

**ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ТРИШАРОВОГО ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА З ЖОРСТКИМ
НЕРІВНОМІРНО НАГРІТИМ СЕРДЕЧНИКОМ**

Розглядається осесиметрична контактна задача для тришарового пружного циліндра скінченних розмірів із жорстким нерівномірно нагрітим сердечником в умовах зовнішнього конвективного теплообміну. На поверхнях можливого контакту циліндра із сердечником і шарів між собою задаються умови ідеального одностороннього механічного контакту та неідеального теплового контакту. Отримано варіаційне формулювання задачі. Запропоновано ітераційний алгоритм, на кожній ітерації якого розв'язуються незв'язані задачі теорії пружності та теплопровідності, для дискретизації яких використовується метод скінченних елементів.

Вступ. Відомо, що температурні деформації можуть суттєво змінювати картину напружено-деформованого стану статично невизначених систем навіть при незначному нагріві. На тепловий режим контактуючих тіл значний вплив має термічний опір контакту, зумовлений недосконалістю механічного з'єднання контактуючих поверхонь [5, 10, 11]. Особливо важливим є врахування неідеальності теплового контакту у випадку багатошарових тіл [13]. На поточний момент отримано аналітичні розв'язки ряду задач для випадків контакту нескінченних півплощин з урахуванням неідеального термомеханічного контакту [12, 14, 16]. Із впровадженням автоматизованих систем у практику проектування конструкцій і споруд актуальною проблемою стає розробка методів чисельного моделювання процесів контактного теплообміну, які відкривають можливості для розв'язання задач у широкому діапазоні граничних умов. Відома незначна кількість робіт у цьому напрямку. Зокрема, розвивається розривний метод Гальоркіна для розв'язання задач термопружності з неідеальним контактом [15]. Також розроблено методи розв'язування та отримано результати для плоских задач про контакт пружних одношарових [1] і багатошарових [2] тіл із жорсткими нагрітими штампами в умовах неідеального термомеханічного контакту методом скінченних елементів.

У цій роботі розглядається осесиметрична контактна задача термопружності для тришарового пружного циліндра скінченних розмірів із жорстким нерівномірно нагрітим сердечником в умовах зовнішнього конвективного теплообміну з навколишнім середовищем. При постановці задачі вважаються відомими лише гранично можливі області контакту циліндра із сердечником і його шарів між собою, а фактичні площадки контакту визначаються в процесі розв'язку задачі. Теплова взаємодія циліндра із сердечником і його шарів між собою описується умовами неідеального теплового контакту. Вважається, що коефіцієнт контактного теплообміну є функцією контактного тиску та фактичного зазору між шарами. Це зумовлює зв'язаність задач про визначення напружено-деформованого та температурного станів навіть при використанні незв'язаної системи рівнянь термопружності.

Розроблено обчислювальний алгоритм і проведено чисельне дослідження поставленої задачі. Особливий інтерес викликають умови, при яких внаслідок нагрівання відбувається розшарування циліндра і змінюються розміри області фактичного контакту із жорстким сердечником.

Постановка задачі. Розглянемо тіло обертання у вигляді тришарового пружного циліндра скінченних розмірів із жорстким нерівномірно нагрітим сердечником (рис. 1). Введемо циліндричну систему координат (r, φ, z) , вісь z якої співпадає з віссю циліндра. Меридіанні перетини шарів циліндра

мають форму областей Ω_i , $i = 1, 2, 3$, з кусково-гладкими границями Γ^i , $i = 1, 2, 3$. Для визначеності будемо вважати, що шари циліндра є однорідними та ізотропними, мають однакові пружні і теплофізичні характеристики, а області Ω_i мають вигляд

$$\Omega_1 = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : L_0 \leq r \leq L_0 + L_r/3, 0 \leq z \leq L_z\},$$

$$\Omega_2 = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : L_0 + L_r/3 \leq r \leq L_0 + 2L_r/3, 0 \leq z \leq L_z\},$$

$$\Omega_3 = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : L_0 + 2L_r/3 \leq r \leq L_0 + L_r, 0 \leq z \leq L_z\},$$

де L_0 – внутрішній радіус, L_r – товщина циліндра, L_z – висота циліндра.

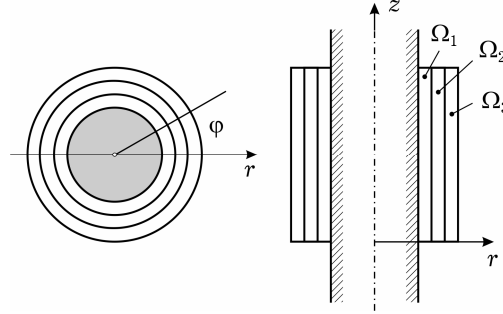


Рис. 1

Для спрощення позначень усюди, де це можливо, домовимося індекс (номер шару) опускаєти, говорячи про конкретний шар циліндра та параметри, що його характеризують, а у випадку, якщо мова буде йти про два контактуючих шари, індекс, що визначає номер одного із шарів, будемо опускаєти, а номер другого шару будемо позначати символом «*».

Будемо вважати, що термопружний стан циліндра є осесиметричним, тобто розподіли температури, переміщень, деформацій і напружень не залежать від кутової координати φ . Під T , $\{u_r, u_z\}$, $\{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rz}\}$, $\{\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}\}$ будемо розуміти відповідно температуру та компоненти вектора переміщень, тензорів деформації і напружень у точці $x = \{r, z\} \in \Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$. Переміщення і деформації вважаються малими. У початковому стані температура тіла дорівнює T_0 , і деформації в ньому відсутні.

При відсутності масових сил і об'ємних джерел тепла осесиметричний термопружний стан циліндра описується незв'язаною системою рівнянь статичної термопружності [6, 8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \theta &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma_{rr} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr} - \beta(T - T_0), & \sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz} - \beta(T - T_0), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} - \beta(T - T_0), & \sigma_{rz} &= 2\mu\varepsilon_{rz}, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) + r\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \sigma_{\varphi\varphi} &= 0, & \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) + r\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + r\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де λ , μ – сталі Ляме; β – коефіцієнт температурного розширення. Відмітимо, що сталі Ляме λ , μ і коефіцієнт температурного розширення β не залежать від температури, а коефіцієнт теплопровідності k , у свою чергу, не залежить від зміни напружено-деформованого стану.

Частину границі Γ^1 , по якій можливий контакт циліндра із жорстким сердечником, позначимо через Γ_p , частини границь Γ^1 і Γ^2 , по яких можливий контакт шарів Ω_1 і Ω_2 , позначимо через Γ_c^{12} і Γ_c^{21} відповідно, а частини границь Γ^2 і Γ^3 , по яких можливий контакт шарів Ω_2 і Ω_3 , – через Γ_c^{23} і Γ_c^{32} відповідно. Додатково введемо позначення $\Gamma'_c = \Gamma_c^{12} \cup \Gamma_c^{23}$ і $\Gamma''_c = \Gamma_c^{21} \cup \Gamma_c^{32}$. Підкреслимо, що при постановці задачі задаються лише гранично можливі розміри областей контакту, фактичні ділянки контакту циліндра із сердечником і шарів між собою визначаються в процесі розв'язування задачі.

Форма сердечника описується функцією $\Phi(x)$, значення якої в точці $x \in \Gamma_p$ дорівнює відстані від цієї точки до поверхні сердечника, обчисленої уздовж напрямку зовнішньої нормалі $\mathbf{n}(x)$ до границі Γ_p . Відстань $\Phi(x)$ відраховується відносно недеформованого стану шару Ω_1 . Від'ємні значення функції $\Phi(x)$ відповідають випадку початкового натягу (радіус сердечника більший від радіуса внутрішнього циліндра).

Механічна взаємодія пружного циліндра із сердечником описується лінеаризованими умовами одностороннього контакту при відсутності тертя [7–9]:

$$\begin{aligned} u_r(x) &\geq -\Phi(x), & \sigma_{rr}(x) &\leq 0, & \sigma_{rz}(x) &= 0, \\ \sigma_{rr}(x)[u_r(x) + \Phi(x)] &= 0, & x &\in \Gamma_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогічно, механічна взаємодія шарів пружного циліндра між собою описується співвідношеннями

$$\begin{aligned} u_r(x) - u_r(x^*) &\leq 0, & \sigma_{rr}(x) = \sigma_{rr}(x^*) &\leq 0, & \sigma_{rz}(x) = \sigma_{rz}(x^*) &= 0, \\ \sigma_{rr}(x)[u_r(x) - u_r(x^*)] &= 0, & x \in \Gamma'_c, & & x \in \Gamma''_c, \end{aligned} \quad (3)$$

де $x \in \Gamma'_c$, $x^* \in \Gamma''_c$ – точки на контактуючих поверхнях шарів циліндра, що мають однакову координату z .

Теплова взаємодія пружного циліндра із сердечником і його шарів між собою описується умовами неідеального теплового контакту:

$$k \frac{\partial T(x)}{\partial r} = -\alpha_p (T(x) - T_p(x)), \quad x \in \Gamma_p, \quad (4)$$

$$k \frac{\partial T(x)}{\partial r} = -k \frac{\partial T(x^*)}{\partial r} = -\alpha_c (T(x) - T(x^*)), \quad x \in \Gamma'_c, \quad x^* \in \Gamma''_c, \quad (5)$$

де α_p та α_c – коефіцієнти контактного теплообміну, k – коефіцієнт теплопровідності, $T_p(x)$ – температура поверхні жорсткого сердечника.

Значення коефіцієнтів контактного теплообміну α_p та α_c залежать від великої кількості факторів [11], оскільки тепла енергія між контактуючими поверхнями в загальному випадку може передаватися теплопровідністю через місця фактичного контакту виступаючих нерівностей, теплопровідністю і конвекцією через середовище, що заповнює вільний простір між поверхнями, а також випромінюванням. У цій роботі розглядається випа-

док, коли α_p і α_c є функціями контактного тиску і фактичного зазору між дотичними поверхнями:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \Phi(x) + u_r(x), & x \in \Gamma_p, \\ \psi(x) &= u_r(x^*) - u_r(x), & x \in \Gamma'_c, \quad x^* \in \Gamma''_c, \\ \alpha_p(\sigma_{rr}, \phi) &= \begin{cases} f_1(\sigma_{rr}), & \sigma_{rr} \leq 0, \quad \phi = 0, \\ f_2(\phi), & \sigma_{rr} = 0, \quad \phi \geq 0, \end{cases} \\ \alpha_c(\sigma_{rr}, \psi) &= \begin{cases} f_3(\sigma_{rr}), & \sigma_{rr} \leq 0, \quad \psi = 0, \\ f_4(\psi), & \sigma_{rr} = 0, \quad \psi \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

де $\phi(x)$ – фактичний зазор між циліндром і сердечником; $\psi(x)$ – фактичний зазор між шарами циліндра.

Вважається, що функції $f_1(\sigma_{rr})$, $f_2(\phi)$, $f_3(\sigma_{rr})$ і $f_4(\psi)$ є незростаючими, причому $f_1(0) = f_2(0)$ і $f_3(0) = f_4(0)$.

Залежність коефіцієнтів контактної теплообміну від параметрів механічного контакту приводить до зв'язаності напружено-деформованого та температурного станів циліндра, отже, розглянута задача є зв'язаною контактною задачею термопружності внаслідок граничних умов (4) і (5).

На зовнішній бічній поверхні циліндра $\Gamma_\alpha \in \Gamma^3$ відсутнє зовнішнє навантаження і задані граничні умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$\sigma_{rr}(x) = \sigma_{rz}(x) = 0, \quad k \frac{\partial T(x)}{\partial r} = \tilde{\alpha}(T_\alpha - T(x)), \quad x \in \Gamma_\alpha, \quad (7)$$

де T_α – температура зовнішнього середовища; $\tilde{\alpha}$ – коефіцієнт конвективного теплообміну.

Поверхня торців циліндра $\Gamma_t = \Gamma_t^1 \cup \Gamma_t^2 \cup \Gamma_t^3$ вільна від зовнішнього навантаження та теплоізолювана:

$$\sigma_{zz}(x) = \sigma_{rz}(x) = 0, \quad k \frac{\partial T(x)}{\partial z} = 0, \quad x \in \Gamma_t. \quad (8)$$

Таким чином, задача полягає у визначенні функцій T , $\{u_r, u_z\}$ і $\{\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{rz}\}$, що задовольняють в області Ω_0 систему рівнянь (1) із граничними умовами (2)–(5), (7), (8). Необхідно також визначити фактичні області контакту пружного циліндра із жорстким сердечником і його шарів між собою.

Варіаційне формулювання задачі. Введемо прямі добутки просторів С. Л. Соболева $H_u = [W_2^1(\Omega_1)]^2 \otimes [W_2^1(\Omega_2)]^2 \otimes [W_2^1(\Omega_3)]^2$ вектор-функцій переміщень $v(x) = (\tilde{v}^1(x), \tilde{v}^2(x), \tilde{v}^3(x))$ та $H_T = W_2^1(\Omega_1) \otimes W_2^1(\Omega_2) \otimes W_2^1(\Omega_3)$ функцій температур $\Theta(x) = (\Theta^1(x), \Theta^2(x), \Theta^3(x))$. Виділимо у просторі H_u множину кінематично допустимих переміщень

$$V_u = \begin{cases} v(x) \in H_u(\Omega) : v_r(x) \geq -\Phi(x), & x \in \Gamma_p, \\ v_r(x) - v_r(x^*) \leq 0, & x \in \Gamma'_c, \quad x^* \in \Gamma''_c. \end{cases}$$

Для спрощення запису введемо позначення:

$$\begin{aligned} b(T, \Theta) &= \sum_{m=1}^3 \int_{\Omega_m} k \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) d\Omega_m, \\ K(T, \Theta) &= \int_{\Gamma_\alpha} \tilde{\alpha} \Theta T d\Gamma_\alpha, \quad N(\Theta) = \int_{\Gamma_\alpha} \tilde{\alpha} T_\alpha \Theta d\Gamma_\alpha, \end{aligned}$$

$$a(u, v) = \sum_{m=1}^3 \int_{\Omega_m} [(\sigma_{rr}(u^m)\varepsilon_{rr}(v^m) + \sigma_{zz}(u^m)\varepsilon_{zz}(v^m) + 2\sigma_{rz}(u^m)\varepsilon_{rz}(v^m) + \sigma_{\varphi\varphi}(u^m)\varepsilon_{\varphi\varphi}(v^m)] d\Omega_m,$$

$$M(T, v) = \sum_{m=1}^3 \int_{\Omega_m} \beta(T - T_0)(\theta(v^m)) d\Omega_m.$$

Нехай (u, T) – розв’язок задачі в диференціальній постановці (1)–(5), (7), (8). Тоді з використанням результатів [4, 9] можна показати, що справджуються наступні твердження.

Твердження 1. Розв’язок задачі в диференціальній постановці (1)–(5), (7), (8) задовольняє систему, що складається з варіаційного рівняння

$$b(T, \Theta - T) + K(T, \Theta - T) - N(\Theta - T) + \int_{\Gamma_p} \alpha_p(\sigma, \phi)(T - T_p)(\Theta - T) d\Gamma_p + \int_{\Gamma'_c} \alpha_c(\sigma, \psi)(T - T^*)(\Theta - \Theta^* - (T - T^*)) d\Gamma'_c = 0 \quad \forall \Theta, T \in H_T \quad (9)$$

і варіаційної нерівності

$$a(u, v - u) - M(T, v - u) \geq 0 \quad \forall v, u \in V_u. \quad (10)$$

Твердження 2. Розв’язок системи (9), (10), якщо він існує і має другі похідні (хоча б узагальнені), задовольняє всі рівняння та умови задачі в диференціальній постановці (1)–(5), (7), (8).

Обчислювальний алгоритм. При постановці задачі використовувалися незв’язані рівняння термопружності (1), однак розглянута задача є зв’язаною контактною задачею термопружності, тому що згідно з (6), коефіцієнт контактної теплообміну залежить від контактної тиску та фактичних зазорів між контактуючими поверхнями. Тому для розв’язування задачі використовується ітераційний алгоритм, на кожному кроці якого розв’язується незв’язана система, що складається з варіаційного рівняння

$$b(T_k, \Theta - T_k) + K(T_k, \Theta - T_k) - N(\Theta - T_k) + \int_{\Gamma_p} \alpha_p(\sigma_{k-1}, \phi_{k-1})(T_k - T_p)(\Theta - T_k) d\Gamma_p + \int_{\Gamma'_c} \alpha_c(\sigma_{k-1}, \psi_{k-1})(T_k - T_k^*)(\Theta - \Theta^* - (T_k - T_k^*)) d\Gamma'_c = 0 \quad \forall \Theta, T_k \in H_T, \quad (11)$$

і варіаційної нерівності

$$a(u_k, v - u_k) - M(T_k, v - u_k) \geq 0 \quad \forall v, u_k \in V_u, \quad (12)$$

де k – номер ітерації; ϕ_{k-1} – фактичний зазор між циліндром і жорстким сердечником на $(k-1)$ -й ітерації; ψ_{k-1} – фактичний зазор між пружними шарами на $(k-1)$ -й ітерації; σ_{k-1} – нормальні контактні напруження на $(k-1)$ -й ітерації.

Нескладно показати, що, якщо функціональна послідовність $\{u_k, T_k\}$ збігається, то межа цієї послідовності (u, T) буде розв’язком варіаційної задачі (9), (10). За початкове наближення для коефіцієнтів контактної теплообміну можна вважати $\alpha_p(0, \Phi)$ та $\alpha_c(0, 0)$.

При побудові обчислювального алгоритму замість варіаційних задач (11), (12) використано еквівалентні їм екстремальні задачі [3].

Твердження 3. Варіаційне рівняння (11) еквівалентне задачі мінімізації:

– знайти поле температур $T \in H_T$ таке, що

$$J_T(T) = \inf_{\Theta \in H_T} \{J_T(\Theta)\}, \quad (13)$$

де

$$J_T(\Theta) = \frac{1}{2}b(\Theta, \Theta) + \frac{1}{2}K(\Theta, \Theta) - N(\Theta) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} \alpha_p(\sigma_{k-1}, \phi_{k-1})(\Theta - T_p)^2 d\Gamma_p + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \alpha_c(\sigma_{k-1}, \psi_{k-1})(\Theta - \Theta^*)^2 d\Gamma_c,$$

а варіаційна нерівність (12) еквівалентна такій задачі мінімізації:

– знайти поле переміщень $u \in V_u$ таке, що

$$J_u(u) = \inf_{v \in V_u} \{J_u(v)\}, \quad (14)$$

де

$$J_u(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - M(T_k, v).$$

Для дискретизації задач мінімізації (13) і (14) застосовували метод скінченних елементів [3]. Для чисельного розв'язання отриманих у результаті дискретизації задач квадратичного програмування використовували метод спряжених градієнтів з масштабуванням матриць жорсткості та теплопровідності з метою прискорення збіжності. За критерій збіжності ітераційного процесу приймали умову встановлення значень контактних напружень σ_{rr} і зазорів ϕ, ψ .

Чисельний розв'язок задачі. Нижче наведено результати чисельного розв'язування задачі для тришарового циліндра, що надітий з початковим натягом на циліндричний жорсткий сердечник. Температура поверхні сердечника змінювалася за лінійним законом $T_p(z) = T_0 + \Delta T \cdot z / L_z$.

Значення фізичних і геометричних параметрів при проведенні розрахунків приймали такими: внутрішній радіус циліндра $L_0 = 1.5$ м, товщина циліндра $L_r = 1.5$ м, висота циліндра $L_z = 3$ м, модуль Юнга $E = 210$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, коефіцієнт лінійного розширення $\beta = 10^{-5}$, коефіцієнт теплопровідності $k = 45.5$ Вт/(м · К), температура зовнішнього середовища $T_\alpha = 0$ °С, початкова температура циліндра $T_0 = 0$ °С, коефіцієнт конвективного теплообміну $\tilde{\alpha} = 21$ Вт/(м² · К), початковий натяг $\Phi = -2 \cdot 10^{-4}$ м.

Значення коефіцієнта контактного теплообміну α_c при неідеальному тепловому контакті визначали за формулою, отриманою шляхом апроксимації експериментальних даних для сталі із середньою висотою шорсткостей $3.1 \cdot 10^{-6}$ м у повітряному середовищі [9]:

$$\alpha_p(\sigma_{rr}, \phi) = \begin{cases} 3 \cdot 10^3 (1 + |\tilde{\sigma}_{rr}|^{0.6} / 10^4), & \sigma_{rr} \leq 0, \quad \phi = 0, \\ 3 \cdot 10^3 / (1 + \tilde{\phi} \cdot 10^4), & \sigma_{rr} = 0, \quad \phi \geq 0, \end{cases} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)},$$

де $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr} / (1 \text{ Па})$; $\tilde{\phi} = \phi / (1 \text{ м})$. Приймали, що $\alpha_c(\sigma_{rr}, \phi) = 0.1 \cdot \alpha_p(\sigma_{rr}, \phi)$.

При дискретизації задачі застосовували регулярну сітку трикутних осесиметричних скінченних елементів першого порядку. На поверхнях $\Gamma_p, \Gamma_c^{12}, \Gamma_c^{21}, \Gamma_c^{23}$ і Γ_c^{32} можливого контакту розміщали по 301 вузлу сітки. Загальна кількість вузлів – 90451, а скінченних елементів – 180000. Проведено також обчислення на більш грубих сітках з метою визначення необхідної деталізації скінченно-елементної сітки.

На рис. 2 наведено розподіл контактних напружень σ_{rr} на поверхні контакту циліндра із жорстким сердечником, на рис. 3 – розподіл напружень σ_{rr} між пружними шарами Ω_1 та Ω_2 , а на рис. 4 – між пружними шарами Ω_2 та Ω_3 . Криві на рис. 2, 3 і 4 відповідають значенням $\Delta T = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ °C. Зі збільшенням температури нагріву сердечника відбувається порушення його контакту із циліндром і розшарування самого циліндра, розподіл виникаючих при цьому зазорів наведено на рис. 5. Криві обчислено для зазору Φ , що виникає між циліндром і жорстким сердечником, відповідно при $\Delta T = 20, 30, 40, 50$ °C, а штрихова крива відповідає зазору ψ між пружними шарами Ω_2 і Ω_3 при $\Delta T = 50$ °C.

На рис. 6 показано різниці температур $T_p - T$ поверхонь циліндра та сердечника (крива 1), а також різниці температур $T - T^*$ між шарами Ω_1 та Ω_2 (крива 2) і між шарами Ω_2 та Ω_3 (крива 3) при $\Delta T = 50$ °C. На рис. 7 показано розподіл температур у меридіанному перетині циліндра при $\Delta T = 50$ °C.

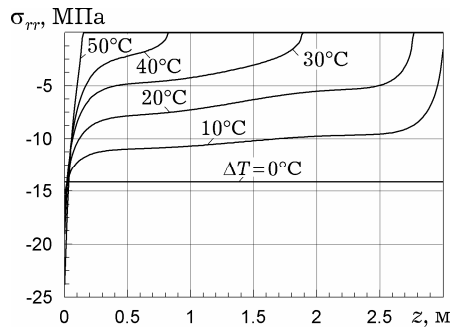


Рис. 2

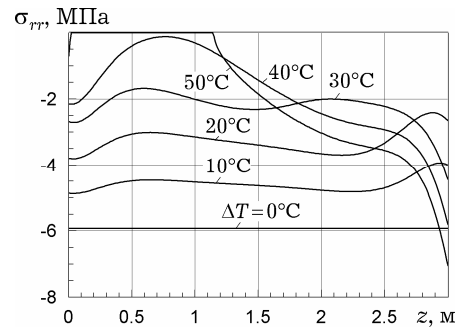


Рис. 3

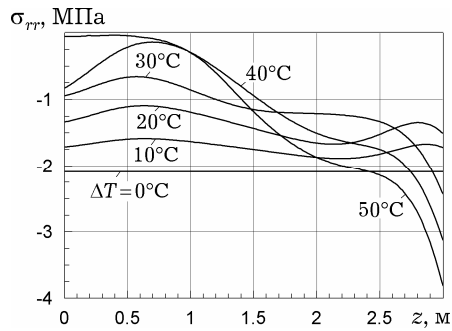


Рис. 4

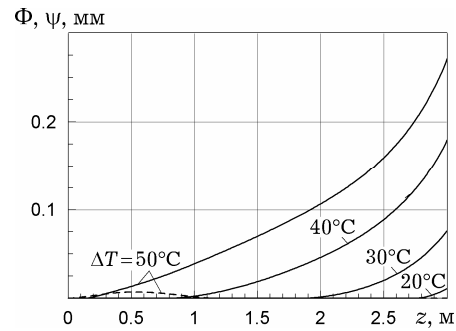


Рис. 5

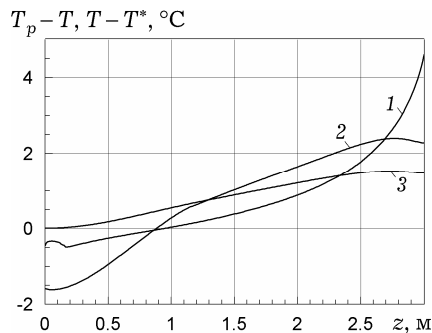


Рис. 6

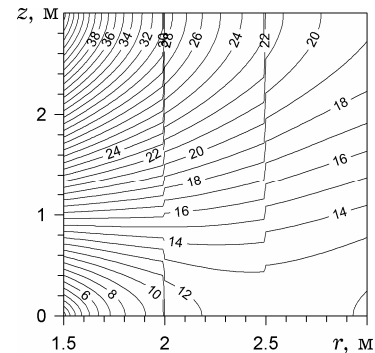


Рис. 7

Висновки. Розглянуто задачу про контактну взаємодію тришарового циліндра скінченних розмірів із жорстким нерівномірно нагрітим циліндричним сердечником. При постановці задачі використовували незв'язані рівняння термопружності та умови неідеального теплового контакту. Приймали, що коефіцієнт контактного теплообміну залежить від контактної тиску та фактичних зазорів між дотичними поверхнями, тому розглянута задача є зв'язаною контактною задачею термопружності.

На основі варіаційного формулювання задачі розроблено ітераційний алгоритм, на кожному кроці якого розв'язуються незв'язані задачі теорії пружності та теплопровідності. Для дискретизації задач використано метод скінченних елементів.

Аналіз числових результатів для тришарового циліндра, натягнутого з початковим натягом на циліндричний жорсткий сердечник, температура поверхні якого змінюється за лінійним законом, показав, що температурні деформації впливають на напружено-деформований стан циліндра, а неідеальний тепловий контакт – на його температурне поле. Зі збільшенням температури нагріву сердечника відбувається порушення його контакту із циліндром і розшарування самого циліндра, причому порушення контакту із циліндром починається на більше нагрітій частині сердечника, а розшарування циліндра – з боку менше нагрітої частини. Відповідно спостерігається збільшення контактної тиску на менше нагрітій частині сердечника і збільшення міжшарових напружень у циліндрі з боку більше нагрітої частини сердечника.

Отримані результати свідчать про нелінійність виникаючих ефектів, а також неможливість апріорного прогнозування якісної поведінки розглянутої термомеханічної системи, оскільки неідеальний термомеханічний контакт істотно впливає на її напружено-деформований стан.

Робота виконана за фінансової підтримки гранту № Ф53/248-2013 ДФФД.

1. Бобылёв А. А. (мл.) Задача о контактном взаимодействии упругого тела с выпуклым нагретым штампом // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2010. Вип. 14, т. 1. – С. 192–198.
2. Бобылёв А. А. (мл.) Задача о сжатии упругой двухслойной полосы жесткими нагретыми выпуклыми штампами // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2010. – Вип. 14, т. 2. – С. 15–22.
3. Glowinski R., Lions J.-L., Trémolières R. Численное исследование вариационных неравенств. – Москва: Мир, 1979. – 574 с.
Te same: Glowinski R., Lions J.-L., Trémolières R. Analyse numérique des inéquations variationnelles. – Paris: Dunod, 1976.
4. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – Москва: Мир, 1980. – 383 с.
Te same: Duvaut G., Lions J.-L., Trémolières R. Les inéquations en mécanique et en physique. – Paris: Dunod, 1972.
5. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – Москва, Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
6. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
7. Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров // Прикл. математика и механика. – 1977. – 41, № 2. – С. 329–337.
8. Механика контактных взаимодействий: Сб. статей / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: Физматлит, 2001. – 672 с.
9. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. – Москва: Мир, 1989. – 496 с.
10. Подстригач А. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 312 с.
11. Шлыков Ю. П., Ганин Е. А., Царевский С. Н. Контактное термическое сопротивление. – Москва: Энергия, 1977. – 328 с.
12. Чулак К. А., Мартиняк Р. М. Періодична контактна задача термопружності для двох півпросторів з шорсткими поверхнями на локальних ділянках // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – 48, № 6. – С. 92–97.

- Те саме: *Chumak K. A., Martynyak R. M.* Periodic contact problem of thermoelasticity for bodies with rough surfaces in local regions // *Mater. Sci.* – 2012. – **48**, No. 6. – P. 795–801.
13. *Blandford G. E., Tauchert T. R.* Thermoelastic analysis of layered structures with imperfect layer contact // *Comput. & Struct.* – 1985. – **21**, No. 6. – P. 1283–1291.
 14. *Chumak K. A., Martynyak R. M.* Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2012. – **55**, No. 21–22. – P. 5603–5608.
 15. *Liu D. H., Zheng X. P., Liu Y. H.* A discontinuous Galerkin finite element method for heat conduction problems with local high gradient and thermal contact resistance // *CMES – Comput Model Eng Sci.* – 2009. – **39**, No. 5. – P. 263–299.
 16. *Martynyak R., Chumak K.* Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2012. – **55**, No. 4. – P. 1170–1178.

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА
С ЖЕСТКИМ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫМ СЕРДЕЧНИКОМ**

Рассматривается осесимметричная контактная задача для трехслойного упругого цилиндра конечных размеров с жестким неравномерно нагретым сердечником в условиях внешнего конвективного теплообмена. На поверхностях возможного контакта цилиндра с сердечником и слоев между собой задаются условия идеального одностороннего механического контакта и неидеального теплового контакта. Получена вариационная формулировка задачи. Предложен итерационный алгоритм, на каждой итерации которого решаются несвязанные задачи теории упругости и теплопроводности. Для дискретизации указанных задач используется метод конечных элементов.

**AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM OF
THERMOELASTICITY FOR A THREE-LAYER ELASTIC
CYLINDER WITH HARD NON-UNIFORMLY HEATED CORE**

The axisymmetric contact problem of thermoelasticity for a finite three-layer elastic cylinder with hard nonuniformly heated core under conditions of external convective heat exchange is considered. The conditions of ideal unilateral mechanical contact and imperfect thermal contact are prescribed on the surfaces of possible contact between the cylinder with core and between the layers. The variational formulation of the problem is obtained. The iterative numerical algorithm is proposed. Uncoupled elasticity and heat conduction problems are solved at the each iteration. The finite element method is used for discretization of the these problems.

Дніпропетр. нац. ун-т
імені Олеся Гончара, Дніпропетровськ

Одержано
13.09.13