УДК 517.956.2

В. М. Гут

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ЖОРСТКИМИ ЛЕГКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Досліджено спектральні властивості крайової задачі для еліптичного оператора другого порядку із сингулярно збуреними коефіцієнтами. Задача моделює власні коливання пружної системи зі скінченним числом жорстких і одночасно легких включень довільної форми при умові, що відношення коефіцієнтів жорсткості включень та основного тіла має порядок ε^{-1} *при* $\varepsilon \to 0$*, а відношення густин маси має порядок* $\varepsilon^{æ}$*, де* $æ > 0$*. Побудовано та обґрунтовано повні асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій цієї задачі.*

Вступ. В останні десятиліття активно вивчають математичні моделі коливних систем з контрастними властивостями. Результати таких досліджень прогнозують властивості матеріалів, які вже існують або будуть створені в майбутньому. Подібні моделі виникають у різноманітних розділах фізики та техніки, що дало поштовх до появи та активного розвитку математичної теорії сильно неоднорідних середовищ, де серед перших фундаментальних досліджень є монографія [10]. Вагому частку математичних моделей в цій теорії становлять крайові задачі для диференціальних рівнянь із сингулярною залежністю від параметрів. Зокрема, власні коливання в композитних матеріалах моделюють крайовими задачами для диференціальних операторів зі швидкозмінними коефіцієнтами, де коефіцієнти при старших похідних відповідають за жорсткість матеріалу, а коефіцієнти при спектральному параметрі – за розподіл маси середовища. Залежно від типу композиту лише деякі чи одночасно всі з цих коефіцієнтів можуть сингулярно залежати від малого параметра. Огляд досягнень теорії усереднення та асимптотичних методів з достатньо повною бібліографією можна знайти в монографіях [7, 13, 15, 17, 33]. Зокрема, в [5, 6, 23] досліджено усереднені моделі зі швидкозмінними коефіцієнтами жорсткості.

Останнім часом появилось багато праць, де вивчають різноманітні моделі, в яких фізичні характеристики середовища чи його геометрія сингулярно залежать від параметрів. Задачі зі скінченною кількістю жорстких включень розглянуто в [26, 28, 29]. Коливні системи з концентрованими масами вивчали в [5, 14, 18, 24, 25, 31, 32] (див. також огляд результатів у [30]). У праці [27] досліджують механічні властивості систем з масами, що концентруються в околі одновимірних многовидів. Моделі середовищ складної геометричної структури розглянуто в [11, 12, 20], зокрема сингулярно збурені крайові задачі на графах досліджено в [3].

Крайові задачі з одночасним збуренням густини маси та жорсткості вивчено в [11, 12, 21]. Такі моделі описують композитний матеріал, утворений з традиційних матеріалів, коли жорсткіший матеріал має більшу густину. Проте вже зараз створено зразки надміцних і одночасно дуже легких матеріалів на основі вуглецевих нанотрубок. Використання таких матеріалів поряд з традиційними приведе до появи конструкцій із новими фізичними властивостями. Деякі моделі таких контрастних структур вже розглянуто у [4, 22].

У праці [4] вивчено модель композитного середовища, яке містить скінченну кількість надміцних легких включень довільної форми. Відповідною математичною моделлю є сингулярно збурена спектральна задача для еліптичного оператора другого порядку. Основним результатом цієї праці є теореми збіжності спектрів і власних підпросторів при $\varepsilon \to 0$. Гранична задача, що виникає при дослідженні, містить інтегральну крайову умову і їй відповідає одне з некласичних самоспряжених розширень еліптичного оператора в обмеженій області.

Ця робота є продовженням досліджень, розпочатих в [4]. Основною метою є побудова та обґрунтування повних асимптотичних розвинень власних значень і власних функцій задачі, розглянутої в цій праці. Асимптотику побудовано у випадку власного значення граничної задачі довільної кратності у припущені, що при збуренні воно розпадається на прості власні значення. На відміну від результатів попередньої статті, які мали якісний характер, побудовані тут повні асимптотичні розвинення можуть бути застосовані для чисельного розрахунку контрастних структур. Асимптотику кратних власних значень для різноманітних моделей побудовано в [2, 19, 20], загальну схему побудови можна знайти в [8].

1. Формулювання задачі. Нехай Ω − обмежена гладка область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, а ω − її строго внутрішня підмножина з гладкою межею $\partial\omega$. Множина ω може мати скінченну кількість компонент зв'язності. Введемо позначення $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\omega}$, тоді $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \partial\omega$. Для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ введемо функції

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon a(x), & x \in \Omega_0, \\ \alpha(x), & x \in \omega, \end{cases} \qquad r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & x \in \Omega_0, \\ \varepsilon^{\varkappa}\rho(x), & x \in \omega, \end{cases}$$

де a, α, r і ρ є неперервними та додатними в замиканні своїх областей визначення, а $\varkappa$ − натуральне число.

В області Ω розглянемо задачу на власні значення

$$-\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = \lambda^\varepsilon r_\varepsilon u^\varepsilon, \qquad x \in \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \tag{1}$$

На поверхні $\partial\omega$ контакту двох середовищ природно вимагати виконання умов спряження

$$[u^\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \qquad [a_\varepsilon \partial_\nu u^\varepsilon]_{\partial\omega} = 0, \tag{2}$$

де ∂_ν − похідна вздовж векторного поля нормалей на $\partial\omega$, зорієнтованих у напрямку до ω, а $[\cdot]_{\partial\omega}$ − стрибок функції при переході через поверхню $\partial\omega$. У випадку малих вимірностей така спектральна задача описує коливні процеси в неоднорідних континуумах (мембрана, пружне тіло), які містять жорсткі легкі включення.

При кожному $\varepsilon \in (0,1)$ задача (1), (2) є стандартною спектральною задачею з дискретним додатним спектром. Перенумеруємо власні значення задачі з урахуванням кратності

$$0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \ldots \leq \lambda_n^\varepsilon \leq \ldots \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Власні функції $\{u_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ можемо вибрати так, щоб вони утворювали ортонормований базис у ваговому просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ зі скалярним добутком

$$(u,v)_\varepsilon = \int_\Omega r_\varepsilon u\overline{v}\,dx = \int_{\Omega_0} ru\overline{v}\,dx + \varepsilon^{\varkappa}\int_\omega \rho u\overline{v}\,dx$$

та нормою $\|u\|_\varepsilon = (u,u)_\varepsilon^{1/2}$.

У роботі [4] вивчено поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень λ^ε і власних функції u^ε крайової задачі (1), (2). Зокрема, встановлено, що власні значення λ_n^ε є неперервними функціями змінної $\varepsilon \in (0,1)$. Кожне власне значення задовольняє оцінку $c\varepsilon \leq \lambda_n^\varepsilon \leq c_n\varepsilon$, де сталі c і c_n не залежать від ε.

2. Побудова асимптотики. Оскільки $\lambda_n^\varepsilon = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, то асимптотичні розвинення власних значень λ^ε і власних функцій u^ε задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon(\mu_0 + \mu_1\varepsilon + \ldots + \mu_n\varepsilon^n + \ldots), \tag{3}$$

$$u^\varepsilon(x) \sim w_0(x) + \varepsilon w_1(x) + \ldots + \varepsilon^n w_n(x) + \ldots, \qquad x \in \omega, \tag{4}$$

$$u^\varepsilon(x) \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \ldots + \varepsilon^n v_n(x) + \ldots, \qquad x \in \Omega_0. \tag{5}$$

Власну функцію u^ε підпорядкуємо умові

$$(u^\varepsilon, v_0)_{L_2(r,\Omega_0)} = 1. \tag{6}$$

Підставивши ряди (3)–(5) в (1), (2) і прирівнявши члени при однакових степенях ε в кожному з розвинень, отримаємо рівняння та крайові умови для w_n і v_n:

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla w_n) = \sum_{j=0}^{n-\varkappa-1} \mu_j \rho w_{n-\varkappa-j-1}, \quad x \in \omega, \quad \alpha\partial_\nu w_n = a\partial_\nu v_{n-1}, \ x \in \partial\omega, \tag{7}$$

$$-\operatorname{div}(a\nabla v_n) = \mu_0 r v_n + \sum_{j=1}^{n} \mu_j r v_{n-j}, \quad x \in \Omega_0, \quad v_n = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{8}$$

$$v_n = w_n, \qquad x \in \partial\omega. \tag{9}$$

Тут і надалі функції з від'ємними індексами вважаємо нульовими.

2.1. Головні члени асимптотики. Із рівностей (7) отримаємо, що w_0 є розв'язком задачі

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla w_0) = 0, \qquad x \in \omega, \qquad \partial_\nu w_0 = 0, \qquad x \in \partial\omega. \tag{10}$$

Нехай множина ω має K компонент зв'язності ω_k, кожна з яких є областю. Розв'язок цієї задачі є сталою функцією на кожній з цих компонент, тобто задача має K-кратне нульове власне значення. Через $\mathcal{K}$ позначимо відповідний власний підпростір в $L_2(\rho,\omega)$. Цей простір складається з функцій, які є сталими на кожній області ω_k. Далі, для w_1 одержимо задачу

$$\operatorname{div}(\alpha\nabla w_1) = 0, \qquad x \in \omega, \qquad \alpha\partial_\nu w_1 = a\partial_\nu v_0, \qquad x \in \partial\omega, \tag{11}$$

розв'язок якої, згідно з альтернативою Фредгольма, існуватиме лише при виконанні умов

$$\int_{\partial\omega_k} \alpha\partial_\nu v_0 \, ds = 0, \qquad k = 1,\ldots,K, \tag{12}$$

де ds – елемент поверхні.

З рівності (9) при $n = 0$ випливає, що функція v_0 є сталою на кожній з меж $\partial\omega_k$. Тоді з рівняння (8) та умов (12) отримаємо, що μ_0 і v_0 повинні бути власним значенням та власною функцією задачі

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = \eta r u, \quad x \in \Omega_0, \qquad u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$u = \text{const}, \quad x \in \partial\omega_k, \qquad \int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu u \, ds = 0, \qquad k = 1,\ldots,K, \tag{13}$$

де η – спектральний параметр. Така задача з інтегральними крайовими умовами виникає в механіці та задачах електростатики [7, с. 105]. У [4] доведено, що задача (13) є стандартною спектральною задачею з дискретним додатним спектром. Власні функції можна вибрати так, щоб вони утворювали ортонормований базис у ваговому просторі $L_2(r,\Omega_0)$.

Нехай μ_0 – власне значення задачі (13) кратності m. Через S_{μ_0} позначимо власний підпростір для μ_0, а через $u_1,\ldots,u_m$ – його ортонормований базис. Оскільки виконуються умови (12), то розв'язок w_1 задачі (11) існує і визначений з точністю до довільного елемента з простору $\mathcal{K}$.

Тепер розглянемо задачі на наступні члени асимптотичних рядів (3)–(5). Для w_2 маємо задачу

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla w_2) = \mu_0\rho w_{1-\text{æ}}, \quad x\in\omega, \qquad \alpha\partial_\nu w_2 = a\partial_\nu v_1, \quad x\in\partial\omega, \tag{14}$$

розв'язок якої існує тоді й лише тоді, коли виконуються умови

$$\int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_1\,ds = \mu_0\int_{\omega_k}\rho w_{1-\text{æ}}\,dx, \qquad k=1,\ldots,K.$$

Звідси для v_1 отримаємо

$$\operatorname{div}(a\nabla v_1) + \mu_0 r v_1 = -\mu_1 r v_0, \qquad x\in\Omega_0, \tag{15}$$

$$v_1 = 0, \quad x\in\partial\Omega, \qquad v_1 - w_1 = \text{const}, \quad x\in\partial\omega_k, \tag{16}$$

$$\int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_1\,ds = \mu_0\int_{\omega_k}\rho w_{1-\text{æ}}\,dx, \qquad k=1,\ldots,K. \tag{17}$$

Позначимо через $H^p(U)$ простір Соболєва, а через $C^p(U)$ – простір n разів неперервно диференційовних функцій над U.

Лема 1. *Нехай* μ_0 *– власне значення задачі* (13) *кратності* m, *а* $u_1,\ldots,u_m$ *– ортонормований базис в* S_{μ_0}. *Неоднорідна задача*

$$-\operatorname{div}(a\nabla v) = \mu_0 r v + f, \qquad x\in\Omega_0,$$

$$v=0, \quad x\in\partial\Omega, \qquad v-\varphi = \text{const}, \quad x\in\partial\omega_k,$$

$$\int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v\,ds = g_k, \qquad k=1,\ldots,K, \tag{18}$$

де $f\in L_2(\Omega_0)$, $\varphi\in H^{3/2}(\partial\omega)$, $g_k\in\mathbb{R}$, *має розв'язок з класу* $H^2(\Omega_0)$ *тоді й лише тоді, коли виконуються умови*

$$\int_{\partial\omega} a\varphi\partial_\nu u_j\,ds - \sum_{k=1}^{K} g_k u_j\big|_{\partial\omega_k} = \int_{\Omega_0} f u_j\,dx, \qquad j=1,\ldots,m. \tag{19}$$

Цей розв'язок визначений з точністю до довільного елемента з S_{μ_0}.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що розв'язок задачі (18) існує. Щоб довести необхідність, домножимо рівняння (18) почергово на u_j і проінтегруємо частинами:

$$\int_{\partial\omega} av\partial_\nu u_j\,ds - \int_{\partial\omega} au_j\partial_\nu v\,ds = \int_{\Omega_0} fu_j\,dx, \qquad j=1,\ldots,m.$$

Врахувавши те, що функції u_j є сталими на $\partial\omega_k$, а також рівності $\int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu u_j\,ds = 0$, отримаємо співвідношення (19).

Далі, задачі (13) відповідає самоспряжений оператор з компактною резольвентою [4], а тому, згідно з альтернативою Фредгольма, ці умови є також і достатніми для існування розв'язку. ♦

Повернемося до задачі (15)−(17). Згідно з лемою 1, її розв'язок при $\text{æ} = 1$ існує, коли

$$\int_{\partial\omega} a w_1 \partial_\nu u_j \, ds - \mu_0 \sum_{k=1}^{K} m_k (v_0 u_j)\big|_{\partial\omega_k} = \mu_1 \int_{\Omega_0} r v_0 u_j \, dx, \qquad j = 1,\dots,m. \quad (20)$$

Тут $m_k = \int_{\omega_k} \rho \, dx$ − маса включення ω_k. Для $\text{æ} \ge 2$ матимемо

$$\int_{\partial\omega} a w_1 \partial_\nu u_j \, ds = \mu_1 \int_{\Omega_0} r v_0 u_j \, dx, \qquad j = 1,\dots,m, \quad (21)$$

оскільки праві частини рівностей (17) в цьому випадку дорівнюють нулеві.

Умови (20) та (21) можна записати у вигляді задачі на власні значення для деякої матриці зі спектральним параметром μ_1. Справді,

$$v_0 = (\mathbf{c}_0, \mathbf{u}) = c_{0,1} u_1 + \ldots + c_{0,m} u_m,$$

де $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_m)$, $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^m$. Тут $(\cdot,\cdot)$ − скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$. З умови (6) випливає, що власна функція задачі (13) підпорядкована умові $\|v_0\|_{L_2(r,\Omega_0)} = 1$, а тому $\|\mathbf{c}_0\| = 1$. Нехай $w_{1,j}$ − розв'язки задач

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla w_{1,j}) = 0, \quad x \in \omega, \qquad \alpha \partial_\nu w_{1,j} = a \partial_\nu u_j, \quad x \in \partial\omega, \quad (22)$$

ортогональні до простору $\mathcal{K}$. Тоді w_1 можна записати у вигляді $w_1 = (\mathbf{c}_0, \mathbf{w}_1) + \beta_1$, де $\mathbf{w}_1 = (w_{1,1},\dots,w_{1,m})$, а $\beta_1 \in \mathcal{K}$. Через $B(\text{æ})$ позначимо квадратну матрицю порядку m з елементами

$$b_{j\ell}(\text{æ}) = \int_{\partial\omega} a w_{1,\ell} \partial_\nu u_j \, ds - \delta_{1\text{æ}} \mu_0 \sum_{k=1}^{K} m_k (u_\ell u_j)\big|_{\partial\omega_k}, \quad (23)$$

де $\delta_{1\text{æ}}$ − символ Кронекера. Тоді кожний з наборів умов (20) чи (21) можна переписати так:

$$B(\text{æ}) \mathbf{c}_0 = \mu_1 \mathbf{c}_0. \quad (24)$$

Отже, розв'язок задачі (15)−(17) існуватиме лише у випадку, коли μ_1 − власне значення матриці $B(\text{æ})$, а $\mathbf{c}_0$ − відповідний власний вектор.

Матриця $B(\text{æ})$ є симетричною. Справді, домножимо рівняння (22) на $w_{1,\ell}$ і проінтегруємо частинами. Для $\ell \ne j$ отримаємо

$$\int_{\partial\omega} \alpha w_{1,\ell} \partial_\nu w_{1,j} \, ds = \int_{\partial\omega} \alpha w_{1,j} \partial_\nu w_{1,\ell} \, ds.$$

Врахувавши крайові умови $\alpha \partial_\nu w_{1,j} = a \partial_\nu u_j$ на $\partial\omega$, матимемо рівність

$$\int_{\partial\omega} a \partial_\nu u_j w_{1,\ell} \, ds = \int_{\partial\omega} a \partial_\nu u_\ell w_{1,j} \, ds,$$

тобто $b_{j\ell} = b_{\ell j}$. Отже, матриця $B(\text{æ})$ має дійсний спектр. Припустимо надалі, що всі власні значення μ_1^j матриці $B(\text{æ})$ прості. Відповідні нормовані власні вектори позначимо через $\mathbf{c}_0^j$. Покладемо

$$v_0^j = c_{0,1}^j u_1 + \ldots + c_{0,m}^j u_m, \qquad j = 1,\ldots,m. \tag{25}$$

Зауважимо, що функції $v_0^1,\ldots,v_0^m$ утворюють ортонормований базис у власному підпросторі S_{μ_0}. З огляду на те, що w_0 є сталою на ω_k, то з крайової умови (9) при $n = 0$ маємо

$$w_0^j = v_0^j\big|_{\partial\omega_k}, \qquad x \in \omega_k, \qquad k = 1,\ldots,K. \tag{26}$$

Отже, для власного значення і власної функції збуреної задачі отримали m формальних асимптотик вигляду $\lambda_\varepsilon^j \sim \mu_0 + \varepsilon\mu_1^j$ та

$$u^{\varepsilon,j}(x) \sim \begin{cases} v_0^j(x), & x \in \Omega_0, \\ w_0^j(x), & x \in \omega. \end{cases}$$

2.2. Перші коректори асимптотичних розвинень власних функцій. Продовжимо побудову асимптотики для конкретного коректора μ_1^j і відповідних функцій v_0^j та w_0^j, опускаючи надалі верхній індекс j. Наразі коректор v_1 знайдено з точністю до довільного елемента з S_{μ_0}, а w_1 – з точністю до доданка з простору $\mathcal{K}$. Єдиність вибору функції v_1 диктується умовами існування розв'язку v_2. Запишемо функцію v_1 у вигляді

$$v_1 = \hat{v}_1 + (\mathbf{c}_1, \mathbf{u}), \tag{27}$$

де $\hat{v}_1$ – розв'язок задачі (15)–(17), ортогональний до S_{μ_0}, $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^m$. Крім того,

$$w_1 = (\mathbf{c}_0, \mathbf{w}_1) + \beta_1, \qquad \beta_1 \in \mathcal{K}. \tag{28}$$

З рівності функцій v_1 та w_1 на поверхні $\partial\omega$ отримаємо

$$\beta_1(x) = (\hat{v}_1(x) - (\mathbf{c}_0, \mathbf{w}_1(x)) + (\mathbf{c}_1, \mathbf{u}(x)))\big|_{\partial\omega_k}, \qquad x \in \omega_k, \tag{29}$$

де $k = 1,\ldots,K$. Отже, вибравши вектор $\mathbf{c}_1$, однозначно знайдемо w_1 та v_1.

Згідно з умовами (17), розв'язок задачі (14) існує і має зображення

$$w_2 = \hat{w}_2 + (\mathbf{c}_1, \mathbf{w}_1) + \beta_2, \qquad \beta_2 \in \mathcal{K}, \tag{30}$$

де $\hat{w}_2$ – ортогональний до $\mathcal{K}$ розв'язок задачі

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\hat{w}_2) = \mu_0\rho w_{1-æ}, \quad x \in \omega, \qquad \alpha\partial_\nu\hat{w}_2 = a\partial_\nu\hat{v}_1, \quad x \in \partial\omega.$$

Далі, задача

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla w_3) = \rho(\mu_0 w_{2-æ} + \mu_1 w_{1-æ}), \ x \in \omega, \qquad \alpha\partial_\nu w_3 = a\partial_\nu v_2, \ x \in \partial\omega,$$

матиме розв'язок, коли

$$\int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_2\, ds = \int_{\omega_k} \rho(\mu_0 w_{2-æ} + \mu_1 w_{1-æ})\, dx, \qquad k = 1,\ldots,K.$$

Тому з рівняння (8) та крайових умов (9) при $n = 2$ отримаємо

$$-\operatorname{div}(a\nabla v_2) = r(\mu_0 v_2 + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_0), \qquad x \in \Omega_0,$$

$$v_2 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \qquad v_2 - w_2 = \text{const}, \quad x \in \partial\omega_k,$$

$$\int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_2\, ds = \int_{\omega_k} \rho(\mu_0 w_{2-æ} + \mu_1 w_{1-æ})\, dx, \qquad k = 1,\ldots,K. \tag{31}$$

За лемою **1** умовами існування розв'язку v_2 є сукупність рівностей

$$\int_{\partial\omega} a w_2 \partial_\nu u_\ell \, ds - \sum_{k=1}^{K} u_\ell \big|_{\partial\omega_k} \int_{\omega_k} \rho(\mu_0 w_{2-æ} + \mu_1 w_{1-æ})\, dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} r(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_0) u_\ell \, dx\,, \tag{32}$$

де $\ell = 1,\dots,m$. Зауважимо, що інтеграли $\int_{\partial\omega} a\partial_\nu u_\ell w_2\, ds$ у попередніх рівностях не залежать від вибору функції β_2. Тому, врахувавши зображення функцій w_1, v_1 та w_2, умови (32) можна подати у вигляді

$$(B(æ) - \mu_1)\mathbf{c}_1 = \mu_2 \mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_2(æ)\,, \tag{33}$$

де

$$b_{2,\ell}(æ) = -\int_{\partial\omega} a\hat{w}_2 \partial_\nu u_\ell \, ds + \sum_{k=1}^{K} m_k g_{2,k}(æ) u_\ell \big|_{\partial\omega_k}, \qquad \ell = 1,\dots,m\,,$$

$$g_{2,k}(æ) = \begin{cases} \left(\mu_0(\hat{v}_1 - (\mathbf{c}_0, \mathbf{w}_1)) + \mu_1 w_0\right)\big|_{\partial\omega_k}, & æ = 1, \\ \mu_0 w_0 \big|_{\partial\omega_k}, & æ = 2, \\ 0, & æ > 2. \end{cases}$$

За припущенням μ_1 є простим власним значенням матриці $B(æ)$, тому розв'язок лінійної алгебраїчної системи (33) існує, коли

$$\mu_2 = -(\mathbf{b}_2(æ), \mathbf{c}_0)\,. \tag{34}$$

Умова $(v_1, v_0)_{L_2(r,\Omega_0)} = 0$ однозначно фіксує вектор $\mathbf{c}_1$, а, отже, згідно з (27) − і функцію v_1.

Отже, визначено перші коректори v_1 та w_1 асимптотики власної функції, а також другий коректор μ_2 асимптотики власного значення.

2.3. Загальні члени асимптотичних розвинень. Міркуючи аналогічно, можна побудувати задачі для загальних членів асимптотичних розвинень (4), (5). Отже, для функцій v_n та w_{n+1} отримаємо такі задачі:

$$-\operatorname{div}(a\nabla v_n) = \mu_0 r v_n + \mu_1 r v_{n-1} + \sum_{\ell=2}^{n} \mu_\ell r v_{n-\ell}, \qquad x \in \Omega_0\,,$$

$$v_n = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad v_n - w_n = \text{const}, \qquad x \in \partial\omega_k\,,$$

$$\int_{\partial\omega_k} a\partial_\nu v_n \, ds = \sum_{\ell=0}^{n-æ} \mu_\ell \int_{\omega_k} \rho w_{n-æ-\ell}\, dx, \qquad k = 1,\dots,K\,, \tag{35}$$

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla w_{n+1}) = \sum_{\ell=0}^{n-æ} \mu_\ell \rho w_{n-æ-\ell}, \quad x \in \omega, \qquad \alpha\partial_\nu w_{n+1} = a\partial_\nu v_n, \quad x \in \partial\omega\,. \tag{36}$$

Зрозуміло, що ці задачі мають неєдині розв'язки. На цьому кроці побудови асимптотики вибираємо однозначно функцію v_n, а w_{n+1} знаходимо з точністю до $\beta_{n+1} \in \mathcal{K}$, яка буде визначена на наступному кроці. Слід зауважити, що, хоча функція w_{n+1} визначена неоднозначно, це не впливає на обчислення, які проводяться на цьому кроці.

Нехай $\hat{v}_n$ є розв'язком задачі (35), ортогональним до S_{μ_0}, а $\hat{w}_{n+1}$ − ортогональний до $\mathcal{K}$ розв'язок задачі

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\hat{w}_{n+1}) = \sum_{\ell=0}^{n-æ}\mu_\ell\rho w_{n-æ-\ell}, \quad x\in\omega, \qquad \alpha\partial_\nu\hat{w}_{n+1} = a\partial_\nu\hat{v}_n, \quad x\in\partial\omega.$$

Тоді функції v_n та w_{n+1} мають зображення

$$w_{n+1} = \hat{w}_{n+1} + (\mathbf{c}_n, \mathbf{w}_1) + \beta_{n+1}, \qquad v_n = \hat{v}_n + (\mathbf{c}_n, \mathbf{u}), \tag{37}$$

де $\beta_{n+1}\in\mathcal{K}$ і $\mathbf{c}_n\in\mathbb{R}^m$. Функцію v_n знаходимо однозначно, вибравши вектор $\mathbf{c}_n$ як розв'язок такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$(B(æ)-\mu_1)\mathbf{c}_n = \mu_{n+1}\mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_{n+1}(æ). \tag{38}$$

Тут $\mathbf{b}_{n+1}(æ)$ − вектор з координатами

$$b_{n+1,\ell}(æ) = -\int_{\partial\omega} a\hat{w}_{n+1}\partial_\nu u_\ell\,ds + \sum_{k=1}^{K} m_k g_{n+1,k}(æ)u_\ell\big|_{\partial\omega_k} + \sum_{j=2}^{n}\mu_j c_{n+1-j,\ell},$$

де

$$g_{n+1,k}(æ)\big|_{\partial\omega_k} = \begin{cases} \left.\left(\mu_0(\hat{v}_n - \hat{w}_n) + \sum\limits_{j=1}^{n-æ+1}\mu_j\beta_{n+1-æ-j}\right)\right|_{\partial\omega_k}, & æ=1,\\ \left.\sum\limits_{j=0}^{n+1-æ}\mu_j\beta_{n+1-æ-j}\right|_{\partial\omega_k}, & æ\ge 2,\end{cases}$$

$\beta_0 = w_0$.

Розв'язок системи (38) існує, коли виконується умова

$$\mu_{n+1} = -(\mathbf{b}_{n+1}(æ), \mathbf{c}_0), \tag{39}$$

яка одночасно визначає коректор μ_{n+1} розвинення (3). Розв'язок $\mathbf{c}_n$ системи (38) вибираємо ортогональним до $\mathbf{c}_0$.

Таким чином, коректор v_n є визначений однозначно згідно з формулою (37), а функція β_n має зображення

$$\beta_n = (\hat{v}_n - \hat{w}_n + (\mathbf{c}_n, \mathbf{u}))\big|_{\partial\omega_k} \qquad x\in\omega_k, \qquad k=1,\ldots,K. \tag{40}$$

Отже, побудовано m формальних асимптотик для власних значень і власних функцій.

3. Обґрунтування асимптотики. Нехай H − гільбертів простір з нормою $\|\cdot\|$, а самоспряжений оператор $A:\mathcal{D}(A)\to H$ має дискретний спектр.

Означення 1. *Квазімодою з нев'язкою* δ для оператора A називатимемо таку пару $(\mu, v)\in\mathbb{R}\times\mathcal{D}(A)$, що $\|Av-\mu v\|\le\delta$ і $\|v\|=1$.

Лема 2 [1]. *Якщо* (μ, v) − *квазімода оператора* A *з нев'язкою* δ, *то для довільного* $d>\delta$ *існує пара* (λ, u) *така, що*

$$|\lambda-\mu|\le\delta, \qquad \|u-v\|\le 2d^{-1}\delta,$$

де λ − *власне значення оператора* A, *а* u − *нормована лінійна комбінація власних функцій оператора* A, *для яких відповідні власні значенням розміщені в інтервал* $[\mu-d, \mu+d]$.

Означення 2. Нехай $(\mu, v_1),\ldots,(\mu, v_s)$ − квазімоди оператора A. Говоритимемо, що вони утворюють *сім'ю квазімод з нев'язкою* δ *і відхиленням* τ від ортогональності, якщо $\|Av_j-\mu v_j\|\le\delta$ та $|(v_j, v_k)-\delta_{jk}|\le\tau$ для всіх $j,k=1,\ldots,s$.

Твердження 1 [9]. *Нехай* $\{(\mu, v_j)\}_{j=1}^{s}$ – *сім'я квазімод оператора* A *з нев'язкою* δ *та відхиленням* τ *від ортогональності. Якщо* $\delta h^{-1} + \tau < s^{-1}$, *то оператор* A *на відрізку* $[\mu - h, \mu + h]$ *має власні значення сумарної кратності, не меншої від* s.

Нехай μ_0 – власне значення задачі (13) кратності m, матриця $B(\text{æ})$ така, як і в (23), і всі її власні значення μ_1^j є простими. За ортонормований базис у власному підпросторі для μ_0 виберемо функції $v_0^1, \ldots, v_0^m$, означені в (25), а функції w_0^j задамо рівностями (26). Зафіксуємо натуральне число $N > \text{æ}$ і введемо такі позначення:

$$\Lambda_\varepsilon^j = \mu_0 + \mu_1^j \varepsilon + \ldots + \mu_N^j \varepsilon^N, \tag{41}$$

$$W_\varepsilon^j(x) = w_0^j(x) + \varepsilon w_1^j(x) + \ldots + \varepsilon^N w_N^j(x), \qquad x \in \omega, \tag{42}$$

$$V_\varepsilon^j(x) = v_0^j(x) + \varepsilon v_1^j(x) + \ldots + \varepsilon^N v_N^j(x), \qquad x \in \Omega_0, \tag{43}$$

де $j = 1, \ldots, m$, функції $w_\ell^j \in C^2(\omega)$ та $v_\ell^j \in C^2(\Omega_0)$ для $\ell \geq 1$ є розв'язками задач (7), (35) відповідно, а числа μ_ℓ^j задані рівністю (39) для $\ell \geq 2$. Через U_ε^j позначимо функції з $L_2(\Omega)$ такі, що $U_\varepsilon^j = W_\varepsilon^j$ в ω та $U_\varepsilon^j = V_\varepsilon^j$ в Ω_0. За побудовою функції U_ε^j перетвоюються в нуль на $\partial\Omega$, неперервні на $\partial\omega$, а їхні конормальні похідні, взагалі кажучи, мають розрив на $\partial\omega$:

$$V_\varepsilon^j = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

$$W_\varepsilon^j = V_\varepsilon^j, \qquad \alpha\partial_\nu W_\varepsilon^j - \varepsilon a \partial_\nu V_\varepsilon^j = -a\partial_\nu v_N^j \varepsilon^{N+1}, \qquad x \in \partial\omega. \tag{44}$$

Крім того, $W_\varepsilon^j \in H^2(\omega)$ та $V_\varepsilon^j \in H^2(\Omega_0)$.

Задачі (1), (2) у просторі $L_2(r_\varepsilon, \Omega)$ відповідає оператор $A_\varepsilon = -\dfrac{1}{r_\varepsilon} \operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla \cdot)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \{u \in H^2(\Omega \setminus \partial\omega) : u = 0,\ x \in \partial\Omega,\ [u]_{\partial\omega} = 0,\ [a_\varepsilon \partial_\nu u]_{\partial\omega} = 0\},$$

який є самоспряженим, додатним і має компактну резольвенту.

Згідно з (44), функції U_ε^j, взагалі кажучи, не належать до $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$. Підкорегуємо їх так, щоб отримати елементи з $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$. Введемо функції $\varphi^j \in C^2(\Omega \setminus \partial\omega) \bigcap C(\Omega)$ такі, що $\varphi^j = 0$ в $\bar{\Omega}_0$ і $\alpha \partial_\nu \varphi^j = a \partial_\nu v_N^j$ на $\partial\omega$. З крайових умов (44) і вибору функцій φ^j зрозуміло, що $U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$. Нехай $\hat{U}_\varepsilon^j = \Theta_\varepsilon^j (U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j)$, де $\Theta_\varepsilon^j = \left\| U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j \right\|_\varepsilon^{-1}$, причому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Theta_\varepsilon^j = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| U_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j \right\|_\varepsilon^{-1} = \left\| v_0^j \right\|_{L_2(r, \Omega_0)}^{-1} = 1.$$

Зауважимо, що хоча побудова асимптотики власних значень залежала від параметра æ, проте обґрунтування проводимо для довільного значення $\text{æ} \in \mathbb{N}$.

Лема 3. *Пари* $\{(\varepsilon\Lambda_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^j)\}_{j=1}^{m}$ *утворюють сім'ю квазімод оператора* A_ε *з нев'язкою* $O(\varepsilon^{N+1-\text{æ}/2})$ *та відхиленням від ортогональності порядку* $O(\varepsilon^{N-1-\text{æ}/2})$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Д о в е д е н н я. Підставимо числа $\varepsilon\Lambda_\varepsilon^j$ і функції $\hat{U}_\varepsilon^j$ в рівняння (1) та оцінимо залишки у правих частинах. На множині ω отримаємо

$$\Theta_\varepsilon^j \operatorname{div}(\alpha\nabla(W_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j)) + \Theta_\varepsilon^j \varepsilon^{1+æ}\Lambda_\varepsilon^j \rho(W_\varepsilon^j + \varepsilon^{N+1}\varphi^j) = F_\varepsilon^j$$

з правою частиною

$$F_\varepsilon^j = \Theta_\varepsilon^j \varepsilon^{N+1}\rho\Bigg[\sum_{n=0}^{æ}\varepsilon^n \sum_{\ell=0}^{\tilde{N}+n}\mu_\ell^j w_{\tilde{N}+n-\ell}^j + \sum_{n=1}^{N}\varepsilon^{n+æ}\sum_{\ell=n}^{N}\mu_\ell^j w_{N+n-\ell}^j +$$
$$+ \rho^{-1}\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi^j) + \varepsilon^{1+æ}\Lambda_\varepsilon^j\varphi^j\Bigg],$$

тут $\tilde{N} = N - æ$. В області Ω_0 матимемо

$$\varepsilon\Theta_\varepsilon^j \operatorname{div}(a\nabla V_\varepsilon^j) + \varepsilon\Theta_\varepsilon^j r\Lambda_\varepsilon^j V_\varepsilon^j) = G_\varepsilon^j,$$

де

$$G_\varepsilon^j = \Theta_\varepsilon^j \varepsilon^{N+2} r \sum_{n=1}^{N}\varepsilon^{n-1}\sum_{\ell=n}^{N}\mu_\ell^j v_{N+n-\ell}^j.$$

Отже,

$$A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^j - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^j \hat{U}_\varepsilon^j = f_\varepsilon^j,$$

де $f_\varepsilon^j = -\varepsilon^{-æ}\rho^{-1}F_\varepsilon^j$ в ω та $f_\varepsilon^j = -r^{-1}G_\varepsilon^j$ в Ω_0.

Оскільки всі доданки в сумах (42) та (43) є обмеженими функціями на відповідних множинах, то $\left\|F_\varepsilon^j\right\|_{C(\omega)} \le \hat{C}_N^j \varepsilon^{N+1}$ і $\left\|G_\varepsilon^j\right\|_{C(\Omega_0)} \le \tilde{C}_N^j\varepsilon^{N+2}$. Тому

$$\left\|f_\varepsilon^j\right\|_\varepsilon \le \varepsilon^{-æ/2}\left\|\rho^{-1}F_\varepsilon^j\right\|_{L_2(\rho,\omega)} + \left\|r^{-1}G_\varepsilon^j\right\|_{L_2(r,\Omega_0)} \le C_N^j \varepsilon^{N+1-æ/2}. \tag{45}$$

Отже, пара $(\varepsilon\Lambda_\varepsilon^j, \hat{U}_N^{\varepsilon,j})$ є квазімодою оператора A_ε з нев'язкою $C_N\varepsilon^{N+1-æ/2}$, де $C_N = \max_j C_N^j$.

Покажемо, що сім'я функцій $\{\hat{U}_\varepsilon^j\}_{j=1}^m$ є майже ортогональною. Справді, для довільних $j,\ell = 1,\ldots,m$ виконується рівність

$$(A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^\ell)_\varepsilon - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^j(\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^\ell)_\varepsilon = (f_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^\ell)_\varepsilon. \tag{46}$$

Розглянемо цю ж рівність, помінявши місцями індекси j та ℓ:

$$(A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^\ell, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^\ell(\hat{U}_\varepsilon^\ell, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon = (f_\varepsilon^\ell, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon. \tag{47}$$

Оператор A_ε самоспряжений, тому $(A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^\ell)_\varepsilon = (\hat{U}_\varepsilon^\ell, A_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon$. Віднявши рівності (46) та (47) матимемо

$$\varepsilon(\Lambda_\varepsilon^\ell - \Lambda_\varepsilon^j)(\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^\ell)_\varepsilon = (f_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^\ell)_\varepsilon - (f_\varepsilon^\ell, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon. \tag{48}$$

З нерівностей (45) одержимо оцінку $\left|(f_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^j)_\varepsilon\right| \le C_N\varepsilon^{N+1-æ/2}$. Врахувавши, що $\left|\Lambda_\varepsilon^\ell - \Lambda_\varepsilon^j\right| = \varepsilon\left|\mu_1^\ell - \mu_1^j\right| + o(\varepsilon^2)$, з рівності (48) для $j \ne \ell$ випливає оцінка

$$\left|(\hat{U}_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^\ell)_\varepsilon\right| \le C_N^* \varepsilon^{N-1-æ/2}.$$

Отже, набір $\left\{(\varepsilon\Lambda_\varepsilon^j, \hat{U}_\varepsilon^j)\right\}_{j=1}^m$ утворює сім'ю квазімод A_ε з нев'язкою $C_N\varepsilon^{N+1-æ/2}$ та відхиленням від ортогональності $C_N^*\varepsilon^{N-1-æ/2}$. ♦

Нехай $\{\lambda_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ та $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ – власні значення задач (1), (2) та (13) відповідно, перераховані з урахуванням кратності. Власне значення μ_0 задачі (13) є кратності m, а тому $\mu_0 = \eta_{p+1} = \ldots = \eta_{p+m}$ для деякого номера p. Через S^ε позначимо підпростір в $L_2(\Omega)$, породжений елементами $\hat{U}_\varepsilon^j$, а через $S_{\mu_0}^\varepsilon$ – підпростір, породжений власними функціями u_n^ε задачі (1), (2) з власними значеннями λ_n^ε такими, що $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon \to \mu_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. *Нехай μ_0 – власне значення задачі* (13) *кратності m, а всі власні значення $\mu_1^1,\ldots,\mu_1^m$ матриці $B(\varkappa)$ – прості. Тоді для власного значення $\lambda_{p+j}^\varepsilon$ збуреної задачі виконується оцінка*

$$\left|\varepsilon^{-1}\lambda_{p+j}^\varepsilon - \Lambda_\varepsilon^j\right| \le C_N \varepsilon^{N-\varkappa/2}, \qquad j = 1,\ldots,m,$$

де стала C_N не залежить від ε.

Розхил між підпросторами S^ε та $S_{\mu_0}^\varepsilon$ прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$:

$$\left\| P^\varepsilon - P_{\mu_0}^\varepsilon \right\| \le \tilde{C}_N \varepsilon^{N+1-\varkappa},$$

де P^ε, $P_{\mu_0}^\varepsilon$ – ортогональні проектори на підпростори S^ε та $S_{\mu_0}^\varepsilon$ відповідно і стала $\tilde{C}_N$ не залежить від ε.

Д о в е д е н н я. З доведеного в лемі 3 маємо, що пара $(\varepsilon\Lambda_\varepsilon^j, \hat{U}_N^{\varepsilon,j})$ є квазімодою A_ε з нев'язкою $C_N\varepsilon^{N+1-\varkappa/2}$. З леми 2 випливає, що для кожного $j = 1,\ldots,m$, існує власне значення $\lambda^{\varepsilon,j}$ оператора A_ε, для якого

$$\left|\lambda^{\varepsilon,j} - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^j\right| \le C_N \varepsilon^{N+1-\varkappa/2}. \tag{49}$$

Зауважимо, що всі власні значення $\lambda^{\varepsilon,j}$ є різними. Справді, виберемо h таким, що окіл $\Delta_h(\mu_0) = (\mu_0 - h, \mu_0 + h)$ не містить інших точок спектра задачі (13), окрім μ_0. Згідно з твердженням 1, як тільки $C_N\varepsilon^{N+1-\varkappa/2}h^{-1} + C_N^*\varepsilon^{N-1-\varkappa/2} < m^{-1}$, то сумарна кратність власних значень оператора A_ε в інтервалі $\Delta_h(\mu_0)$ є не менша від m. Оскільки $\Delta_h(\mu_0)$ містить лише одну точку спектра μ_0, то всі ці власні значення, поділені на ε, збігаються до μ_0 і їх є рівно m [4, теорема 6.2]. Перенумеруємо власні значення матриці $B(\varkappa)$ в порядку зростання. Тоді для достатньо малих ε маємо

$$\begin{aligned}\lambda^{\varepsilon,j+1} - \lambda^{\varepsilon,j} &= \varepsilon(\Lambda_\varepsilon^{j+1} - \Lambda_\varepsilon^j) + (\lambda^{\varepsilon,j+1} - \varepsilon\Lambda_\varepsilon^{j+1}) + (\varepsilon\Lambda_\varepsilon^j - \lambda^{\varepsilon,j}) \ge \\ &\ge \varepsilon(\Lambda_\varepsilon^{j+1} - \Lambda_\varepsilon^j) - 2C_N\varepsilon^{N+1-\varkappa/2} \ge \\ &\ge \varepsilon^2 c(\mu_1^{j+1} - \mu_1^j), \qquad 1 \le j \le m-1.\end{aligned}$$

Поділивши обидві частини нерівності (49) на ε, отримуємо

$$\left|\varepsilon^{-1}\lambda_{p+j}^\varepsilon - \Lambda_\varepsilon^j\right| \le C_N \varepsilon^{N-\varkappa/2}.$$

Отже, першу частину теореми доведено.

З леми 3 випливає, що $\dim S^\varepsilon = \dim S_{\mu_0}^\varepsilon = m$ для достатньо малих ε. Оцінка розхилу між цими підпросторами ґрунтується на такому факті: якщо для кожного $v_\varepsilon \in S^\varepsilon$, $\|v_\varepsilon\|_\varepsilon = 1$, існує нормований елемент $u_\varepsilon \in S^\varepsilon_{\mu_0}$ такий, що $\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\| \le \gamma$, то виконується нерівність $\left\|P^\varepsilon - P^\varepsilon_{\mu_0}\right\| \le M\gamma$, де γ – достатньо мале додатне число, а стала M залежить лише від m [5, лема 1.3].

Згідно з лемою 2 для всіх достатньо малих ε існує нормований вектор $u^j_\varepsilon \in S^\varepsilon_{\mu_0}$ такий, що $\left\|\hat{U}^j_\varepsilon - u^j_\varepsilon\right\|_\varepsilon \le \dfrac{2C_N}{h}\varepsilon^{N+1-æ/2}$. Оскільки для $f \in L_2(\Omega)$ виконується нерівність $\|f\|_\varepsilon \ge \varepsilon^{æ/2}(\|f\|_{L_2(\rho,\omega)} + \|f\|_{L_2(r,\Omega_0)})$, то $\left\|P^\varepsilon_{\mu_0} - P^\varepsilon\right\| \le \tilde{C}_N \varepsilon^{N+1-æ}$, що завершує доведення теореми. ♦

Наслідок. *Якщо власне значення* $\mu_0 = \eta_n$ *є простим, то власна функція* u^ε_n *збуреної задачі збігається в* $L_2(\Omega)$ *до власної функції* v_n *граничної задачі* (13)*, яка продовжена за неперервністю сталими в область* ω.

Справді, для одновимірних просторів $S^\varepsilon_{\mu_0}$ та S^ε збіжність їхнього розхилу рівносильна збіжності одиничних векторів, що їх породжують.

1. *Вишик М. И., Люстерник А. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, №. 5. – С. 3–122.
2. *Гадыльшин Р. Р.* Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 4. – С. 42–55.
   Те саме: *Gadyl'shin R. R.* Ramification of a multiple eigenvalue of the Dirichlet problem for the Laplacian under singular perturbation of the boundary condition // Math. Notes. –1992. – **52**, No. 4. – P. 1020–1029.
3. *Головатий Ю. Д., Грабчак Г. Є.* Про задачу Штурма–Ліувілля на зіркових графах із «важкими» вузлами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 63–78.
4. *Головатий Ю. Д., Гут В. М.* Коливні системи з жорсткими легкими включеннями: асимптотика спектра та власних підпросторів // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1315–1330.
5. *Головатый Ю. Д.* Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1992. – **54.** – С. 29–72.
6. *Жиков В. В.* О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами // Алгебра и анализ. – 2004. – **16**, вып. 5. – С. 773–790.
7. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. – Москва: Физматлит, 1993. – 464 с.
8. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1951. – Т. 1. – 538 с.
9. *Лазуткин В. Ф.* Квазиклассическая асимптотика собственных функций // Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Фундам. направления. – Москва: ВИНИТИ АН СССР, 1988. – Т. **34**. – С. 135–174.
10. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 279 с.
11. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами // Докл. РАН. – 1993. – **333**, № 1. – С. 13–15.
12. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями // Алгебра и анализ. – 2000. – **12**, № 2. – С. 188–238.
13. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – Москва: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.
14. *Перес М. Е., Чечкин Г. А., Яблокова Е. И.* О собственных колебаниях тела с «легкими» концентрированными массами на поверхности // Успехи мат. наук. – 2002. – **57**, № 6. – С. 195–196.

Те саме: *Pérez E., Chechkin G. A., Yablokova E. I.* On eigenvibrations of a body with «light» concentrated masses on the surface // Russian Math. Surveys. – 2002. – **57**, No. 6. – P. 1240–1242.
15. *Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А., Шамаев А. С.* Усреднение. Методы и приложения. – Т. 3. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007. – 264 с.
16. *Сандраков Г. В.* Осреднение системы уравнений теории упругости с контрастными коэффициентами // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 12. – С. 37–92.
Те саме: *Sandrakov G. V.* Homogenization of elasticity equations with contrasting coefficients // Sbornik: Mathematics. – 1999. – **190**, No. 12. – P. 1749–1806.
17. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. – Москва: Мир, 1984. – 472 с.
Те саме: *Sánchez-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory. – Lect. Notes Phys. – Vol. 127. – Berlin: Springer-Verlag, 1980.
18. *Чечкин Г. А.* Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе «легких» концентрированных масс. Двумерный случай// Изв. РАН. Сер. мат. – 2005. – **69**, № 4. – С. 161–204.
19. *Чечкин Г. А.* Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах // Успехи мат. наук. – 2004. – **59**, № 4. – С. 205–206.
Те саме: *Chechkin G. A.* Splitting of a multiple eigenvalue in a problem of concentrated masses // Russian Math. Surveys. – 2004. – **59**, No. 4. – P. 790–791.
20. *Amirat Y., Chechkin G. A., Gadyl'shin R. R.* Asymptotics for eigenelements of Laplacian in domain with oscillating boundary: multiple eigenvalues // Appl. Anal. – 2007. – **86**, No. 7. – P. 873–897.
21. *Babych N., Golovaty Yu.* Asymptotic analysis of vibrating system containing stiff-heavy and flexible-light parts // Нелинейные граничные задачи. – 2008. – **18**. – P. 194–207.
22. *Babych N., Golovaty Yu. D.* Low and high frequency approximations to eigenvibrations in a medium with double contrasts // J. Comput. Appl. Math. – 2010. – **234**, No. 6. – P. 1860–1867.
23. *Bourgeat A., Chechkin G. A., Piatnitski A. L.* Singular double porosity model // Appl. Anal. – 2003. – **82**, No. 2. – P. 103–116.
24. *Chechkin G. A.* Homogenization of a model spectral problem for the Laplace operator in a domain with many closely located «heavy» and «intermediate heavy» concentrated masses // J. Math. Sci. – 2006. – **135**, No. 6. – P. 3485–3521.
Те саме: *Чечкин Г. А.* Усреднение модельной спектральной задачи для оператора Лапласа в области с большим количеством близко расположенных «тяжёлых» и «средних» концентрированных масс // Проблемы мат. анализа. – 2006. – **32**. – С. 45–76.
25. *Chechkin G. A., Mel'nyk T. A.* Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses // Appl. Anal. – 2012. – **91**, No. 6. – P. 1055–1095.
26. *Geymonat G., Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Palencia E., Roach G. F.* Spectral properties of certain stiff problems in elasticity and acoustics // Math. Method Appl. Sci. – 1982. – **4**. – P. 291–306.
27. *Golovaty Yu. D., Gómez D., Lobo M., Pérez E.* On vibrating membranes with very heavy thin inclusions // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2004. – **14**, No. 7. – P. 987–1034.
28. *Gómez D., Lobo M., Nazarov S. A., Pérez E.* Asymptotics for the spectrum of the Wentzell problem with a small parameter and other related stiff problems // J. Math. Pure Appl. – 2006. – **86**, No. 5. – P. 369–402.
29. *Lobo M., Nazarov S. A., Pérez E.* Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues // IMA J. Appl. Math. – 2005. – **70**, No. 3. – P. 419–458.
30. *Lobo M., Pérez E.* Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review // C. R. Mécanique. – 2003. – **331**. – P. 303–317.
31. *Mel'nyk T. A.* Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2001. – **11**, No. 6. – P. 1001–1029.
32. *Rybalko V.* Vibrations of elastic systems with a large number of tiny heavy inclusions // Asymptotic Anal. – 2002. – **32**. – P. 27–62.
33. *Sánchez Hubert J., Sánchez Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – xvi + 421 p.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЖЕСТКИМИ ЛЕГКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Исследованы спектральные свойства краевой задачи для эллиптического оператора второго порядка с сингулярно возмущенными коэффициентами. Задача моделирует собственные колебания упругой системы с конечным числом жестких и одновременно легких включений произвольной формы при условии, что отношение коэффициентов жесткости включений и основного тела имеет порядок ε^{-1} *при* $\varepsilon \to 0$, *а отношение плотностей массы – порядок* $\varepsilon^{æ}$, *когда* $æ > 0$. *Построены и обоснованы полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задачи.*

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF VIBRATING SYSTEM WITH STIFF AND LIGHT-WEIGHT INCLUSIONS

The spectral properties of a boundary value problem for the second-order elliptic operator with singularly perturbed coefficients are studied. The problem describes eigenmodes of an elastic system with a finite number of stiff and light-weight inclusions of arbitrary shape. It is assumed that the ratio of stiffness coefficients of inclusions and the body has the order ε^{-1} *at* $\varepsilon \to 0$ *and the ratio of their mass densities is of order* $\varepsilon^{æ}$ *with* $æ > 0$. *Complete asymptotic expansions of the eigenvalues and eigenfunctions of this problem are constructed and justified.*

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
30.01.12