

### НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПАРАБОЛОИДАЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ С РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

*На примере задачи об осесимметричном вдавливании кругового в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство с неподвижным параболоидальным основанием, соосным оси штампа, при отсутствии трения между штампом и полупространством, решенной обобщенным методом Фурье, проведен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния тел из трансверсально-изотропных материалов с различными упругими свойствами. Результаты вычислений показывают, что распределение напряжений в полупространстве под штампом зависит как от самих упругих параметров, так и от корней характеристического уравнения.*

Изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) пространственных канонических тел с усложненными физико-механическими свойствами, в том числе с трансверсальной изотропией материала тела, является важным направлением исследований [9–11], в частности, создания математических моделей композитных материалов [3]. В работах [1, 2] рассматриваются односвязные трансверсально-изотропные тела. Актуальность такого типа задач обусловлена малой изученностью многосвязных тел, важностью аналитического и численного анализа НДС в зонах концентрации напряжений и граничных поверхностей.

В работе проведен сравнительный анализ НДС тел из трансверсально-изотропных материалов с различными упругими свойствами на примере задачи об осесимметричном вдавливании кругового в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство с неподвижным параболоидальным основанием, соосным оси штампа, при отсутствии трения между штампом и полупространством. Выполнены расчеты зависимости напряжений между граничными поверхностями и перемещений под штампом в зависимости от упругих свойств трансверсально-изотропных материалов и геометрических параметров задачи (расстояния между граничными поверхностями, формы параболоидального основания, диаметра штампа).

Трансверсально-изотропный материал характеризуют пять различных упругих постоянных  $C_{ij}$ , которые связаны с модулями Юнга, коэффициентами Пуассона и модулями сдвига соотношениями:

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{C_{13}}{C_{11} + C_{12}}, & \frac{1 - \nu}{1 + \nu} &= (C_{11} - C_{12}) \frac{C_{33}}{C_{13}} \frac{\nu'}{E'}, \\ E' &= (C_{11} + C_{12}) \left( \frac{C_{33}}{C_{13}} \nu' - 2\nu'^2 \right), & E &= (C_{11} - C_{12})(1 + \nu), \\ G' &= C_{44}, & G &= \frac{E}{2(1 + \nu)}. \end{aligned}$$

Здесь  $\nu$  и  $\nu'$  – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении и в перпендикулярном ей направлении соответственно;  $E$  и  $E'$  – модули Юнга в плоскости изотропии и перпендикулярном к ней направлении соответственно;  $G$  и  $G'$  – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярном ей направлении соответственно.

Пусть  $v_1$  и  $v_2$  – действительные корни характеристического уравнения

$$C_{11}C_{44}v^2 - (C_{33}C_{11} - 2C_{13}C_{44} - C_{13}^2)v + C_{33}C_{44} = 0, \quad (1)$$

которые, как известно, являются положительными.

Корни  $v_j$ ,  $j = 1, 2$ , определяют степень анизотропии материала. Чем больше они отличаются друг от друга, тем более выражены анизотропные свойства. При построении математического аппарата обобщенного метода Фурье (ОМФ) для решения задач теории упругости для многосвязных тел на каждой граничной поверхности вводится пара соответствующих криволинейных систем координат, зависящих от  $v_j$ . В каждой такой паре систем координат строятся соответствующие базисные решения [4]. Для связи между различными криволинейными системами координат получают теоремы сложения, позволяющие записывать общее решение задачи в каждой из рассматриваемых систем и удовлетворять граничным условиям на каждой граничной поверхности [5].

Математический аппарат ОМФ для трансверсально-изотропных тел, ограниченных координатными поверхностями в цилиндрических и параболаидальных координатах разработан и обоснован автором совместно с А. Г. Николаевым в работах [6, 7]. Задача об осесимметричном вдавливании кругового в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство с неподвижным параболаидальным основанием при отсутствии трения между штампом и полупространством, где в качестве материала рассматривался песчаник, решена в [8]. Исследованы напряжения между плоскостью и параболаидом вращения в зависимости от геометрических параметров (размер штампа, форма параболаида, расстояние между поверхностями).

В данной работе построенный аппарат ОМФ использован для исследования НДС различных трансверсально-изотропных материалов.

Рассмотрим осесимметричное вдавливание кругового в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство с неподвижным параболаидальным основанием, соосным оси штампа [8] (рис. 1). Считаем, что трение между штампом и полупространством отсутствует, радиус штампа равен  $a$ , уравнение  $z = c_1\rho^2 - c_2$ ,  $c_j > 0$ , задает поверхность параболаидального основания в цилиндрической системе координат  $(\rho, z, \varphi)$ , соосной с осью штампа, начало которой расположено на расстоянии  $h$  от границы полупространства. Ось анизотропии совпадает с осью симметрии рассматриваемого тела.

Введем две параболаидальные системы координат  $(\beta_j, \alpha_j, \varphi)$ ,  $j = 1, 2$ , связанные с цилиндрической системой координат формулами

$$\begin{cases} \rho = \rho_j, \\ z = v_j(z_j + \gamma_j), \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_j = a_j\alpha_j\beta_j, \\ z_j = \frac{a_j}{2}(\alpha_j^2 - \beta_j^2), \end{cases}$$

где  $a_j > 0$ ,  $\gamma_j$  – параметры параболаидальных координат. Уравнение параболаидального основания можно представить в виде  $\beta_j = \beta_{j0}$ . При  $v_j a_j = 2c_1$  на поверхности основания выполняется условие  $\alpha_j = \rho$ . Уравнение границы полупространства  $z = -h$  в переменных  $z_j$  имеет вид

$$z_j = -\frac{h}{v_j} - \frac{v_j}{4c_1} + \frac{c_2}{v_j} \equiv -h_j, \quad j = 1, 2.$$

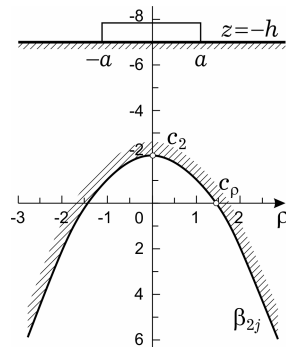


Рис. 1

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^{\infty} A_j(\lambda) U_{j,0,\lambda}^{-(2)}(\rho, z_j) d\lambda + \int_0^{\infty} B_j(t) U_{j,0,t}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j) dt \right\}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(9)}(\alpha_s, \beta_s, \varphi)$ ,  $\mathbf{U}_{s,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_s, \varphi)$ ,  $s = 1, 2$ , – внутренние и внешние базисные решения уравнений равновесия трансверсально-изотропных тел в параболических и цилиндрических координатах соответственно [5].

Теоремы сложения решений (2), полученные в [5], позволяют удовлетворить условиям на граничных поверхностях:

$$\begin{aligned} u_z \Big|_{z=-h, \rho < a} &= -\delta, & \sigma_z \Big|_{z=-h, \rho > a} &= 0, \\ \tau_{\rho z} \Big|_{z=-h} &= 0, & U \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}} &= 0. \end{aligned}$$

Задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода [8].

Напряжения при  $z \in (-h, c_2]$  можно вычислять по формуле

$$\sigma_z = C_{44} \sum_{j=1}^2 (k_j + 1) \int_0^{\infty} \lambda \left( e^{\lambda z_j} \int_0^{\infty} B_j(t) g_{0,t,j}^{(92)\lambda} dt - A_j(\lambda) e^{-\lambda z_j} \right) J_0(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где  $J_0(x)$  – функции Бесселя первого рода.

Значения упругих свойств выбранных для исследования материалов представлены в табл. 1 – табл. 3.

Таблица 1. Упругие постоянные.

	кварц	песчаник	алевролит	стеклопластик
$C_{11}$ , Па	$1.184 \cdot 10^{12}$	$5.8576 \cdot 10^{10}$	$7.2924 \cdot 10^5$	4318.1818
$C_{12}$ , Па	$0.19 \cdot 10^{12}$	$2.5019 \cdot 10^{10}$	$2.2023 \cdot 10^5$	681.8182
$C_{13}$ , Па	$0.32 \cdot 10^{12}$	$2.0793 \cdot 10^{10}$	$2.2787 \cdot 10^5$	2500
$C_{33}$ , Па	$1.07 \cdot 10^{12}$	$6.1105 \cdot 10^{10}$	$6.7738 \cdot 10^5$	22500
$C_{44}$ , Па	$0.358 \cdot 10^{12}$	$1.6584 \cdot 10^{10}$	$2.29 \cdot 10^5$	300

Таблица 2. Упругие модули.

	кварц	песчаник	алевролит	стеклопластик
$G$ , Па	$4.97 \cdot 10^{11}$	$1.67785 \cdot 10^{10}$	$2.25 \cdot 10^5$	4000
$G'$ , Па	$3.58 \cdot 10^{11}$	$1.6584 \cdot 10^{10}$	$2.29 \cdot 10^5$	300
$E$ , Па	$10.801 \cdot 10^{11}$	$4.5249 \cdot 10^{10}$	$6.21 \cdot 10^5$	4000
$E'$ , Па	$9.209 \cdot 10^{11}$	$5.0761 \cdot 10^{10}$	$5.68 \cdot 10^5$	20000
$\nu$	0.087	0.3484	0.22	0.1
$\nu'$	0.233	0.2487	0.24	0.5

Таблица 3. Корни характеристического уравнения.

	кварц	песчаник	алевролит	стеклопластик
$\nu_1$	0.7371	0.7203	0.8399	0.2749
$\nu_2$	1.2897	1.4181	1.1474	8.3031

Характер распределения напряжений в зависимости от геометрических параметров (радиуса  $a$  штампа, формы параболического основания – параметра  $c_p$ , и расстояния  $L$  между граничными поверхностями) про-

анализирован в работе [8] на примере песчаника. Зависимость распределения напряжений  $\sigma = \frac{\sigma_z}{G'}$  от координаты  $\rho$  между граничными поверхностями для различных трансверсально-изотропных материалов при выбранных значениях геометрических параметров показана на рис. 2 – рис. 5. Вычисления выполнены для случая, когда форма параболоида и расстояние между границей полупространства и вершиной параболоида постоянны:  $c_\rho = 1$ ,  $L = 5$ . Значения напряжений  $\sigma$  в зависимости от  $\rho$  на рис. 2 приведены в плоскости изотропии, параллельной граничной поверхности и расположенной на расстоянии  $\frac{L}{5}$  от нее, а на рис. 3 – на расстоянии для  $\frac{2}{5}L$  для случая, когда радиус штампа  $a = 2$ . На рис. 4, рис. 5 приведены аналогичные напряжения при  $a = 1$ . На всех рисунках кривые 1 соответствуют напряжениям в кварце, кривые 2 – в песчанике, кривые 3 – в алевролите и кривые 4 – в стеклопластике.

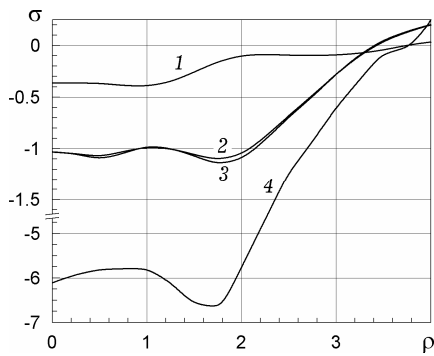


Рис. 2

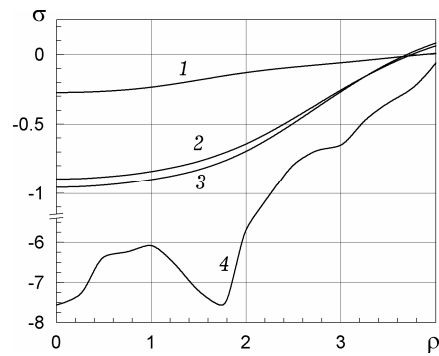


Рис. 3

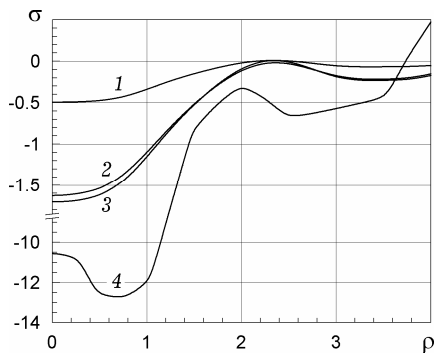


Рис. 4

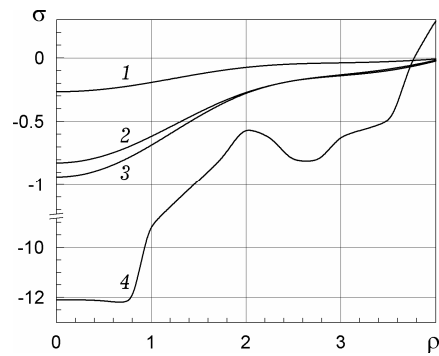


Рис. 5

Анализируя приведенные графики, необходимо отметить, что распределение напряжений между граничными поверхностями в значительной степени зависит от значений корней  $\nu_j$ ,  $j = 1, 2$ , характеристического уравнения (1), которые определяют степень анизотропии материала: у кварца, песчаника и алевролита они близки, в отличие от стеклопластика. Также заметна зависимость напряжений в исследуемом теле от коэффициентов Пуассона в продольном и поперечном направлениях: у алевролита  $\frac{\nu}{\nu'} = 1.09$ , у песчаника  $\frac{\nu}{\nu'} = 1.4$ , у кварца  $\frac{\nu}{\nu'} = 2.7$ , а у стеклопластика  $\frac{\nu}{\nu'} = 5$ . Абсолютные величины упругих констант, которые отличаются на несколько порядков, отражены в меньшей мере, т. к. нормирующим множителем при расчетах напряжений выбран модуль сдвига  $G' = C_{44}$ .

1. *Клиндухов В. В.* Вдавливание гладкого осесимметричного штампа в трансверсально-изотропный слой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 5. – С. 99–105.
2. *Колмогоров Г. Л., Снигирева М. В.* Трансверсально изотропные характеристики сверхпроводниковых материалов // Современ. научн. исследования и инновации. – 2007. – № 1. – С. 31–40.
3. *Николаев А. Г.* Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости для канонических многосвязных тел: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. – Харьков, 1997. – 331 с.
4. *Николаев А. Г.* Теоремы сложения перемещений трансверсально изотропных канонических тел. – Киев, 1996. – 52 с. – Деп. в ГНТБ Украины 10.07.96, № 1568–Ук 96.
5. *Николаев А. Г., Щербакова Ю. А.* Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 3. – С. 160–169.  
Te same: *Nikolaev A. G., Shcherbakova Yu. A.* Apparatus and applications of a generalized Fourier method for transversally isotropic bodies bounded by a plane and a paraboloid of rotation // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No. 5. – P. 620–631.
6. *Николаев А. Г., Щербакова Ю. А.* Обоснование метода Фурье в осесимметричных задачах теории упругости для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностью параболоида // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2010. – Вып. 48. – С. 180–190.
7. *Родионова З. Н., Есипенко Л. П., Шестакова Е. Б.* Напряженное состояние трансверсально-изотропного полупространства // Вестн. Вост.-Казахст. гос. техн. ун-та им. Д. Серикбаева. – 2009. – № 3. – С. 37–42.
8. *Щербакова Ю. А.* Анализ напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропного полупространства под действием кругового штампа // Проблемы машиностроения. – 2010. – **13**, № 4. – С. 42–48.
9. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of transversely isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p. – Ser. Solid Mech. and its Appl. – Vol. 126.
10. *Gupta R. R.* Reflection of plane waves in thermoelastic transversely isotropic half space // Int. J. Appl. Math. Mech. – 2012. – **8**, No. 10. – P. 71–82.
11. *I-Shih Liu.* On entropy flux of transversely isotropic elastic bodies // J. Elasticity. – 2009. – **96**, No. 2. – P. 97–104.

### НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ З ПАРАБОЛОЇДНОЮ ОСНОВОЮ З РІЗНИМИ ПРУЖНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

На прикладі задачі про осесиметричне вдавлювання кругового в плані штампа у трансверсально-ізоотропний півпростір з нерухомою параболоїдною основою, співвісною осі штампа, при відсутності тертя між штампом і півпростором, розв'язаної за допомогою узагальненого методу Фур'є, виконано порівняльний аналіз напружено-деформованого стану тіл із трансверсально-ізоотропних матеріалів з різними пружними властивостями. Результати обчислень показують, що розподіл напружень у півпросторі під штампом залежить як від пружних параметрів, так і від коренів характеристичного рівняння.

### STRESS-STRAIN STATE OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC HALF-SPACE WITH PARABOLOIDAL BASIS WITH DIFFERENT ELASTIC CHARACTERISTIC

The problem on the axially symmetric impression of circular stamp in a transversely isotropic half-space with unmoving paraboloidal basis coaxial with stamp axis in the absence of friction between the stamp and the half-space is solved by the generalized Fourier's method. The comparative analysis of stress-strain state of solids of transversely isotropic materials with different elastic characteristics is carried out. Numerical results show that the stress distribution in the half-space under the stamp depends on the elastic parameters and on the roots of the characteristic equation.

Нац. аерокосм. ун-т  
им. Н. Е. Жуковського «ХАИ», Харків

Получено  
23.07.13