанализировано влияние теплового потока и термосопротивления пленок на величину участка контакта берегов трещины, ее раскрытие, скачок температуры между ее поверхностями и коэффициенты интенсивности межфазных напряжений.

**EFFECT OF PARTIAL CLOSURE OF AN INTERFACE CRACK  
WITH A HEAT-CONDUCTING FILLER AND SURFACE FILMS IN THE CASE  
OF THERMAL LOADING OF BIMATERIAL**

The thermoelastic problem for bimaterial with an interface crack, taking into account thermally induced contact of crack faces in a central part of the crack, is formulated. The thermal deformations are caused by heat flow that is perpendicular to the interface. The components of the bimaterial have different thermal conductivities and coefficients of linear thermal expansion. The crack is filled by a heat-conducting medium, and its faces have thermal resistance due to thin surface films. The problem is reduced to a system of non-linear singular integro-differential equations for a temperature jump between crack faces and for a crack opening. For solving the problem, an iterative algorithm based on the method of successive approximations is developed. The influence of the heat flow and the thermal resistance of the films on the size of the regions where the crack faces are in contact, a crack opening, a temperature jump between the crack faces and interfacial stress intensity factors is analyzed.

<sup>1</sup> Ін-т проблем механіки

ім. О. Ю. Ішлінського РАН, Москва, Росія,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
01.10.12