

## ХАОТИЧНІ ХВИЛЬОВІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛОКАЛЬНОЇ МОДЕЛІ СЕРЕДОВИЩА З КОЛИВНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

*Стаття присвячена вивченню хвильових розв'язків математичної моделі складного середовища, яка враховує нелокальну взаємодію структурних елементів основного середовища та коливну динаміку додаткового континуума (включень). Методами якісного та числового аналізу встановлено, що автономна динамічна система з чотиривимірним фазовим простором має періодичні, мультиперіодичні, квазіперіодичні та хаотичні розв'язки. Побудовано біфуркаційні діаграми розвитку коливань залежно від параметрів нелокальності динамічного рівняння стану середовища.*

На сьогодні вивчення фізичних явищ в реальних природних середовищах, як правило, передбачає врахування особливостей внутрішньої структури середовищ. Середовище розглядається як нелінійна система (часто ієрархічна) взаємодіючих дискретних елементів, що обмінюється з навколишнім середовищем енергією та масою [1, 5, 10 (с. 21), 11, 12].

Як відомо [16 (с. 13, с. 213), 20], в нерівноважних умовах такі відкриті системи демонструють здатність до самоорганізації, до утворення локалізованих структур зі своїми власними часово-просторовими масштабами та законами існування.

Класичні моделі механіки суцільного середовища не описують такі явища, що стимулює удосконалення відомих та розробку нових моделей складних середовищ. Одним із напрямів опису структури середовищ є врахування в моделі динаміки структурних елементів у динамічних рівняннях стану [3, 6, 16 (с. 75), 18, 20], які, як правило, враховують нелокальність взаємодії елементів структури, релаксаційні процеси в середовищі, перерозподіл енергії між ступенями вільності тощо.

Інший напрям пов'язаний з узагальненням рівнянь руху складних середовищ [4, 9, 22], що зумовлено переглядом поняття точки суцільного середовища в напрямі збільшення її ступенів вільності. Прикладами реалізації такого підходу є відомі моделі Коссера [2], Міндліна, Рівліна, а також Слепяна [14] та Пальмова [7, 8, 22, р. 65]. У рівняння руху середовища моделі Пальмова введено додаткові об'ємні сили, які виникають в результаті коливань структурних елементів:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \int_0^{\infty} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\omega, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2(w - u) = 0, \quad (1)$$

де  $\sigma$  – механічне напруження;  $u$  та  $w$  – переміщення основного середовища та переміщення типового осцилятора з власною частотою  $\omega$ ,  $m = \int_0^{\infty} m(\omega) d\omega$  – загальна маса осцилюючих включень.

Для замикання системи (1) використаємо рівняння стану основного середовища  $\sigma = \sigma(u_x)$ , яке враховує фізичну нелінійність середовищ [3, с. 69] та нелокальний у часі та просторі характер взаємодії структурних елементів [20, р. 59]:

$$\sigma + \tau \sigma_t = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 + E_3 \varepsilon^3 + \theta \left( \sigma_{xx} - \sigma_x \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon + 1} + \eta \left[ \varepsilon_{xx} - \frac{(\varepsilon_x)^2}{\varepsilon + 1} \right] \right),$$

$$\varepsilon = u_x, \quad (2)$$

де  $\tau$  – час релаксації;  $E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – пружні сталі [4, с. 25];  $\theta$  – параметр

просторової нелокальності;  $\eta$  – параметр, пропорційний замороженій швидкості звуку в середовищі.

Як показали попередні дослідження [13], модель (1) з рівнянням стану  $\sigma = E_1\varepsilon + E_3\varepsilon^3$  має періодичні, солітоноподібні та компактонні хвильові розв'язки. Метою роботи є дослідження хвильових розв'язків узагальненої моделі (1), (2), вивчення змін у структурі розв'язків при варіюванні параметрів моделі.

Виберемо функцію  $m(\omega)$  у вигляді  $m(\omega) = m\delta(\omega - \omega_0)$ , що відповідає моделі середовища з урахуванням осциляторів з частотою  $\omega_0$ ;  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака. Розглянемо хвильові розв'язки моделі (1), (2) вигляду

$$u = U(s), \quad w = W(s), \quad s = x - Dt, \quad (3)$$

де  $D$  – швидкість хвильового фронту.

Після переходу до змінних (3) отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma &= D^2(mZ + R), \quad Z = W', \quad R = U', \\ Z'' + \Omega^2(Z - R) &= 0, \\ \sigma - \tau D\sigma' &= E_1R + E_2R^2 + E_3R^3 + \theta \left( \sigma'' - \sigma' \frac{R'}{R+1} + \eta \left[ R'' - \frac{(R')^2}{R+1} \right] \right), \end{aligned}$$

де  $\Omega = \omega D^{-1}$ .

Отриману систему запишемо у нормальному вигляді

$$\begin{aligned} Z' &= Y, \quad Y' = -\Omega^2(Z - R), \quad R' = X, \\ X' &= \frac{\sum_{j=1}^3 E_j R^j - D^2(R + mZ) - D^2 m \Omega^2 \theta (Z - R) + D^3 \tau \{mY + X\}}{-(\eta + D^2)\theta} + \\ &\quad + \frac{\frac{X\theta}{R+1} (\eta X + D^2 \{X + mY\})}{(\eta + D^2)\theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Динамічна система (4) є нелінійною і знайти її загальний розв'язок не вдається. При аналізі таких багатовимірних систем достатньо ефективними є методи якісного аналізу [17, 21] у поєднанні з числовими засобами їх інтегрування [15, 23].

Перш за все, знайдемо стаціонарні точки динамічної системи (4), прирівнявши праві частини рівнянь до нуля. Тоді координати стаціонарних точок задовольняють таку алгебраїчну систему:

$$\sum_{j=1}^3 E_j R^j - D^2(R + mZ) = 0, \quad Z = R.$$

Отже, динамічна система (4) має три стаціонарні точки:

$$\begin{aligned} R_0 &= Z_0 = 0, \\ R_1 &= Z_1 = \frac{-E_2 + \sqrt{E_2^2 + 4E_3(D^2\{m+1\} - E_1)}}{2E_3}, \\ R_2 &= Z_2 = \frac{-E_2 - \sqrt{E_2^2 + 4E_3(D^2\{m+1\} - E_1)}}{2E_3}, \quad X_j = Y_j = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В околі стаціонарних точок класифікацію їх стійкості можна провести за допомогою аналізу матриці лінеаризованої системи

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix},$$

де

$$c_3 = \frac{D^2 m(1 + \Omega^2 \theta)}{\theta(D^2 + \eta)}, \quad c_4 = -\frac{D^3 m \tau}{\theta(D^2 + \eta)},$$

$$c_5 = -\frac{E_1 + R_j(2E_2 + 3E_3 R_j) + D^2(m\Omega^2 \theta - 1)}{\theta(D^2 + \eta)}, \quad c_6 = -\frac{D^3 \tau}{\theta(D^2 + \eta)}.$$

Тоді характеристичне рівняння для  $J$  має вигляд

$$\lambda^4 + \mu_3 \lambda^3 + \mu_2 \lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_0 = 0, \quad (6)$$

де

$$\mu_3 = -c_6, \quad \mu_2 = c_1 - c_5, \quad \mu_1 = -c_1(c_4 + c_6), \quad \mu_0 = -c_1(c_3 + c_5).$$

Найбільш простим і водночас ефективним з точки зору аналізу дисипативних структур є вивчення періодичних режимів. Для встановлення умов їх існування використаємо необхідні умови теореми Андронова – Гопфа [21]. Згідно з цією теоремою в околі стаціонарної точки можлива поява періодичного розв'язку, якщо матриця лінеаризованої системи має пару суто уявних власних значень, тоді як інші власні значення мають від'ємні дійсні частини.

Розглянемо необхідні умови наявності двох суто уявних розв'язків характеристичного рівняння (6). Припустимо, що рівняння (6) має корені  $\pm iS$ . Тоді виконуються тотожності

$$S^4 - i\mu_3 S^3 - \mu_2 S^2 + i\mu_1 S + \mu_0 = 0,$$

$$S^4 + i\mu_3 S^3 - \mu_2 S^2 - i\mu_1 S + \mu_0 = 0.$$

Розглядаючи півсуму та піврізницю цих рівнянь, запишемо співвідношення у вигляді алгебраїчної системи

$$S^4 - \mu_2 S^2 + \mu_0 = 0, \quad -\mu_3 S^2 + \mu_1 = 0.$$

Виключаючи з них змінну  $S$ , отримаємо наступну умову:

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu_3}\right)^2 - \frac{\mu_2 \mu_1}{\mu_3} + \mu_0 = 0$$

або, враховуючи (6),

$$c_1 c_4 (c_4 + c_6) + c_6 (c_4 c_5 - c_3 c_6) = 0.$$

Підставляючи значення величин  $c_i$ , отримаємо

$$E_1 + 2E_2 R_j + 3E_3 R_j^2 - \eta \Omega^2 (1 + m) \theta = 0,$$

де  $R_j$  визначені співвідношеннями (5).

Звідси однозначно визначаємо, наприклад, залежність

$$\theta = \frac{E_1 + R_j(2E_2 + 3E_3 R_j)}{\eta \Omega^2 (1 + m)}. \quad (7)$$

Отриманий вираз визначає криву нейтральної стійкості, яка слугуватиме відправною точкою для числового інтегрування динамічної системи (4).

Зафіксуємо значення параметрів динамічної системи (4)  $\omega = 1$ ,  $m = 0.8$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $E_1 = 1$ ,  $E_2 = 0$ ,  $E_3 = 0.8$ ,  $\eta = 20$ . Тоді у площині параметрів  $(D, \theta)$  графік функції (7) має вигляд, зображений на рис. 1. При цих значеннях параметрів матриця  $J$  на лінії (7) має пару суто уявних значень та два комплексно-спряжені власні значення з від'ємними дійсними частинами. Зміщення з кривої (7) у верхню півплощину відповідає появі власних значень з додатними дійсними частинами, тобто стаціонарна точка  $(Z_1, Y_1, R_1, X_1)$  втрачає стійкість. Тут точка  $Q$  має координати  $Q(1.1, 0.152)$ .

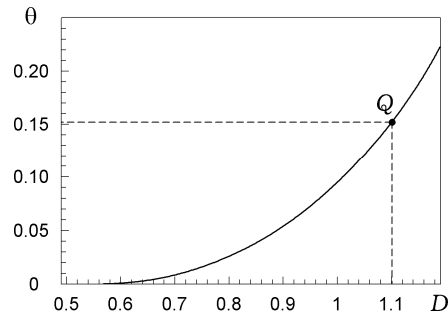


Рис. 1. Крива нейтральної стійкості.

Зафіксувавши значення параметра  $D = 1.1$ , за формулою (7) обчислимо  $\theta_{cr} = 0.152$ . Розглянемо типові розв'язки, які виникають при зростанні параметра просторової нелокальності  $\theta$ . Для числового інтегрування динамічної системи (4) використаємо метод Дормана – Принса [15, с. 454]. Якщо вибрати початкові умови поблизу стаціонарної точки  $(Z_1, Y_1, R_1, X_1)$  та значення  $\theta$  поблизу точки  $Q$ , то спостерігатимемо появу граничного циклу у фазовому просторі динамічної системи (4) в околі точки  $(Z_1, Y_1, R_1, X_1)$ . Народження граничного циклу відповідає появі періодичних коливань у вихідній моделі (1), (2).

Для аналізу розвитку коливань залежно від зміни параметра  $\theta$  використаємо техніку перерізів Пуанкаре [17, 23]. Для цього виберемо січну гіперплощину  $Y = 0$  та розглянемо точки (переріз Пуанкаре), в яких траєкторії системи (4) перетинають цю площину в одному напрямі. Таким чином, граничному циклу відповідатиме одна точка у січній площині. Якщо одну з трьох незафіксованих координат цієї точки відкласти вздовж вертикальної осі координат, а значення параметра  $\theta$  – вздовж горизонтальної осі, то отримаємо біфуркаційну діаграму Пуанкаре (рис. 2) (деталі побудови таких діаграм можна знайти у [17, 23]).

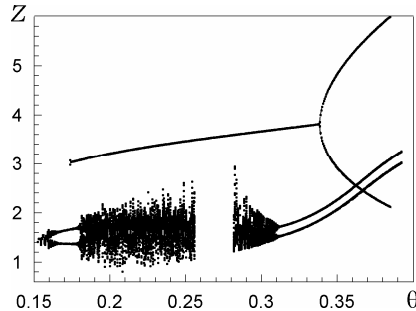


Рис. 2. Біфуркаційна діаграма Пуанкаре при зростанні параметра  $\theta$ .

Розглянемо більш детально діаграму рис. 2, аналізуючи типові фазові портрети атракторів та їх перерізи Пуанкаре при різних значеннях  $\theta \in (0.152, 0.32)$ .

З аналізу рис. 2 (нижній графік) випливає, що після появи граничного циклу поблизу  $\theta_{cr}$  одразу утворюється складна траєкторія, проекцію фазового портрету якої при  $\theta = 0.155$  зображено на рис. 3а.

Переріз Пуанкаре (рис. 3б) свідчить про те, що атрактор схожий до торової поверхні в чотиривимірному просторі, яка складається з декількох трубок, щільно припасованих одна до одної. Але при зростанні  $\theta$  спостерігається розділення трубок атрактора, так що вже при  $\theta = 0.16$  переріз Пуанкаре (рис. 4а) містить дві відокремлені лінії перерізу поверхні атрактора. Слід зазначити, що на діаграмі рис. 2 інтервал  $\theta \in (0.16, 0.18)$  відповідає атракторам, для яких переріз Пуанкаре є суцільною лінією, а, отже, маємо атрактор з розмірністю чотири. У той же час поза цим інтервалом переріз Пуанкаре (рис. 3б та рис. 4б) визначається неоднорозмірним об'єктом, що говорить про дробову розмірність атрактора.

Порівняння перерізів Пуанкаре (рис. 4) свідчить про утворення хаотичного атратора шляхом руйнування тора, хоча сценарій переходу до хаосу [19, с. 131] вимагає більш детального аналізу.

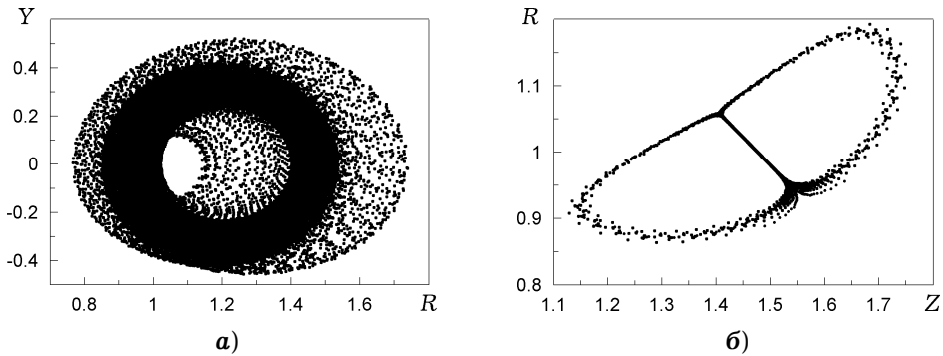


Рис. 3. *а*) – проекція фазового портрету атратора на площину  $(Z, R)$ ; *б*) – його переріз Пуанкаре січною гіперплощиною  $Y = 0$  при  $\theta = 0.155$ .

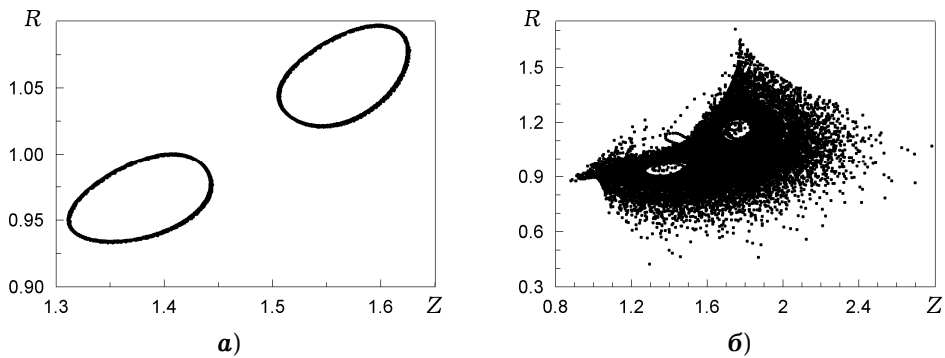


Рис. 4. Перерізи Пуанкаре: *а*) – при  $\theta = 0.16$ ; *б*) – при  $\theta = 0.24$ .

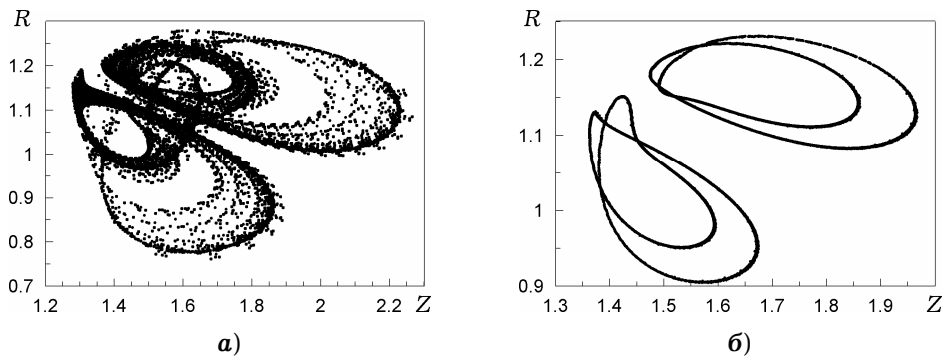


Рис. 5. Перерізи Пуанкаре: *а*) – при  $\theta = 0.285$ ; *б*) – при  $\theta = 0.3$ .

Як свідчить діаграма рис. 2, при деякому значенні  $\theta$  спостерігається руйнування атратора. На біфуркаційній діаграмі існує інтервал значень  $\theta$ , для яких в області фазового простору, де існував хаотичний атратор, жодного локалізованого розв'язку не виявлено. Але при  $\theta > 0.28$  у цій області фазового простору знову виявлено атратор, перерізи Пуанкаре якого зображені на рис. 5. Порівняння їх з перерізами Пуанкаре рис. 4 свідчить про суттєві зміни у структурі атратора. У цьому інтервалі значень  $\theta$  спостерігаються біфуркації подвоєння тора. Подібні сценарії розвитку коливань реалізуються при збуренні гамільтонових систем, до яких застосовна теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера (теорема КАМ) [19, 21].

При подальшому зростанні параметра  $\theta$  (рис. 2) тор згортається, і у фазовому просторі системи (4) залишається складна періодична траєкторія.

Досліджений аттрактор – не єдиний у фазовому просторі. Встановлено, що при вдалому виборі початкових умов можна потрапити на відокремлений граничний цикл, який при зміні параметра  $\theta$  зазнає лише однієї біфуркації подвоєння періоду (рис. 2, верхній графік). Ця періодична траєкторія не пов'язана з кривою нейтральної стійкості (7), оскільки вона руйнується при значеннях  $\theta$  більших, ніж  $\theta_{cr}$ .

Таким чином, викладені дослідження показують, що математична модель (1), (2) має періодичні, мультиперіодичні, квазіперіодичні та хаотичні хвильові розв'язки. Використання прийомів числового та якісного аналізу дозволило вказати значення параметрів моделі, при яких появляються локалізовані режими, та провести їх класифікацію. Як впливає з аналізу біфуркаційних діаграм, врахування нелокальних ефектів (параметри  $\theta$  та  $\tau$ ) та коливної динаміки включень може виступати причиною утворення локалізованих дисипативних структур у складних середовищах. Наявність інтервалів значень  $\theta$ , які відповідають найбільш різноманітним хвильовим режимам, вказує на існування характерних розмірів структурних елементів, коли середовище найбільш активно проявляє особливості своєї внутрішньої структури та здатне до самоорганізації.

1. Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В. Элементы теории самоорганизации и нелинейных волновых процессов в природных средах со структурой / НАН Украины. Ин-т геофизики им. С. И. Субботина. – Препр. – Киев, 1991. – 44 с.
2. Гарагаи И. А., Николаевский В. Н. Механика Коссера для наук о Земле // Вычисл. механика сплошных сред. – 2009. – 2, № 4. – С. 44–66.
3. Даниленко В. А., Даневич Т. Б., Скуратовский С. И. Нелинейные математические модели сред с временной и пространственной нелокальностями. – Киев: Ин-т геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, 2008. – 86 с.
4. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 327 с.  
Te same: *Erofeyev V. I. Wave processes in solids with microstructure.* – Singapore: World Sci. Publ., 2003. – 256 p.
5. Монин А. С. О природе турбулентности // Успехи физ. наук. – 1978. – 125, № 5. – С. 97–122.
6. Николаевский В. Н. Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как возможная модель сейсмоактивной среды // Докл. АН СССР. – 1985. – 283, № 6. – С. 1321–1324.
7. Пальмов В. А. Об одной модели среды сложной структуры // Прикл. математика и механика. – 1969. – Вып. 4. – С. 768–773.
8. Пальмов В. А. Приложение теории обобщенного континуума к проблеме пространственного затухания в сложных механических системах // Вычисл. механика сплошных сред. – 2009. – 2, № 4. – С. 105–110.
9. Потапов А. И. Волны деформации в среде с внутренней структурой // Сб. «Нелинейные волны 2004». – Нижний Новгород: Ин-т прикл. физики РАН, 2005. С. 125–140.
10. Родионов В. Н. Очерк геомеханики. – Москва: Науч. мир, 1996. – 64 с.
11. Руденко О. В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физ. наук. – 2006. – 176, № 1. – С. 77–95.
12. Садовский М. А. Автомодельность геодинамических процессов // Вестн. АН СССР. – 1986. – № 8. – С. 3–11.
13. Скуратовский С. И., Скуратовская И. А. Локализованные автоволновые решения нелинейной модели сложной среды // Электронный журнал «Техн. акустика». – <http://ejta.org>, 2010, 6.
14. Слепян Л. И. Волна деформаций в стержне с амортизированными массами // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 5. – С. 34–40.
15. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – Москва: Мир, 1990. – 512 с.  
Te same: *Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems.* – Berlin: Springer-Verlag, 1987.

16. Хасанов М. М., Булгакова Г. Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. – Москва–Ижевск: Изд-во Ин-та компьют. исследований, 2003. – 288 с.
17. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. – Москва: Мир, 1991. – 368 с.
18. Чугаевский Ю. В. Элементы теории нелинейных и быстропеременных волновых процессов. – Кишинев: Штиинца, 1974. – 183 с.
19. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – Москва: Мир, 1988. – 240 с.  
Te same: Schuster H. G. Deterministic chaos. An introduction. – Weinheim: Physik-Verlag, 1984.
20. Danylenko V. A., Danevych T. B., Makarenko O. S., Skurativskiy S. I., Vladimirov V. A. Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. – Kyiv: Subbotin Inst. of Geophysics NASU, 2011. – 333 p.
21. Guckenheimer J., Holmes Ph. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 459 p.
22. Mechanics of generalized continua: One hundred years after the Cosserat / Eds. G. A. Maugin, A. V. Metrikine. – Springer, 2010. – 337 p.
23. Parker T. S., Chua L. O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. – New York: Springer-Verlag, 1989. – 349 p.

#### **ХАОТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

*Статья посвящена исследованию волновых решений математической модели сложной среды, учитывающей нелокальное взаимодействие структурных элементов основной среды и осциллирующей динамики дополнительного континуума (включений). Методами численного и качественного анализа показано, что динамическая система с четырехмерным фазовым пространством имеет периодические, мультипериодические, квазипериодические и хаотические решения. Построены бифуркационные диаграммы развития колебаний в зависимости от параметров нелокальности динамического уравнения состояния среды.*

#### **CHAOTIC WAVE SOLUTIONS OF NONLOCAL MODELS FOR MEDIA WITH OSCILLATING INCLUSIONS**

*The article is devoted to investigations of wave solutions of a mathematical model for complex medium which takes into account the nonlocal interaction of structural elements of carrying and oscillating dynamics of additional continuum (inclusions). By means of the methods of numerical and qualitative analysis it is shown that the dynamic system with four-dimensional phase space has periodic, multiperiodic, quasiperiodic, and chaotic solutions. The bifurcation diagrams of oscillations development with respect to the parameters of nonlocality at the dynamical equation of state are constructed.*

Відділення геодинаміки вибуху  
Ін-ту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ

Одержано  
05.12.11