

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ТОРЦАМИ И НЕСОВЕРШЕННЫМ КОНТАКТОМ СЛОЕВ

Исследуются колебания двухслойной пластины произвольной толщины с жестко зацементированными плоскими гранями и скользящим контактом слоев. Методом однородных решений исходная краевая задача приведена к счетному множеству двумерных задач. Предложена методика исследования спектральных характеристик SH и P-SV волн. Исследовано влияние механических и геометрических параметров на изменение фазовых и групповых скоростей, частот запираания.

Введение. Приведение трехмерных задач теории упругости к двумерным осуществляется приближенными и точными аналитическими методами. Наиболее распространенными среди приближенных методов являются метод гипотез, асимптотические методы и метод аппроксимаций искомых величин рядами Фурье [10, 11, 13, 19, 22–24]. Развитие приближенных теорий поперечно-неоднородных пластин отражено, например, в обзорных статьях [14, 15, 19, 21–24]. Одним из эффективных точных методов сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным является метод однородных решений [16]. Применение однородных решений в задачах равновесия и установившихся колебаний пластин частично отражено в публикациях [1–7, 16, 20] и обзорных статьях [8, 9, 13, 15, 18]. Колебания двухслойных пластин с жестко зацементированными плоскими гранями и идеальным контактом слоев исследовались с использованием метода однородных решений в работе [2]. Здесь аналогичная задача решена в случае скользящего контакта слоев.

Постановка задачи. Рассматриваются гармонические колебания пластины, составленной из двух изотропных слоев. Плоские грани пластины жестко зацементированы, а слои находятся в условиях скользящего контакта. На боковой поверхности действуют внешние гармонически изменяющиеся во времени усилия. Отнесем пластину к размерным прямоугольным координатам $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Плоскость $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ совместим с плоскостью контакта слоев, а ось $O\tilde{x}_3$ направим перпендикулярно торцам пластины. Пусть h_m – толщины слоев, \tilde{G}_m – модули сдвига, ν_m – коэффициенты Пуассона, $\tilde{\rho}_m$ – плотности материалов, $m = 1, 2$ – номера соответственно верхнего и нижнего слоев. Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\tilde{x}_1}{R}, & x_2 &= \frac{\tilde{x}_2}{R}, & x_3 &= \frac{\tilde{x}_3}{h} = \frac{\tilde{x}_3}{\lambda R}, \\ \lambda &= \frac{h}{R}, & \lambda_1 &= \frac{h_1}{h}, & \lambda_2 &= \frac{h_2}{h}, & G &= \frac{\tilde{G}_1}{\tilde{G}_2}, & \rho &= \frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_2}, \\ u_{i(m)} &= \frac{\tilde{u}_{i(m)}}{R}, & \sigma_{ij(m)} &= \frac{\tilde{\sigma}_{ij(m)}}{2\tilde{G}_2}, & i, j &= 1, 2, 3, \\ h &= h_1 + h_2, & \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \end{aligned}$$

где R – характерный линейный размер.

Задача сводится к интегрированию систем уравнений движения

$$\begin{aligned} \partial_3^2 u_{j(m)} + (\lambda^2 D^2 + \Omega_m^2) u_{j(m)} + \lambda^2 \nu_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0, & j &= 1, 2, \\ \partial_3^2 u_{3(m)} + (\lambda^2 D^2 + \Omega_m^2) u_{3(m)} + \lambda \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом граничных условий на плоских гранях и на поверхности контакта [17] слоев пластины

$$\begin{aligned}
u_{i(1)}(x_1, x_2, \lambda_1) &= 0, & u_{i(2)}(x_1, x_2, -\lambda_2) &= 0, & i &= 1, 2, 3, \\
u_{3(1)}(x_1, x_2, 0) &= u_{3(2)}(x_1, x_2, 0), & \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, 0) &= \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, 0), \\
\sigma_{13(1)}(x_1, x_2, 0) &= 0, & \sigma_{23(1)}(x_1, x_2, 0) &= 0, \\
\sigma_{13(2)}(x_1, x_2, 0) &= 0, & \sigma_{23(2)}(x_1, x_2, 0) &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\partial_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, & D^2 &= \partial_1^2 + \partial_2^2, & \theta_m &= \partial_1 u_{1(m)} + \partial_2 u_{2(m)} + \frac{1}{\lambda} \partial_3 u_{3(m)}, \\
v_{0(m)} &= \frac{1}{1 - 2\nu_m}, & \Omega_m &= \frac{\omega \hbar}{c_{S(m)}}, & c_{S(m)}^2 &= \frac{\tilde{G}_m}{\tilde{\rho}_m},
\end{aligned}$$

$c_{S(m)}$ – скорости поперечной объемной волны в материалах слоев.

Приведение трехмерной краевой задачи (1), (2) к двумерной осуществим методом однородных решений.

Однородные решения задачи. Решение задачи (1), (2) представим суммой вихревого $u_{i(m)}^V$ и потенциального $u_{i(m)}^P$ состояний:

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)}^V(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)}^P(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2.$$

Перемещения вихревого решения имеют вид

$$\begin{aligned}
u_{1(m)}^V(x_1, x_2, x_3) &= p_m(x_3) \partial_2 B(x_1, x_2), \\
u_{2(m)}^V(x_1, x_2, x_3) &= -p_m(x_3) \partial_1 B(x_1, x_2), \\
u_{3(m)}^V(x_1, x_2, x_3) &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Неизвестные функции $B(x_1, x_2)$ и $p_m(x_3)$ в выражениях (3) определяются из краевой задачи (1), (2). Тогда для функции $B(x_1, x_2)$ получим уравнение

$$\lambda^2 D^2 B(x_1, x_2) = \delta^2 B(x_1, x_2),$$

а для функций $p_m(x_3)$ и значений δ имеем спектральную задачу:

$$\begin{aligned}
p_m''(x_3) + \ell_m^2 p_m(x_3) &= 0, \\
p_1(\lambda_1) &= 0, & p_1'(0) &= 0, & p_2'(0) &= 0, & p_2(-\lambda_2) &= 0,
\end{aligned}$$

где $\ell_m^2 = \Omega_m^2 + \delta^2$. Ее решение имеет вид

$$p_{k(1)} = \cos \ell_{k(1)} x_3, \quad p_{k(2)} = \cos \ell_{k(2)} x_3.$$

Собственные значения δ_k определяются в явном виде:

$$\delta_{k(m)} = \sqrt{\frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_m} - \Omega_m^2}, \quad \{\delta_k\} = \{\delta_{k(1)}\} \cup \{\delta_{k(2)}\}. \tag{4}$$

Выражения (4) позволяют исследовать частотные спектры SH волн в двухслойной пластине. Счетное множество действительных и мнимых собственных значений δ_k зависит только от величин G , ρ , λ_m .

Потенциальное состояние введем с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
u_{j(m)}^P(x_1, x_2, x_3) &= n_m(x_3) \partial_j C(x_1, x_2), & j &= 1, 2, \\
u_{3(m)}^P(x_1, x_2, x_3) &= q_m(x_3) C(x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{5}$$

Подстановкой выражений (5) в (1) и (2) приходим к спектральным задачам для определения функций $n_m(x_3)$, $q_m(x_3)$ и параметра γ :

$$\begin{aligned}
n_m''(x_3) + [\Omega_m^2 + \gamma^2(1 + v_{0(m)})]n_m(x_3) + \lambda v_{0(m)}q_m'(x_3) &= 0, \\
q_m''(x_3) + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + v_{0(m)}}q_m(x_3) + \frac{\gamma^2 v_{0(m)}}{\lambda(1 + v_{0(m)})}n_m'(x_3) &= 0, \\
n_1(\lambda_1) = 0, \quad q_1(\lambda_1) = 0, \quad n_2(-\lambda_2) = 0, \quad q_2(-\lambda_2) = 0, \\
\lambda q_1(0) + n_1'(0) = 0, \quad \lambda q_2(0) + n_2'(0) = 0, \quad q_1(0) = q_2(0), \\
G(v_{0(1)} - 1)\gamma^2 n_1(0) + \lambda(1 + v_{0(1)})q_1'(0) = (v_{0(2)} - 1)\gamma^2 n_2(0) + \\
+ \lambda(1 + v_{0(2)})q_2'(0),
\end{aligned} \tag{6}$$

и уравнению относительно функции $C(x_1, x_2)$:

$$\lambda^2 D^2 C(x_1, x_2) = \gamma^2 C(x_1, x_2).$$

Общим решением системы (6) являются функции

$$\begin{aligned}
n_m(x_3) &= H_{1(m)} \cos \gamma_{1(m)} x_3 + H_{2(m)} \sin \gamma_{1(m)} x_3 + \\
&+ H_{3(m)} \cos \gamma_{2(m)} x_3 + H_{4(m)} \sin \gamma_{2(m)} x_3, \\
\lambda q_m(x_3) &= \gamma_{1(m)} (H_{2(m)} \cos \gamma_{1(m)} x_3 - H_{1(m)} \sin \gamma_{1(m)} x_3) + \\
&+ a_{2(m)} (H_{4(m)} \cos \gamma_{2(m)} x_3 - H_{3(m)} \sin \gamma_{2(m)} x_3).
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\gamma_{1(m)}^2 = k_m^2 \Omega_m^2 + \gamma^2, \quad \gamma_{2(m)}^2 = \Omega_m^2 + \gamma^2, \quad k_m^2 = \frac{1 - 2v_m}{2 - 2v_m}, \quad a_{2(m)} = \frac{\gamma^2}{\gamma_{2(m)}}. \tag{9}$$

Для определения неизвестных коэффициентов $H_{i(m)}$, $i = 1, \dots, 4$, $m = 1, 2$, подставим выражения (8) в граничные условия (7) с учетом обозначений (9). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений восьмого порядка:

$$\begin{aligned}
C_{1(1)}H_{1(1)} + S_{1(1)}H_{2(1)} + C_{2(1)}H_{3(1)} + S_{2(1)}H_{4(1)} &= 0, \\
\gamma_{1(1)}S_{1(1)}H_{1(1)} - \gamma_{1(1)}C_{1(1)}H_{2(1)} + a_{2(1)}S_{2(1)}H_{3(1)} - a_{2(1)}C_{2(1)}H_{4(1)} &= 0, \\
C_{1(2)}H_{1(2)} - S_{1(2)}H_{2(2)} + C_{2(2)}H_{3(2)} - S_{2(2)}H_{4(2)} &= 0, \\
\gamma_{1(2)}S_{1(2)}H_{1(2)} + \gamma_{1(2)}C_{1(2)}H_{2(2)} + a_{2(2)}S_{2(2)}H_{3(2)} + a_{2(2)}C_{2(2)}H_{4(2)} &= 0, \\
2\gamma_{1(1)}H_{2(1)} + b_{2(1)}H_{4(1)} = 0, \quad 2\gamma_{1(2)}H_{2(2)} + b_{2(2)}H_{4(2)} &= 0, \\
\gamma_{1(1)}H_{2(1)} + a_{2(1)}H_{4(1)} - \gamma_{1(2)}H_{2(2)} - a_{2(2)}H_{4(2)} &= 0, \\
G\Upsilon_1 H_{1(1)} - 2G\gamma^2 H_{3(1)} - \Upsilon_2 H_{1(2)} + 2\gamma^2 H_{3(2)} &= 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
S_{j(m)} &= \sin \gamma_{j(m)} \lambda_m, \quad C_{j(m)} = \cos \gamma_{j(m)} \lambda_m, \quad j, m = 1, 2, \\
b_{2(m)} &= \frac{\gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2}{\gamma_{2(m)}}, \quad \Upsilon_m = (v_{0(m)} - 1)\gamma^2 - (v_{0(m)} + 1)\gamma_{1(m)}^2.
\end{aligned}$$

Нетривиальное решение системы (10) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_{1(1)} &= \frac{1}{2}(2\xi_1\Delta_{2(1)} - \tau_1)\gamma_{1(2)}\Omega_2^2\Delta_{1(2)}, & H_{2(1)} &= \xi_1\Delta_{1(1)}\gamma_{1(2)}\Omega_2^2\Delta_{1(2)}, \\
H_{3(1)} &= t_1(2\Delta_{3(1)} - \xi_1)\gamma_{1(2)}\Omega_2^2\Delta_{1(2)}, & H_{4(1)} &= -2t_1\Delta_{1(1)}\gamma_{1(2)}\Omega_2^2\Delta_{1(2)}, \\
H_{1(2)} &= -\frac{1}{2}\Omega_1^2\gamma_{1(1)}\Delta_{1(1)}(2\xi_2\Delta_{2(2)} - \tau_2), & H_{2(2)} &= \Omega_1^2\gamma_{1(1)}\Delta_{1(1)}\xi_2\Delta_{1(2)}, \\
H_{3(2)} &= -\Delta_{1(1)}t_1\Omega_1^2\gamma_{1(2)}(2\Delta_{3(2)} - \xi_2), & H_{4(2)} &= -2\Omega_1^2\Delta_{1(1)}\gamma_{1(2)}t_2\Delta_{1(2)}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
t_m &= \gamma_{1(m)}\gamma_{2(m)}, & \tau_m &= 4\gamma^2\gamma_{1(m)}\gamma_{2(m)}, & \xi_m &= \gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2, \\
\Delta_{1(m)} &= t_m S_{1(m)} C_{2(m)} - \gamma^2 C_{1(m)} S_{2(m)}, \\
\Delta_{2(m)} &= t_m C_{1(m)} C_{2(m)} + \gamma^2 S_{1(m)} S_{2(m)}, \\
\Delta_{3(m)} &= t_m S_{1(m)} S_{2(m)} + \gamma^2 C_{1(m)} C_{2(m)}.
\end{aligned}$$

Из условия равенства нулю определителя системы (10) получим дисперсионное уравнение для нахождения собственных значений γ :

$$P(\gamma, \Omega; G, \rho, v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \rho\gamma_{1(1)}\Delta_{1(1)}\Delta_{4(2)} + G^2\gamma_{2(1)}\Delta_{4(1)}\Delta_{1(2)} = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_{4(m)} &= t_m(\xi_m^2 + 4\gamma^4)C_{1(m)}C_{2(m)} + \gamma^2(\xi_m^2 + 4t_m^2)S_{1(m)}S_{2(m)} - \tau_m\xi_m, \\
\Omega &= \Omega_2.
\end{aligned}$$

В отличие от выражений (4) для вихревого состояния, в дисперсионном уравнении (11) присутствуют дополнительно коэффициенты Пуассона v_m . Уравнение (11) может быть использовано для описания частотных спектров P - SV волн.

Асимптотический анализ дисперсионных уравнений. Безразмерные фазовые $v_p = i\frac{\Omega}{\delta}$ и групповые $v_g = i\frac{d\Omega}{d\delta}$ скорости распространяющихся мод SH волн определяются в явном виде из выражений (4):

$$\begin{aligned}
v_{p(m)} &= \frac{\Omega}{\Delta_{5(m)}}, & v_{g(m)} &= \frac{\Omega\Delta_{5(m)}}{\Omega_m^2}, \\
\Delta_{5(m)} &= \sqrt{\Omega_m^2 - (\pi(k-1/2)/\lambda_m)^2}.
\end{aligned}$$

Одной из основных характеристик P - SV волн являются частоты запирания [12]. Для их определения в соотношении (11) полагаем $\gamma = 0$ и получаем трансцендентное уравнение

$$P(0, \Omega; G, \rho, v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv c_{2(1)}c_{2(2)}(G\Omega_1k_2c_{1(1)}s_{1(2)} + \Omega_2k_1s_{1(1)}c_{1(2)}) = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
s_{1(m)} &= \sin k_m \Lambda_m, & s_{2(m)} &= \sin \Lambda_m, & c_{1(m)} &= \cos k_m \Lambda_m, \\
c_{2(m)} &= \cos \Lambda_m, & \Lambda_m &= \Omega_m \lambda_m.
\end{aligned}$$

Из уравнения (12) определяются три серии частот запирания. Две из них имеют вид

$$\Omega_{p1} = \frac{\pi}{\lambda_1} \left(p - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$$\Omega_{p2} = \frac{\pi}{\lambda_2} \left(p - \frac{1}{2} \right), \quad p = 1, 2, \dots,$$

а третья серия частот записания определяется из уравнения

$$G\Omega_1 k_2 c_{1(1)} s_{1(2)} + \Omega_2 k_1 s_{1(1)} c_{1(2)} = 0.$$

Частоты первой и второй серий не зависят от коэффициентов Пуассона ν_m , в отличие от частот третьей серии. Кроме того, частоты второй серии также не зависят от относительной жесткости G . При некоторых сочетаниях физико-механических характеристик материалов слоев и их толщин частоты разных серий могут совпадать.

Важным является исследование поведения мнимых корней дисперсионного уравнения (11) в высокочастотной коротковолновой области ($\Omega \gg 1$, $\nu \gg 1$, $\nu > \Omega_1$, $\nu > \Omega_2$, где $\nu = \text{Im } \gamma$). С этой целью в (11) устремим $\nu \rightarrow \infty$ и получим

$$(r_1 s_1 - 1)(r_2 s_2 - 1)[r_1 \Omega_1^2 ((1 + s_2^2)^2 - 4r_2 s_2) + G r_2 \Omega_2^2 ((1 + s_1^2)^2 - 4r_1 s_1)] = 0.$$

Множитель $(r_1 s_1 - 1)(r_2 s_2 - 1)$ не дает дополнительных корней в рассматриваемой области. Это уравнение преобразуется с точностью до обозначений к известному [12] для нахождения скорости c_{St} волны Стоунли

$$\rho r_1 ((1 + s_2)^2 - 4r_2 s_2) + G^2 r_2 ((1 + s_1)^2 - 4r_1 s_1) = 0, \quad (13)$$

где

$$r_m^2 = 1 - \frac{c^2}{c_{P(m)}^2}, \quad s_m^2 = 1 - \frac{c^2}{c_{S(m)}^2}, \quad c_{P(m)} = c_{S(m)} \sqrt{\frac{2(1 - \nu_m)}{1 - 2\nu_m}},$$

$c_{P(m)}$ – скорости продольной объемной волны в материалах слоев.

Представляют интерес случаи, когда один из слоев более жесткий по сравнению с другим. При $G \rightarrow 0$ (верхний слой абсолютно мягкий) дисперсионное уравнение (11) преобразуется к виду

$$(\gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} \sin \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 - \gamma^2 \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \sin \gamma_{2(1)} \lambda_1) \times \\ \times ((3 - 4\nu_2) \cos^2 \gamma \lambda_2 - (\gamma \lambda_2)^2 + (1 - 2\nu_2)^2) = 0 \quad (14)$$

и описывает колебания верхнего [3] и равновесие нижнего [1] слоев. В случае $G \rightarrow \infty$ (нижний слой абсолютно мягкий) имеем

$$((3 - 4\nu_1) \cos^2 \gamma \lambda_1 - (\gamma \lambda_1)^2 + (1 - 2\nu_1)^2) (\gamma_{1(2)} \gamma_{2(2)} \sin \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2 - \\ - \gamma^2 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \sin \gamma_{2(2)} \lambda_2) = 0. \quad (15)$$

Здесь верхний слой находится в состоянии равновесия [1], а нижний совершает гармонические колебания [3].

Для перехода к однослойной пластине в уравнении (11) необходимо принять толщину одного из слоев равной нулю. Если $\lambda_1 = 0$, тогда

$$\gamma_{1(2)} \gamma_{2(2)} \sin \gamma_{1(2)} \cos \gamma_{2(2)} - \gamma^2 \cos \gamma_{1(2)} \sin \gamma_{2(2)} = 0.$$

В случае $\lambda_2 = 0$ получим уравнение

$$\gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} \sin \gamma_{1(1)} \cos \gamma_{2(1)} - \gamma^2 \cos \gamma_{1(1)} \sin \gamma_{2(1)} = 0.$$

Эти уравнения совпадают с известными [3] для однослойной пластины с жестко защемленными плоскими гранями.

Рассмотрим случай соотношения упругих параметров слоев пластины $G = 1$, $\rho = 1$, $v_1 = v_2 = v$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ (однородная пластина с расслоением). Тогда уравнение (11) примет вид

$$(tS_1C_2 - \gamma^2C_1S_2)(\gamma^2(\xi^2 + 4t^2)S_1S_2 + t(\xi^2 + 4\gamma^4)C_1C_2 - 4t\xi) = 0, \quad (16)$$

где

$$C_j = \cos \frac{\gamma_j}{2}, \quad S_j = \sin \frac{\gamma_j}{2}, \quad j = 1, 2, \quad \gamma_1^2 = \gamma^2 + \frac{1-2v}{2-2v} \Omega^2, \\ \gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2, \quad t = \gamma_1\gamma_2, \quad \xi = \gamma^2 + \gamma_2^2, \quad \tau = 4\gamma^2\gamma_1\gamma_2.$$

При $v \rightarrow \infty$ для мнимых корней в области высоких частот уравнение (16) для низшей распространяющейся моды сводится к уравнению для нахождения скорости волны Рэлея

$$(1 + s^2)^2 - 4rs = 0. \quad (17)$$

Для поиска спектра частот запирааний однородной пластины с расслоением положим $\gamma = 0$ в уравнении (16) и получим две серии частот запираания: $\pi r \sqrt{2(1-v)/(1-2v)}$ и $\pi(2p-1)$, $p = 1, \dots, \infty$. Вторая серия частот является двукратной.

Численные исследования. Пусть верхний слой пластины изготовлен из алюминия и характеризуются такими параметрами среды:

$$\tilde{\rho}_1 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \tilde{G}_1 = 2.61 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad v_1 = 0.35, \quad c_{S1} = 3110 \text{ м/с},$$

а нижний – из вольфрама

$$\tilde{\rho}_2 = 18.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \tilde{G}_2 = 15.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad v_2 = 0.29, \quad c_{S2} = 2860 \text{ м/с}.$$

Рассмотрены такие варианты:

$$\text{вариант I} - \lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{2}{3}, \quad \text{вариант III} - \lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \frac{1}{3}, \\ \text{вариант II} - \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5, \quad \text{вариант IV} - \lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.1.$$

Данные табл. 1 иллюстрируют влияние относительных толщин и условий контакта слоев на изменение первых пяти частот запираания уравнения (12) для вариантов I – IV. В пятом столбце табл. 1 (вариант V) указаны значения частот запираания в однородной пластине из вольфрама. Ячейки таблицы содержат два значения: в числителе – значения частот запираания при скользящем контакте слоев пластины, а в знаменателе – при идеальном [2].

Таблица 1

Номер частоты	Варианты				
	I	II	III	IV	V
1	2.3562	3.1416	2.5611	1.8971	3.1416
	2.5862	3.1416	4.0846	3.7203	3.1416
2	4.8842	3.4148	4.7124	5.6913	3.1416
	4.8842	5.7766	5.7760	7.4160	5.7766
3	5.1222	5.9478	7.6833	7.6999	5.7766
	6.9239	6.2832	7.7997	7.6999	6.2832
4	7.0686	9.4248	7.7997	9.4855	9.4248
	10.0273	9.4248	10.1787	11.0197	9.4248
5	11.7810	10.2443	11.6415	13.2797	9.4248
	12.1340	11.5531	11.6415	14.2062	11.5531

Изменение относительных толщин слоев (варианты I – IV) оказывает заметное влияние на первую частоту запираания. Например, максимальное значение первой частоты 3.1416 ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$) в 1.7 раза превосходит ми-

нимальное значение 1.8971 ($\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 0.1$). Условия контакта слоев приводят к наибольшим изменениям первой частоты при $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 0.1$. Ее значение 3.7203 при идеальном контакте превосходит аналогичную величину 1.8971 в 1.9 раза. С ростом номера частоты записания растут быстрее при идеальном контакте, чем при неидеальном для любых относительных толщин. Совпадение некоторых значений частот запирающих объясняется тем, что уравнение (12) и аналогичное ему, полученное в работе [2], имеют общий множитель. В однородной пластине с расслоением из-за неидеального контакта первая частота записания совпадает с аналогичной при идеальном контакте (*вариант V*). Однако с увеличением номера частоты отношения соответствующих частот увеличиваются.

Влияние относительной жесткости G слоев на изменение частот записания показано в табл. 2. Значения остальных параметров выбирали такими: $\rho = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$. С увеличением значения G частоты записания не убывают, а значение первой частоты записания не изменяется, поскольку наименьший корень уравнения (12) принадлежит второй серии, и равно π . Установлено, что количество частот записания на фиксированном промежутке уменьшается с ростом G .

Таблица 2

Номер частоты	$G = 1$	$G = 1.5$	$G = 2$	$G = 10$	$G = 100$
1	3.1416	3.1416	3.1416	3.1416	3.1416
2	3.1416	3.8476	4.4429	9.4248	9.4248
3	6.5397	6.5367	7.8824	9.9346	11.6346
4	9.4248	9.4248	9.4248	10.3921	15.7080
5	9.4248	11.5429	13.3286	15.7080	21.9911

На основании дисперсионного уравнения (11) определяется счетное множество спектральных кривых – зависимостей параметра γ от частоты Ω при заданных величинах G , ρ , ν_1 , ν_2 , λ_1 , λ_2 . На рис. 1 – рис. 4 представлены дисперсионные спектры P - SV волн в пластине (рис. 1а – рис. 4а), фазовые (рис. 1б – рис. 4б) и групповые (рис. 1в – рис. 4в) скорости мод. Данные рис. 1 – рис. 4 соответствуют *вариантам I – IV*. Сплошные линии на диаграммах рис. 1а – рис. 4а соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей на действительную ($\text{Re } \gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im } \gamma, \Omega$) плоскости. Кривая каждой моды состоит из действительных, мнимых, комплексных ветвей и изменяется от нулевой частоты до бесконечной. Комплексные и действительные ветви соединяются в точках минимумов действительных и максимумов комплексных ветвей. Аналогичными свойствами обладают комплексные и мнимые ветви. Как и в однородной пластине, дисперсионные кривые ортогональны плоскости $\Omega = 0$ и оси $\gamma = 0$ в точках пересечения. Действительные и комплексные моды характеризуют стоячие волны. С увеличением относительной толщины верхнего слоя пластины количество действительных корней не изменяется и равно двум в области низких частот, что также характерно и для идеального контакта слоев пластины [2]. Однако значение корней изменяется, например, для первого действительного корня для *вариантов I – IV* при $\Omega \rightarrow 0$ имеем 1.370, 1.618, 1.209, 0.890 соответственно. Видно, что значение корня для *варианта II* превосходит аналогичное значение в *варианте IV* в 1.8 раза. Мнимые корни спектра соответствуют распространяющимся или бегущим модам. В области низких частот, $\Omega \ll 1$, отсутствуют мнимые корни и, как следствие, распространяющиеся моды. С увеличением частоты Ω изменяется число мнимых корней в каждом из четырех рассмотренных вариантов. Например, когда $\Omega = 15$, их количество

таково: вариант I – 6, вариант II – 6, вариант III – 7, вариант IV – 5 корней. В диапазоне частот $0 < \Omega \leq 4.68$ и в области $0 < \text{Re } \gamma \leq 20$, $0 < \text{Im } \gamma \leq 15$ количество комплексных корней равно пяти (рис. 1а, рис. 2а, рис. 4а) или шести (рис. 3а). Дисперсионные кривые обладают особенностью: участки мнимых ветвей для определенных частот запираются опускаются ниже частоты запираения, что объясняется наличием обратной волны. Это характерно для второй (рис. 1а) и третьей моды (рис. 2а, рис. 3а).

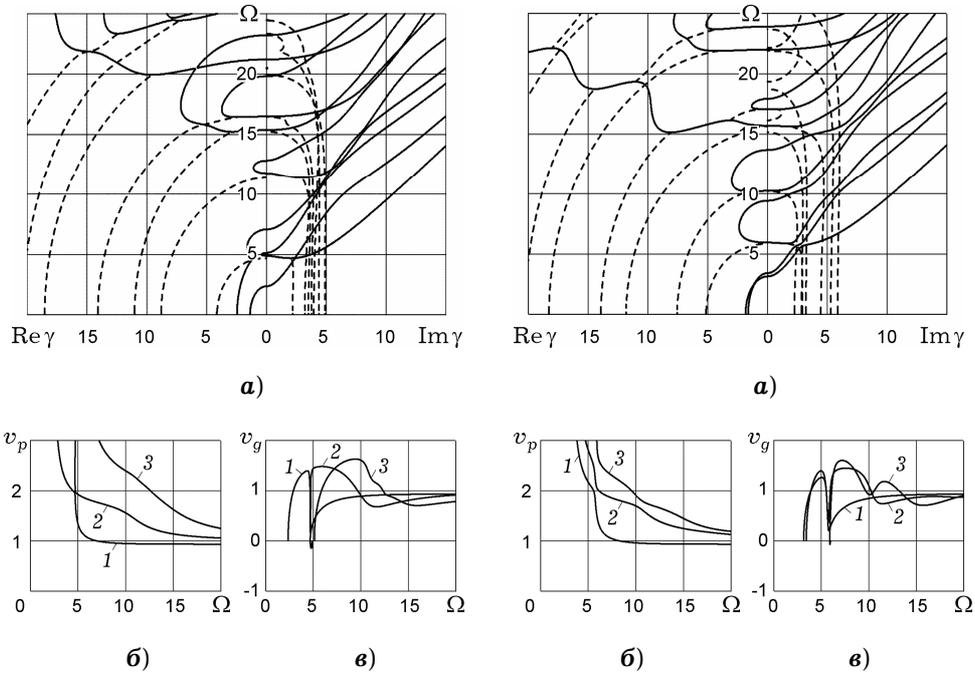


Рис. 1

Рис. 2

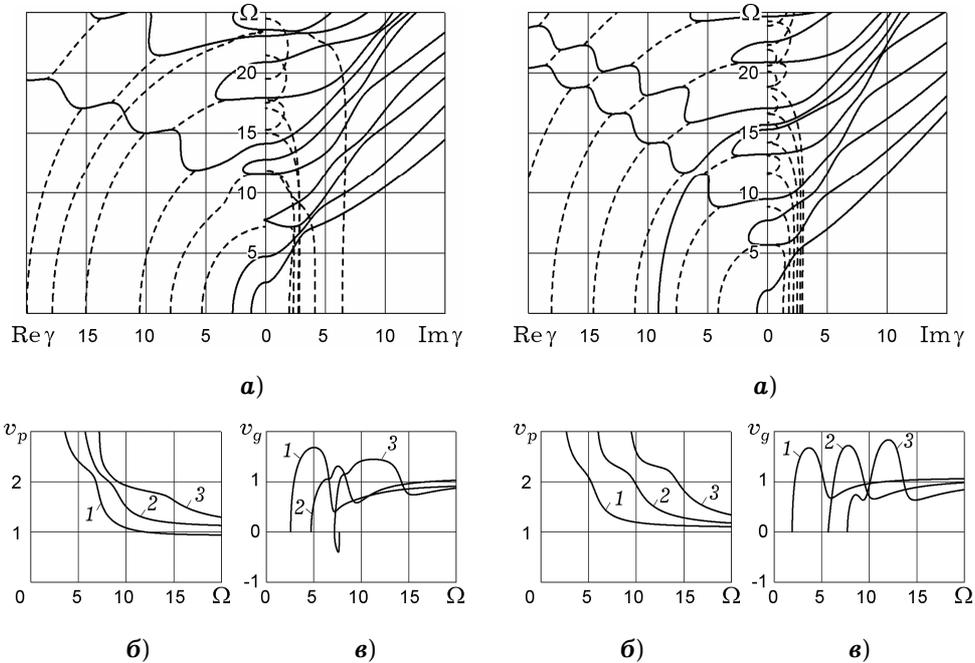


Рис. 3

Рис. 4

Вблизи частот запираний фазовая скорость $v_p \rightarrow \infty$ (рис. 1б – рис. 4б), а групповая скорость v_g равна нулю (рис. 1в – рис. 4в). Это объясняется тем, что в стоячей волне при $\gamma = 0$ энергия не переносится. В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды в двухслойной пластине становятся бездисперсными, значения их групповых скоростей мало отличаются от значений фазовых скоростей. Поведение групповых скоростей носит более сложный характер (рис. 1в – рис. 4в), чем фазовых. Здесь четко выражены локальные экстремумы каждой моды. С ростом номера мнимой ветви количество таких максимумов и минимумов увеличивается. На графиках изменения групповых скоростей присутствуют отрицательные участки, что соответствует эффекту обратной волны. Наибольшее по модулю отрицательное значение групповой скорости $v_g \approx -0.38$ имеет третья мода для варианта III (рис. 3в).

Данные рис. 5 и рис. 6 иллюстрируют изменение фазовой скорости первой распространяющейся моды в зависимости от изменения коэффициента Пуассона ν_1 (рис. 5) и относительной жесткости G (рис. 6) слоев пластины. В первом случае (рис. 5) предполагалось, что значение коэффициента Пуассона $\nu_2 = 0.3$, а изменяется только ν_1 . Кривые 1–5 соответствуют значениям $\nu_1 = 0.01, 0.1, 0.25, 0.4, 0.49$. Следует отметить, что фазовая скорость равна единице (кривые 1–5) при частотах $\Omega \approx 7.0, \Omega \approx 7.3, \Omega \approx 7.8, \Omega \approx 8.5, \Omega \approx 8.9$ соответственно. В случае приближения частоты Ω к частоте запирания, равной 3.14, фазовая скорость первой моды неограниченно растет.

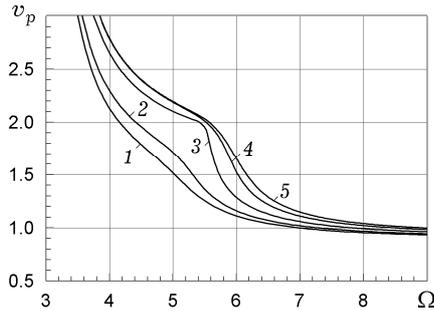


Рис. 5

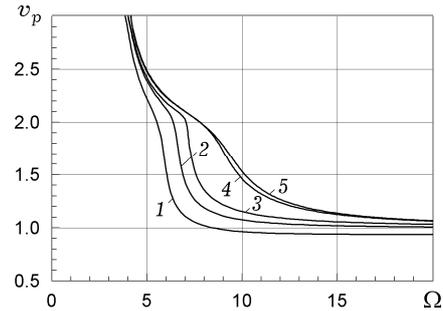


Рис. 6

На рис. 6 кривые 1–5 соответствуют значениям относительной жесткости $G = 1.0, 1.5, 2.0, 10, 100$. Оставшиеся параметры выбирали такими: $\rho = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.35, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$. Особый интерес представляет случай, когда $G = 1$ (кривая 1). Предельным значением фазовой скорости первой распространяющейся моды однородной пластины с расслоением является $v_p = 0.935$, что соответствует скорости волны Рэлея (17). Значение фазовой скорости для этого случая равно единице при $\Omega \approx 8.4$. Для других случаев при указанных наборах данных уравнение (13) не имеет вещественного корня, поэтому кривые 2–5 на рис. 6 асимптотически приближаются к единице. Вертикальной асимптотой для кривых 1–5 является прямая $\Omega = \pi$ – значение первой частоты запирания. Данные рис. 5 и рис. 6 свидетельствуют о том, что изменение относительной жесткости оказывает более значительное влияние на фазовые скорости первой моды, чем коэффициент Пуассона.

Выводы. С помощью метода однородных решений задача о колебаниях двухслойной изотропной пластины с жесткими плоскими гранями и скользящим контактом слоев приведена к счетному множеству двумерных

задач. Решение исходной задачи состоит из вихревого и потенциального состояний. Собственные функции и собственные значения вихревого решения находятся в явном виде. Собственные функции потенциального состояния также найдены в аналитическом виде, а для собственных значений получено дисперсионное уравнение в удобном для численных и аналитических исследований виде. Получено уравнение для определения частот запираций. Асимптотическим разложением дисперсионной функции получено уравнение Стоунли, которое не зависит от значений относительных толщин слоев. На основе численных исследований дисперсионных уравнений изучено влияние относительных толщин на структуру дисперсионного спектра. В широком диапазоне изменения частот исследована зависимость фазовой скорости первой моды от изменения коэффициента Пуассона и относительной жесткости.

Полученные результаты позволяют решать широкий класс прикладных задач колебаний в области механики деформируемого твердого тела, а также могут быть применены для оценки погрешности приближенных теорий.

1. Алтухов Е. В. Деформация изотропных пластин при смешанных краевых условиях // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 1997. – № 1. – С. 56–60.
2. Алтухов Е. В., Куцяя Е. В., Фоменко М. В. Установившиеся колебания упругих двухслойных пластин с жесткими плоскими гранями // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2010. – № 2. – С. 38–46.
3. Алтухов Е. В., Мьсовский Ю. В., Панченко Ю. В. Трехмерные задачи установившихся колебаний изотропных пластин // Теорет. и прикл. механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 13–19.
То же: Altukhov E. V., Mysovskii Yu. V., Panchenko Yu. V. Three-dimensional problems of steady vibrations of isotropic plates // J. Math. Sci. – 1997. – **86**, No. 6. – P. 3095–3098.
4. Алтухов Е. В., Симбратович Е. В. Упругие колебания двухслойных пластин со свободными от напряжений плоскими гранями // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – **22**. – С. 5–14.
5. Алтухов Е. В., Симбратович Е. В., Фоменко М. В. Упругие колебания двухслойной пластины со свободной от усилий верхней и заземленной нижней плоскими гранями // Проблемы вычисл. механики и прочности конструкций. – 2012. – Вып. 19. – С. 3–9.
6. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Колебания трехслойных пластин с жесткой заделкой торцов и при проскальзывании слоев // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 3 (49). – С. 38–50.
7. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Симметричные упругие колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 3. – С. 70–80.
То же: Altukhov E. V., Fomenko M. V. Symmetric elastic vibrations of three-layer plates in the absence of stresses on their end faces and layer slip // J. Math. Sci. – 2012. – **185**, No. 6. – P. 837–851.
8. Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Обзорные докл. (Москва, 1964). – Москва: Наука, 1966. – Вып. 3. – С. 116–136.
9. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин (Тбилиси, 1974). – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – С. 50–149.
10. Галиньш А. К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань, 1967. – Вып. 5. – С. 66–92.
11. Галиньш А. К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань, 1970. – Вып. 6–7. – С. 23–64.
12. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
13. Кильчевский Н. А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек // Тр. II Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек (Львов, 1961). – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – С. 58–69.

14. *Космодамианский А. С.* Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 4. – С. 21–48.
То же: *Kosmodamianskii A. S.* Accumulation of internal energy in multiply connected bodies // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 4. – P. 399–422.
15. *Космодамианский А. С.* Пространственные задачи теории упругости для многосвязных пластин: обзор // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 12. – С. 3–21.
То же: *Kosmodamianskii A. S.* Three-dimensional problems of the theory of elasticity for multiply connected plates: Survey // Int. Appl. Mech. – 1983. – **19**, No. 12. – P. 1045–1062.
16. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – **6**, вып. 2-3. – С. 151–168.
17. *Марчук А. В.* Трехмерное аналитическое решение для слоистых плит с учетом проскальзывания слоев // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 9. – С. 10–14.
То же: *Marchuk A. V.* Three-dimensional analytical solution for laminar plates with allowance for layer slip // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 9. – P. 685–689.
18. *Мелешко В. В., Бондаренко А. А., Довгий С. А., Трофимчук А. Н., ван Хейст Г. Я. Ф.* Упругие волноводы: история и современность. I // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 2. – С. 86–104.
То же: *Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A., Trofimchuk A. N., van Heijst G. J. F.* Elastic waveguides: History and the state of the art. I // J. Math. Sci. – 2009. – **162**, No. 1. – P. 99–120.
19. *Пискунов В. Г., Рассказов А. О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 22–57.
То же: *Piskunov V. G., Rasskofov A. O.* Evolution of the theory of laminated plates and shells // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 2. – P. 135–166.
20. *Устинов Ю. А.* Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
21. *Шульга Н. А.* Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 7. – С. 15–56.
То же: *Shul'ga N. A.* Propagation of elastic waves in periodically inhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 7. – P. 763–796.
22. *Birman V.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – **60**, No. 5. – P. 195–216.
23. *Carrera E.* Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, No 3. – P. 287–308.
24. *Carrera E., Brischetto S.* A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates // Appl. Mech. Rev. – 2009. – **62**, No 1. – P. 1–17.

УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ ДВОШАРОВИХ ПЛАСТИН З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИМИ ТОРЦЯМИ ТА НЕДОСКОНАЛИМ КОНТАКТОМ ШАРІВ

Досліджуються коливання двошарової пластини довільної товщини з жорстко закріпленими плоскими гранями та ковзним контактом шарів. Методом однорідних розв'язків вихідну крайову задачу зведено до зліченної множини двовимірних крайових задач. Запропоновано методикку дослідження спектральних характеристик SH і P-SV хвиль. Досліджено вплив механічних і геометричних параметрів на зміну фазових і групових швидкостей, частот запирання.

STEADY-STATE VIBRATIONS OF TWO-LAYER PLATES WITH RIGIDLY CLAMPED FLAT FACES AND IMPERFECT CONTACT OF LAYERS

The vibrations of two-layer plate of arbitrary thickness with rigidly clamped flat faces and with sliding contact of the layers are investigated. The initial problem is reduced to a countable set of boundary value problems by the method of homogeneous solutions. The procedure of investigation of spectral characteristics of SH and P-SV waves is suggested. Influence of mechanical and geometric parameters is examined on change of phase and group velocities, cutoff frequencies.

Донецк. нац. ун-т, Донецк

Получено
16.07.12