

**РОЗТЯГ ТОВСТОСТІННОЇ ОБОЛОНКИ СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ З ТОРЦЯМИ, ПОКРИТИМИ ДІАФРАГМОЮ**

*Розглядається симетрична задача теорії пружності про напружений стан товстостінної оболонки з торцями, покритими діафрагмою. Крайову задачу зведено до нескінченної системи сингулярних інтегральних рівнянь другого роду. Отримано вирази для напружень, які характеризують напружений стан товстостінної оболонки. На основі побудованого аналітичного алгоритму проведено числовий експеримент, результати якого, проілюстровані графічно, містять нову кількісну та якісну інформацію про напружений стан товстостінної оболонки залежно від її геометричних параметрів і коефіцієнтів Пуассона її матеріалів.*

Проблема концентрації напружень у сучасному машинобудуванні є достатньо актуальною, оскільки з нею пов'язані надійність і довговічність проєктованих конструкцій або окремих її елементів. Концентратори напружень у конструкціях можуть виникати внаслідок недосконалості структури матеріалів, з яких вони виготовлені (порожнини, тріщини, сторонні включення), або можуть бути зумовлені технологічною чи конструкційною необхідністю (отвори, вирізи і т. п.). В обох випадках актуальною є задача дослідження впливу або одного концентратора напружень на напружений стан проєктованих виробів, або декількох концентраторів напружень з урахуванням їх взаємного впливу. Прагнення до більш точного аналізу напруженого стану деталей машин в околах концентраторів напружень змушує дослідників звертатись до опису напруженого стану елементів конструкцій у просторовій постановці [4, 8–12].

Ефективним методом розв'язування просторових задач для шару (циліндра) є метод однорідних розв'язків А. І. Лур'є [9], з використанням якого досліджено задачі про напружений стан шару, послабленого різними концентраторами напружень [2, 8]. Іншим ефективним методом при розгляді просторових задач для шару є метод власних векторних функцій, за допомогою якого в [4] розглянуто задачу Кірша. В [11] із використанням власних функцій розв'язано задачу для циліндра, навантаженого по боковій поверхні. У праці [3] до розв'язання задачі про напружений стан товстостінних ортотропних циліндрів запропоновано підхід на основі рівнянь тривимірної теорії пружності. Альтернативними до розв'язування тривимірних задач теорії пружності є методи граничних елементів і метод скінченних елементів. Скінченноелементну дискретизацію у [19] застосовано для дослідження концентрації напруження у скінченній плиті з круговими та еліптичними отворами. Удосконаленню методу граничних елементів при застосуванні до просторових задач теорії пружності присвячено роботи [13, 17].

Методом однорідних розв'язків Лур'є можна побудувати набори часткових розв'язків для шару (циліндра) при будь-яких умовах на його основі, але у випадку граничних умов змішаного типу (ковзне закріплення торців або основи шару покриті діафрагмою, жорсткою у власній площині та гнучкою в перпендикулярному напрямку) гранична задача дещо спрощується. Такі проблеми ще називають періодичними за однією із координат [5, 7, 12, 15, 16]. Відмітимо, що подібні граничні умови досить давно розглядаються у двовимірних задачах деформування пластин та оболонок. Так, у монографії [18] розв'язано декілька задач для пластин, оболонок, двовимірної смуги, покритих «діафрагмою». Також обговорюється питання про застосування таких конструкцій у механіці композитних матеріалів. Процедура розв'язування періодичних задач теорії пружності та електропружності для кусково-однорідного циліндра в  $\mathbb{R}^3$ , відмінну від методики Лур'є, запропонова-

но в роботі [12], де розв'язано ряд симетричних (відносно серединної площини) задач теорії пружності та електропружності. З використанням цієї методики розглянуто косиметричні задачі теорії пружності для шару, послабленого одним концентратором напружень, при ковзному закріпленні його торців [5]. Аналогічну проблему для шару, послабленого двома концентраторами напружень, досліджено в роботі [15]. Симетричну задачу електропружності для неоднорідного шару досліджено в [6].

Нижче отримано розв'язок змішаної симетричної задачі теорії пружності для товстостінної оболонки, торці якої покриті діафрагмою, жорсткою у власній площині та гнучкою у перпендикулярному напрямку. Особливість цього дослідження полягає в тому, що однорідні розв'язки для шару побудовано з використанням процедури, запропонованої у [12], без залучення досить громіздкого символічного методу Лур'є. Крім цього, при розв'язуванні тривимірної крайової задачі для циліндричної області використовуються одновимірні сингулярні інтегральні рівняння [1], точніше нескінченна система таких рівнянь. Проведені чисельні експерименти показали, що розв'язок цієї системи швидко збігається у всьому діапазоні зміни «товщинної» координати. Отже, запропонована процедура фактично зменшує вимірність задачі на дві одиниці.

**1. Постановка задачі та метод розв'язання.** Розглянемо товстостінну ізотропну оболонку скінченної довжини  $-h \leq x_3 \leq h$ , напрямними циліндричних поверхонь яких є достатньо гладкі контури (рис. 1).

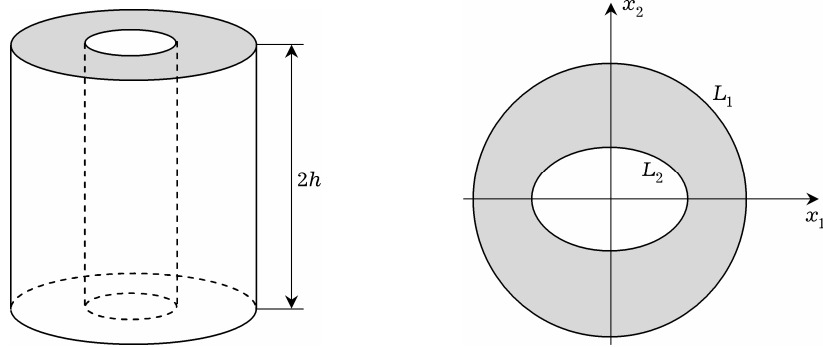


Рис. 1

Нехай на циліндричних поверхнях оболонки діє поверхневе навантаження  $(N, T, Z)$ , компоненти якого можна розвинути в ряди Фур'є за координатою  $x_3$  на  $[-h, h]$ . На торцях оболонки виконуються такі умови:

$$u_1(x_1, x_2, \pm h) = u_2(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = 0. \quad (1)$$

Запишемо компоненти вектора переміщення у вигляді

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \quad i = 1, 2, \\ u_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \quad \gamma_k = \frac{2k+1}{2h} \pi. \quad (2)$$

Поданням (2) компонентів вектора переміщення автоматично задовольняються умови (1) на торцях оболонки.

Після відокремлення змінних у рівняннях Ляме отримуємо систему

$$\alpha_k u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0, \quad \alpha_k u_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0, \quad \alpha_k = \Delta - \gamma_k^2, \\ \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k}, \\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad \sigma = (1 - 2\nu)^{-1}, \quad (3)$$

яку можна зінтегрувати таким чином. Враховуючи, що  $\theta_k$  – метагармонічні функції, вводимо довільний розв'язок рівняння  $\alpha_k^2 \Psi_k = 0$  та покладемо  $\theta_k = \alpha_k \Psi_k$ . Це дає можливість отримати

$$\begin{aligned} u_{1k} &= -\sigma \partial_1 \Psi_k + \sigma \partial_2 \Phi_k, & u_{2k} &= -\sigma \partial_2 \Psi_k - \sigma \partial_1 \Phi_k, \\ u_{3k} &= -\gamma_k \sigma \Psi_k + \Phi_k, \\ \alpha_k \Phi_k &= 0, & \alpha_k \Phi_k &= 0, & k &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\Phi_k, \Psi_k$  – довільні метагармонічні функції.

Поставивши вимогу, щоб вирази (4) задовольняли рівності  $\theta_k = \alpha_k \Psi_k$ , приходимо до подань

$$\begin{aligned} u_{1k} - i u_{2k} &= 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i\Phi_k - \Psi_k), & u_{3k} &= -\left( \frac{1+\sigma}{\gamma_k} \alpha_k + \sigma \gamma_k \right) \Psi_k, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} (\partial_1 - i\partial_2), & z &= x_1 + ix_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Формули (2) і (5) дають вирази пружних переміщень в оболонці через функції  $\Phi_k, \Psi_k$ , причому  $\Phi_k$  (вихровий розв'язок) описує обертання елемента відносно осі  $Ox_3$ :  $\partial_2 u_{1k} - \partial_1 u_{2k} = \sigma \Delta \Phi_k$ .

Функції  $\theta_k, \Phi_k$  та  $\Psi_k$ , узгоджені між собою відповідно до співвідношень (3) і (4), виберемо в інтегральному вигляді

$$\begin{aligned} \theta_k(z) &= \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} p_{jk}(\zeta_j) K_0(\gamma_k r_j) ds_j + \frac{2}{\gamma_k} \operatorname{Re} \int_{L_j} q_{jk}(\zeta_j) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\gamma_k r_j) d\zeta_j, \\ i\Phi_k(z) - \Psi_k(z) &= \sum_{j=1}^2 \frac{2i}{\gamma_k} \int_{L_j} \bar{q}_{jk}^*(\zeta_j) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\gamma_k r_j) d\bar{\zeta}_j + \\ &+ \frac{1}{2\gamma_k} \int_{L_j} p_{jk}(\zeta_j) r K_1(\gamma_k r_j) ds_j + \\ &+ \frac{1}{\gamma_k^2} \operatorname{Re} \int_{L_j} q_{jk}(\zeta_j) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} (r_j K_1(\gamma_k r_j)) d\zeta_j, \\ r_j &= |\zeta_j - z|, & \zeta_j &= \xi_j + i\eta_j \in L_j, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $K_n(\gamma_k r)$  – функції Макдональда  $n$ -го порядку,  $ds$  – елемент контуру  $L$ ; густини  $p_{jk}(\zeta_j), q_{jk}(\zeta_j), \bar{q}_{jk}^*(\zeta_j)$  поки що є невідомими.

Граничні умови на циліндричних поверхнях оболонки запишемо в комплексній формі

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ \operatorname{Re}[e^{-i\psi} (\sigma_{13} + i\sigma_{23})] &= Z, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\psi$  – кут між зовнішньою нормаллю до поверхні оболонки та віссю  $Ox_1$ .

Використовуючи закон Гука та формули (5), подамо умови (7) у формі

$$2\sigma e^{2i\psi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (i\Phi_k - \Psi_k) \right\} - \frac{1}{2} \theta_k - \frac{1}{2} \sigma \gamma_k^2 \Psi_k = \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k),$$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} \left[ \sigma \gamma_k \frac{\partial}{\partial z} (i\varphi_k - \psi_k) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \gamma_k \psi_k + \frac{1 + \sigma}{\gamma_k} \theta_k \right) \right] \right\} = \frac{1}{2\mu} Z_k. \quad (8)$$

**2. Система сингулярних інтегральних рівнянь.** Виконуючи граничний перехід на  $L$  та враховуючи подання (6), граничну задачу (8) зводимо до системи шести сингулярних інтегральних рівнянь (при кожному фіксованому  $k$ ):

$$\begin{aligned} \omega_{12k} a_k + \omega_{13k} b_k + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \int_{L_j} \omega_{jik} G_{jik}^{(1)} ds_j &= \frac{1}{2\mu} (N_k^{(1)} - iT_k^{(1)}), \\ \omega_{11k} c_k + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \int_{L_j} \omega_{jik} G_{jik}^{*(1)} ds_j &= \frac{1}{2\mu} Z_k^{(1)}, \\ -\omega_{22k} a_k - \omega_{23k} b_k + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \int_{L_j} \omega_{jik} G_{jik}^{(2)} ds_j &= \frac{1}{2\mu} (N_k^{(2)} - iT_k^{(2)}), \\ -\omega_{21k} c_k + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \int_{L_j} \omega_{jik} G_{jik}^{*(2)} ds_j &= \frac{1}{2\mu} Z_k^{(2)}, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\pi i(1 + \sigma)}{2\gamma_k}, & b_k &= \frac{\pi(1 + \sigma)}{2\gamma_k}, & c_k &= b_k, \\ G_{j1k}^{(n)}(\zeta_j, \zeta_{n0}) &= \frac{\sigma \gamma_k}{4} r_{jn0} K_1(\gamma_k r_{jn0}) (e^{2i(\psi_{n0} - \alpha_{jn0})} + 1) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r_{jn0}), \\ G_{j2k}^{(n)}(\zeta_j, \zeta_{n0}) &= \left[ \sin(\psi_j - \alpha_{jn0}) - \frac{ie^{2i\psi_{n0}}}{2} h_{1j}^{(n)}(\psi_j, \alpha_{n0}) \right] \times \\ &\quad \times \frac{\sigma \gamma_k}{4} r_{jn0} K_0(\gamma_k r_{jn0}) + K_1(\gamma_k r_{jn0}) \left\{ \frac{\sigma}{2} \sin(\psi_j - \alpha_{jn0}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{ie^{2i\psi_{n0}}}{2} \left[ (1 + \sigma) e^{-i(\psi_j + \alpha_{jn0})} - \frac{\sigma}{2} h_{2j}^{(n)}(\psi_j, \alpha_{jn0}) \right] \right\}, \\ G_{j3k}^{(n)}(\zeta_j, \zeta_{n0}) &= \left[ \cos(\psi_j - \alpha_{jn0}) + \frac{e^{2i\psi_{n0}}}{2} h_{2j}^{(n)}(\psi_j, \alpha_{jn0}) \right] \times \\ &\quad \times \frac{\sigma \gamma_k}{4} r_{jn0} K_0(\gamma_k r_{jn0}) + K_1(\gamma_k r_{jn0}) \left\{ \frac{\sigma}{2} \cos(\psi_j - \alpha_{jn0}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{2i\psi_{n0}}}{2} \left[ (1 + \sigma) e^{-i(\psi_j + \alpha_{jn0})} + \frac{\sigma}{2} h_{1j}^{(n)}(\psi_j, \alpha_{jn0}) \right] \right\}, \\ h_{1j}^{(n)}(\psi_j, \alpha_{jn0}) &= e^{i(\psi_j - 3\alpha_{jn0})} - e^{-i(\psi_j + \alpha_{jn0})}, \\ h_{2j}^{(n)}(\psi_j, \alpha_{jn0}) &= e^{i(\psi_j - 3\alpha_{jn0})} - e^{-i(\psi_j + \alpha_{jn0})}, \\ G_{j1k}^{*(n)}(\zeta_j, \zeta_{n0}) &= -\frac{1}{2} [\sigma \gamma_k r_{jn0} K_0(\gamma_k r_{jn0}) - (1 + \sigma) K_1(\gamma_k r_{jn0})] \times \\ &\quad \times \cos(\psi_{n0} - \alpha_{jn0}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{j2k}^{*(n)}(\zeta_j, \zeta_{n0}) &= -[\sin(\psi_{n0} + \psi_j - 2\alpha_{jn0}) - \sin(\psi_{n0} - \psi_j)] \times \\
&\quad \times \frac{\sigma\gamma_k}{4} r_{jn0} K_1(\gamma_k r_{jn0}) + \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r_{jn0}) \sin(\psi_{n0} - \psi_j), \\
G_{j3k}^{*(n)}(\zeta_j, \zeta_{n0}) &= -[\cos(\psi_{n0} + \psi_j - 2\alpha_{jn0}) + \cos(\psi_{n0} - \psi_j)] \times \\
&\quad \times \frac{\sigma\gamma_k}{4} r_{jn0} K_1(\gamma_k r_{jn0}) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r_{jn0}) \cos(\psi_{n0} - \psi_j), \\
q_{jk}^* &= \frac{i(1 + \sigma)}{\sigma\gamma_k^2} q_{jk}, \quad \omega_{j1k} = p_{jk}, \quad \omega_{j2k} = \operatorname{Re} q_{jk}, \quad \omega_{j3k} = \operatorname{Im} q_{jk}, \\
\zeta_j - \zeta_{n0} &= r_{jn0} e^{i\alpha_{jn0}}, \quad \zeta_{n0} = \xi_{n0} + i\eta_{n0} \in L_n.
\end{aligned}$$

Тут  $\omega_{jik}$  – невідомі густини, які потрібно визначити.

**3. Результати обчислень та обговорення.** Як приклад розглянемо оболонку, напрямні циліндричних поверхонь якої є еліпсами:

$$\begin{aligned}
L_1 : \quad \xi_{11} &= R_{11} \cos \varphi_1, \quad \xi_{12} = R_{12} \sin \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \\
L_2 : \quad \xi_{21} &= R_{21} \cos \varphi_2 + \ell_x, \quad \xi_{22} = R_{22} \sin \varphi_2, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

Нехай на зовнішній циліндричній поверхні з напрямною  $L_1$  діє навантаження  $N = P(h^2 - x_3^2)$ , де  $P = \text{const}$ , а на внутрішній циліндричній поверхні з напрямною  $L_2$  навантаження відсутнє. Вважаємо, що центри напрямних розміщені на осі  $Ox_1$  на відстані  $\ell_x$  між ними.

Для дослідження напруженого стану на внутрішній циліндричній поверхні потрібно виконати розрахунок напружень

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \quad \theta = \psi - \pi. \quad (10)$$

Послідовність обчислень є такою: чисельно за допомогою методу квадратур [1, 14] розв'язуємо систему інтегральних рівнянь (9), далі визначаємо коефіцієнти Фур'є тензора напружень  $\sigma_{ij}^{(k)}$ , потім за формулами (10) обчислюємо шукані напруження.

На рис. 2 – рис. 11 наведено епюри розподілу відносного колового напруження  $\sigma_1 = -\sigma_{\theta\theta}/P$  на внутрішній циліндричній поверхні:

- уздовж «товщинної» координати в точці їх максимального значення;
- уздовж контуру напрямної  $L_2$  у перерізі  $x_3/h = 0$ .

Обчислення виконано для матеріалу з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0.15$ .

На рис. 2 – рис. 7 наведено графіки напружень для циліндричної оболонки висоти  $h = 2$  із зовнішньою поверхнею кругового перерізу  $R_{11} = R_{12} = 2$ .

Подані на рис. 2, рис. 3 графіки відносного колового напруження відповідають оболонці з внутрішньою геометрією  $R_{21} = R_{22} = 1$ . Криві на рис. 2 побудовано вздовж «товщинної» координати в точці  $\varphi_2 = 0$  при  $\ell_x/R_{21} = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  відповідно. Точками на кривій при  $\ell_x/R_{21} = 0$  нанесено результат розв'язку осесиметричної задачі методом рядів [8]. Необхідно відмітити добре співпадіння результатів, отриманих двома різними методами. Для тих самих параметрів на рис. 3 наведено розподіл напруження  $\sigma_1$  уздовж контуру  $L_2$ .

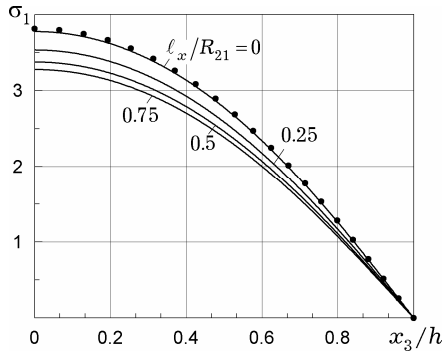


Рис. 2

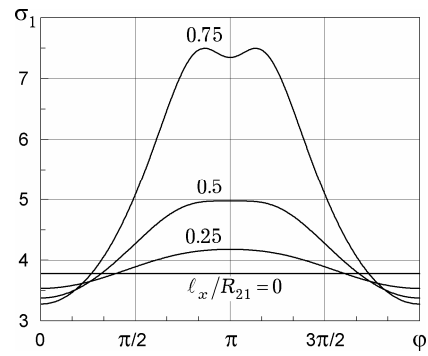


Рис. 3

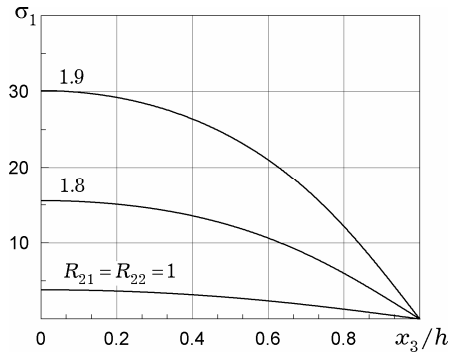


Рис. 4

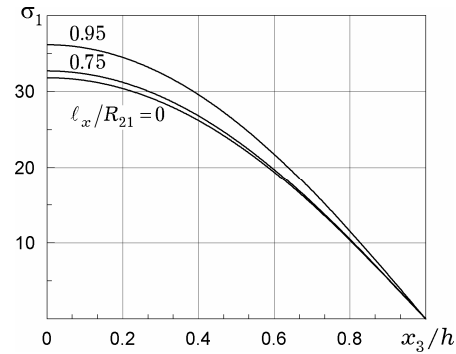


Рис. 5

Графіки розподілу  $\sigma_1$  на рис. 4 побудовано в точці  $\varphi_2 = 0$  уздовж «товщинної» координати для оболонки з геометрією  $R_{21} = R_{22} = 1.0, 1.8, 1.9$  відповідно. На рис. 5 наведено розподіл напружень  $\sigma_1$  у точці  $\varphi_2 = 0$  уздовж «товщинної» координати для оболонки з внутрішньою поверхнею еліптичного перерізу  $R_{21} = 1$ ,  $R_{22} = 0.1$ . Криві відповідають значенням  $\ell_x/R_{21} = 0, 0.75, 0.95$ .

На рис. 6 наведено розподіли величини  $\sigma_1$  уздовж контуру  $L_2$ . Криві побудовано для оболонки з геометрією  $R_{21} = 1$ ,  $R_{22} = 0.1$  при  $\ell_x/R_{21} = 0, 0.95$ . На рис. 7 наведено розподіли напружень  $\sigma_1$  уздовж контуру  $L_2$  для оболонки з геометрією  $R_{21} = 1$  і  $R_{22} = 0.1, 0.3, 0.5$ .

Аналогічні обчислення виконано для циліндричної оболонки висоти  $h = 2$  із зовнішньою поверхнею еліптичного перерізу  $R_{11} = 2$ ,  $R_{12} = 1$  (рис. 8, рис. 9) та  $R_{11} = 1$ ,  $R_{12} = 2$  (рис. 10, рис. 11).

Криві розподілу напружень  $\sigma_1$  у точці  $\varphi_2 = 0$  уздовж «товщинної» координати (рис. 8), а також уздовж контуру напрямної  $L_2$  у перерізі  $x_3/h = 0$  (рис. 9) отримано для оболонки з внутрішньою геометрією  $R_{21} = 0.1$ ,  $R_{22} = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ .

На рис. 10 побудовано графіки напружень  $\sigma_1$  у точці  $\varphi_2 = 0$  уздовж «товщинної» координати для оболонки з внутрішньою геометрією  $R_{22} = 0.1$ ,  $R_{21} = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ . На рис. 11 наведено розподіл величини  $\sigma_1$  уздовж контуру напрямної  $L_2$  у перерізі  $x_3/h = 0$  для оболонки з тими самими геометричними параметрами.

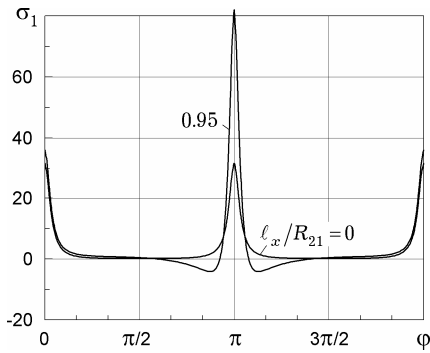


Рис. 6

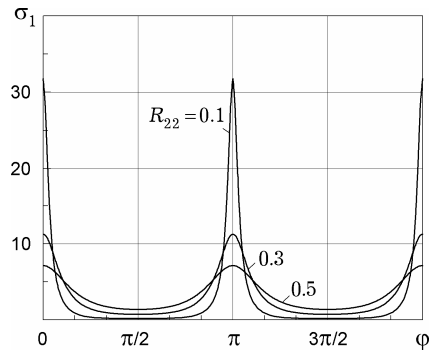


Рис. 7

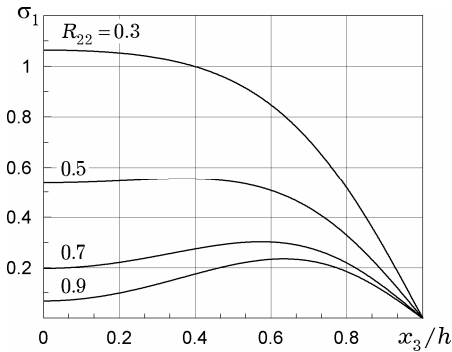


Рис. 8

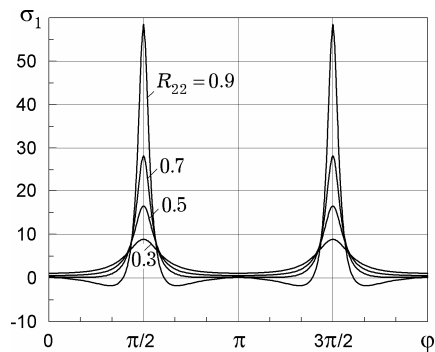


Рис. 9

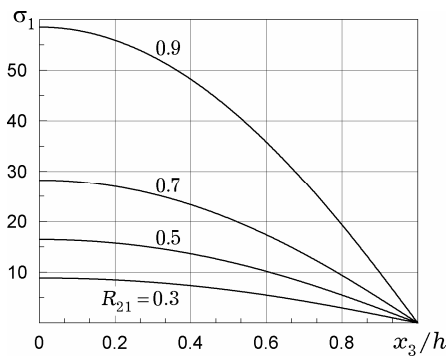


Рис. 10

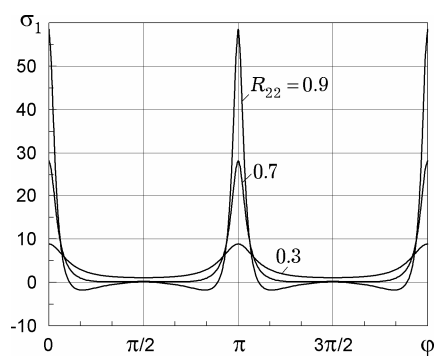


Рис. 11

**4. Висновки.** За результатами чисельного дослідження можна зробити такі висновки:

– При зміщенні внутрішньої циліндричної поверхні кругового поперечного перерізу до зовнішньої циліндричної поверхні кругового перерізу спостерігається зменшення відносного колового напруження вздовж «товщинної» координати в точках контуру  $L_2$  при  $\varphi_2 = 0$  (рис. 2).

– Максимального свого значення відносне колове напруження (рис. 3) набуває в точці  $\varphi = \pi$ ,  $x_3/h = 0$  при  $l_x/R_{21} = 0.25, 0.5$ . При  $l_x/R_{21} = 0.75$  напруження має два максимуми, розташовані зліва та справа від цієї точки ( $\varphi = \pi$ ,  $x_3/h = 0$ ) у деякому її околі.

– При значному зменшенні товщини колової циліндричної оболонки спостерігається різке зростання колового напруження (рис. 4).

– При зміщенні внутрішньої циліндричної поверхні еліптичного перетину до зовнішньої циліндричної поверхні кругового перетину (вузька щілина  $R_{21}/R_{22} = 10$ ) має місце зростання відносного колового напруження як уздовж «товщинної» координати (рис. 5), так і вздовж контуру

напрямної  $L_2$  (рис. 6). Крім того, в цьому випадку при  $\ell_x/R_{21} = 0.95$  в околі точці  $\varphi = \pi$ ,  $x_3/h = 0$  (зліва та справа) появляються зони від'ємного (стисного) напруження.

– Зі зростанням  $R_{22}$  колове напруження зменшується (рис. 7).

– У випадку вузької щілини ( $R_{21} = 0.1$ ) зі зростанням  $R_{22}$  спостерігається зменшення відносного колового напруження в точці  $\varphi = 0$ ,  $x_3/h = 0$ , а максимум  $\sigma_1$  зміщується від цієї точки в зону  $\varphi = 0$ ,  $0.5 \leq x_3/h \leq 0.7$  (рис. 8).

– Подібні, як на рис. 7, криві наведено на рис. 9 уздовж контуру еліптичної щілини, до того ж максимумами відносного колового напруження мають місце при  $\varphi = \pi/2$  та  $\varphi = 3\pi/2$  у перерізі  $x_3/h$ , причому в їх околі (зліва та справа) появляються зони від'ємних (стисних) напружень.

– Спостерігається різке зростання відносного колового напруження на кінцях вузької щілини еліптичного перерізу при підході її кінців до зовнішньої циліндричної поверхні еліптичного перетину (рис. 10).

– Подібну, як на рис. 7, картину розподілу напружень уздовж контуру напрямної  $L_2$  еліптичної вузької щілини спостерігаємо на рис. 11 (для тих самих геометричних параметрів, що й на рис. 10), коли відносні колові напруження досягають максимуму в перерізі  $x_3/h = 0$  при  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi$  і  $\varphi = 2\pi$ , а в їхніх околах появляються зони від'ємних (стисних) напружень.

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – Москва: Наука, 1985. – 256 с.
2. Григорюк Э. И., Ковалев Ю. Д., Фильштинский Л. А. Изгиб полуслоя, ослабленного сквозным отверстием // Докл. РАН. – 1995. – **345**, № 1. – С. 54–56.
3. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н., Крижановская Т. В. Исследование напряженного состояния ортотропных полых цилиндров при несимметрическом нагружении // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 3–6.
4. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Точное решение задачи Кирша // Прикл. механика. – 1970. – **6**, № 5. – С. 10–17.
5. Ковалев Ю. Д. Смешанные задачи теории упругости для слоя с туннельными неоднородностями // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 81–87.
6. Ковалев Ю. Д., Стативка Е. Н. Электроупругое состояние неоднородного пьезокерамического слоя в условиях симметричного нагружения // Механика композиитн. материалов. – 2011. – **47**, № 5. – С. 793–806.  
Te same: Kovalev Yu. D., Stativka E. N. Electroelastic state of an inhomogeneous piezoceramic layer under symmetric loading // Mech. Compos. Mater. – 2011. – **47**, No. 5. – P. 561–570.
7. Ковальов Ю. Д. Симетрична задача пружності для покритого діафрагмою шару з тунельними порожнинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 6. – С. 39–42.  
Te same: Koval'ov Yu. D. Symmetric elasticity problem for a layer with tunnel cavities covered with a diaphragm // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 6. – P. 809–813.
8. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 237 с.
9. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – **6**. – С. 151–168.
10. Попов Г. Я., Фесенко А. А. Об одном новом методе решения пространственной задачи для упругого слоя // Проблемы машиностроения. – 2010. – **13**, № 2. – С. 24–30.
11. Ревенко В. П. Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 183–190.
12. Фильштинский Л. А. Периодические решения теории упругости и электроупругости для цилиндра в  $\mathbb{R}^3$  // Теорет. и прикл. механика. – 1990. – Вып. 21. – С. 13–20.



13. *Ebrahimnejad L., Attarnejad R., Ebrahimnejad H.* Applying wavelets to improve the boundary element method for elasticity problems // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2010. – **34**. – P. 810–818.
14. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* The numerical solutions of singular integral equations // In: *Method of analysis and solutions of crack problems* / Ed. G. Sig – Leyden: Noordhoff Int. Publ. – 1973. – P. 268–425.
15. *Fil'stinskii L. A., Kovalev Yu. D., Ventsel E. S.* Bending of layers weakened by cuts // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – **43**. – P. 346–356.
16. *Fil'stinskii L. A., Kovalev Yu. D., Ventsel E. S.* Equilibrium of layers weakened by loaded cuts // *Int. J. Solids Struct.* – 2010. – **47**. – P. 1490–1495.
17. *Kitipornchai S., Liew K. M., Cheng Y.* A boundary element-free method (BEFM) for three-dimensional elasticity problems // *Comput. Mech.* – 2005. – **36**, No. 1. – P. 13–20.
18. *Leissa A. W., Qatu M. S.* *Vibrations of continuous systems.* – New York: Mc Graw Hill, 2011. – 507 p.
19. *Yang Zh.* The stress and strain concentrations of an elliptical hole in an elastic plate of finite thickness subjected to tensile stress // *Int. J. Fract.* – 2009. – **155**, No. 1. – P. 43–54.

#### **РАСТЯЖЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С ТОРЦАМИ, ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ**

*Рассматривается симметричная задача теории упругости о напряженном состоянии толстостенной оболочки с торцами, покрытыми диафрагмой. Краевая задача сведена к бесконечной системе сингулярных интегральных уравнений второго рода. Получены выражения для напряжений, характеризующих напряженное состояние толстостенной оболочки. На базе построенного аналитического алгоритма проведен численный эксперимент, результатом которого является обширный графический материал, представляющий новые количественные и качественные знания о напряженном состоянии толстостенной оболочки в зависимости от ее геометрических параметров и коэффициента Пуассона ее материалов.*

#### **A TENSION OF THICK-WALLED SHELL OF FINITE LENGTH WITH FACES COVERED BY DIAPHRAGM**

*A symmetric problem of the elasticity theory about the state of stress for a thick-wall shell with end-supports covered by diaphragms is considered. The corresponding boundary value problem is reduced to an infinite system of singular integral equations of the second kind. The expressions for stress components for the shell are presented. Based on the developed analytical algorithm, extensive numerical investigations are carried out. The results of these investigations are illustrated graphically exposing novel qualitative and quantitative knowledge about the state of stress for shell as a function of some geometric parameters of the shell and Poisson's ratio of a shell materials.*

Сумськ. держ. ун-т, Суми

Отримано  
18.09.13