

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Решены плоская задача термоупругости и задача изгиба ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины при краевых условиях защемления. Приведены результаты численного исследования перемещений, усилий и изгибающего момента в пластинке-полосе.

Введение. Прогресс техники привел к широкому применению разнообразных тонкостенных конструкций, элементами которых являются пластины и оболочки, находящиеся не только под действием механических нагрузок, но и температурного поля. Задачи о температурных напряжениях возникают в различных областях современной техники, где вопросы прочности, связанные с температурными воздействиями, могут иметь большое, а часто и решающее значение.

Обширный библиографический материал по теории термоупругости пластин и оболочек, а также определению и исследованию соответствующих температурных полей и напряжений в таких элементах можно найти в работах [2–4, 6–9, 12, 13, 21, 22, 24–27 и др.].

Во многих работах широкое применение и существенное развитие получили методы Ритца, Бубнова – Галеркина, методы конечных разностей, конечных и граничных элементов [10–28].

Число работ, в которых выполнены расчеты на прочность и устойчивость гладких тонкостенных конструкций и конструкций переменной толщины, находящихся в температурном поле, с учетом поперечных сдвигов сравнительно мало. В связи с вышеизложенным исследованием влияния поперечного сдвига на термонапряженное состояние ортотропных пластинок, проведенные в рамках предлагаемой работы, следует признать весьма актуальными.

1. С использованием метода представления решений степенными многочленами по поперечной координате, в работе [2] с учетом гипотезы Франца Неймана [5, с. 330] по аналогии с [3] получены уравнения и краевые условия задачи термоупругости ортотропной пластинки переменной толщины при учете поперечных сдвигов и температурного поля. Эти соотношения приняты за исходные в настоящей работе.

Рассмотрим ортотропную пластинку-полосу ширины ℓ и линейно-переменной толщины h . Пластинку-полосу отнесем к системе прямоугольных декартовых координат x, y, z , оси которой параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью, а ось Oz направим перпендикулярно так, чтобы образовалась правая система. Принимаем, что пластинка-полоса симметрична относительно срединной плоскости, а ее толщина изменяется только вдоль координатной оси Ox по закону

$$h = h_0 + h_1 x.$$

Здесь h_0 и h_1 – заданные параметры. Будем считать, что поверхностные нагрузки отсутствуют. Температуры поверхностей пластинки-полосы заданы. Для температуры θ примем линейный закон распределения по поперечной координате z :

$$\theta = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} + \frac{z}{h}(\theta^+ - \theta^-),$$

где через θ^+ и θ^- обозначены значения температуры на поверхностях $z = +\frac{h}{2}$ и $z = -\frac{h}{2}$ пластинки-полосы соответственно.

Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} u &= h_0 \bar{u}, & w &= h_0 \bar{w}, & x &= \ell \bar{x}, & s &= \frac{h_0}{\ell}, & h &= h_0 H, & h_1 &= \gamma s, \\ H &= 1 + \gamma \bar{x}, & B_{12} &= m B_{11}, & \varphi_1 &= B_{11} \bar{\varphi}_1, & a_{55} B_{11} &= \chi, \\ T_x &= B_{11} \bar{T}_x, & N &= B_{11} h_0 \bar{N}_x, & M_x &= B_{11} h_0^2 \bar{M}_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u – осевое перемещение точек срединной плоскости; w – прогиб; B_{ij} – механические параметры, которые по известным формулам [1] выражаются через упругие постоянные материала; φ_1 – функция, характеризующая распределение поперечного касательного напряжения τ_{xz} ; T_x и N_x – тангенциальное и поперечное усилия; M_x – изгибающий момент в пластинке-полосе.

С учетом обозначений (1) в рамках теории, изложенной в [2], для безразмерных усилий и изгибающего момента получим выражения

$$\begin{aligned} \bar{T}_x &= H \left[s \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} - \frac{1}{2} (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-) \right], \\ \bar{N}_x &= \frac{2}{3} H \bar{\varphi}_1 - \frac{\gamma s H}{12} \left[s H \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) + (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-) \right], \\ \bar{M}_x &= -\frac{s H^3}{12} \left[s \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) + \frac{1}{s H} (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-) \right], \end{aligned}$$

где α_x и α_y – коэффициенты теплового расширения материала по направлениям осей x и y соответственно.

2. Дифференциальные уравнения плоской задачи и задачи изгиба для рассматриваемой пластинки-полосы имеют вид

– уравнение плоской задачи:

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(H \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} \right) = \frac{\gamma}{2s} (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-); \quad (2)$$

– уравнения задачи изгиба:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{x}} (H^2 \bar{\varphi}_1) &= 0, \\ \frac{d}{d\bar{x}} \left(H^2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) - \frac{\chi}{s} \frac{d}{d\bar{x}} \left(H^2 \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) + \frac{8\bar{\varphi}_1}{s^3} + \frac{\gamma}{s^2} (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнения (2) плоской задачи имеет вид

$$\bar{u} = c_2 + c_1 \frac{\ln H}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma s} (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-) (\gamma \bar{x} - \ln H). \quad (4)$$

Постоянные интегрирования c_1 , c_2 определяем из краевых условий для пластинки-полосы. При заземлении обеих кромок этими условиями будут

$$\bar{u}|_{\bar{x}=0, \bar{x}=1} = 0. \quad (5)$$

Тогда для постоянных c_1 и c_2 находим

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{(\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-)}{2s \ln(1 + \gamma)} [\gamma - \ln(1 + \gamma)], \\ c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) для безразмерного осевого перемещения, получим

$$\bar{u} = \frac{1}{2s}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-) \left[\bar{x} - \frac{\ln H}{\ln(1+\gamma)} \right]. \quad (7)$$

С учетом (7) для безразмерного тангенциального усилия \bar{T}_x найдем

$$\bar{T}_x = -\frac{\gamma}{2\ln(1+\gamma)}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-). \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, решение плоской задачи пластинки-полосы не зависит от сдвигового свойства материала (от параметра χ).

Из (7) и (8) для пластинки-полосы постоянной толщины ($\gamma = 0$) имеем

$$\bar{u} \equiv 0, \quad \bar{T}_x = -\frac{1}{2}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-). \quad (9)$$

На рис. 1, рис. 2 приведены графики \bar{u} и \bar{T}_x при некоторых значениях параметра изменчивости толщины пластинки-полосы γ . Нетрудно заметить, что при $\gamma > 0$ графики \bar{u} несимметричны относительно середины ширины $\bar{x} = 0.5$.

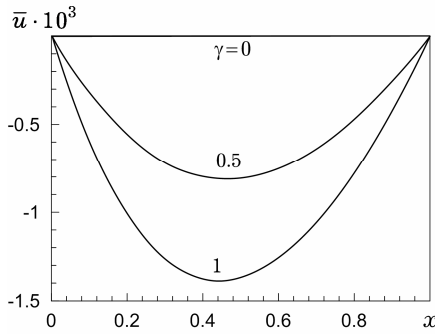


Рис. 1

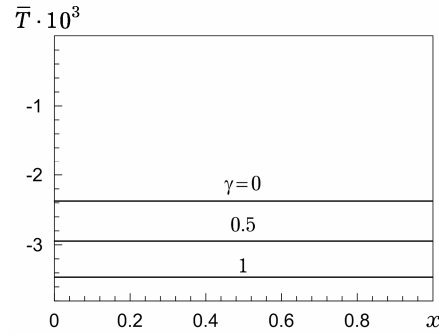


Рис. 2

Рассмотрим задачу изгиба. Решение системы уравнений (3) имеет вид

$$\bar{\varphi} = \frac{c_3}{H^2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{w} = c_6 + c_5 \bar{x} - \frac{c_4}{\gamma^2} \ln H + \frac{c_3}{s^3 \gamma^3 H} (4 - \chi \gamma^2 s^2) - \\ - \frac{1}{s^2 \gamma^2} (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-) [(1+H) \ln H - \gamma \bar{x}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Постоянные интегрирования $c_3 \div c_6$ определяем из условий защемления обеих кромок пластинки-полосы:

$$\bar{w}|_{\bar{x}=0, \bar{x}=1} = 0, \quad \left(s \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \chi \bar{\varphi}_1 \right) \Big|_{\bar{x}=0, \bar{x}=1} = 0, \quad u_x = 0. \quad (12)$$

С учетом (10) и (7) условия (12) запишем как

$$\begin{aligned} \frac{(4 - \chi \gamma^2 s^2)}{\gamma^2 s^3 (1 + \gamma)} c_3 + \frac{\ln(1 + \gamma)}{\gamma^2} c_4 - c_5 = \\ = -\frac{(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-) [(2 + \gamma) \ln(1 + \gamma) - \gamma]}{\gamma^2 s^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\gamma^2 s^2} c_3 + \frac{s}{\gamma} c_4 - s c_5 &= -\frac{1}{\gamma s} (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-), \\ \frac{4}{\gamma^2 s^2 (1 + \gamma)^2} c_3 + \frac{s}{\gamma(1 + \gamma)} c_4 - s c_5 &= \\ &= -\frac{(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-)}{\gamma s} \left[\frac{1}{1 + \gamma} + \ln(1 + \gamma) \right], \\ \frac{4 - \chi\gamma^2 s^2}{\gamma^3 s^3} c_3 + c_6 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

После численного решения системы (13) по найденным значениям постоянных интегрирования $c_3 \div c_6$ вычисляются значения безразмерного прогиба \bar{w} , поперечного усилия \bar{N}_x и изгибающего момента \bar{M}_x .

На рис. 3 – рис. 5 приведены графики этих величин при следующих численных значениях параметров задачи:

$$\begin{aligned} s = 0.15, \quad \alpha_x = 10^{-5} \text{ 1/град}, \quad \alpha_y = 2\alpha_x, \quad m = 0.3, \quad \theta^+ = 300 \text{ град}, \\ \theta^- = 0, \quad \chi = 0, 5, 10, \quad \gamma = 1. \end{aligned}$$

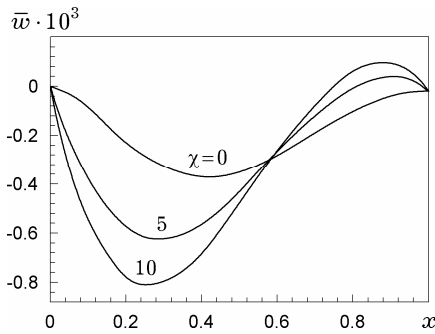


Рис. 3

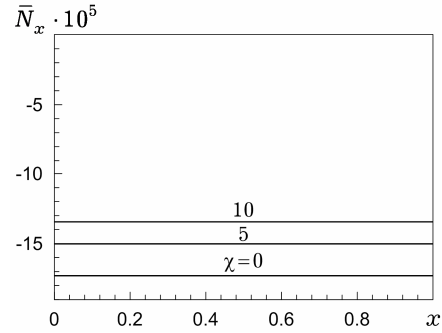


Рис. 4

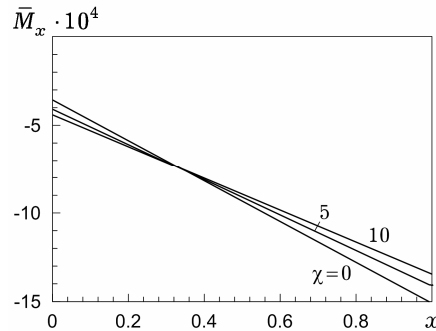


Рис. 5

Заключение. Сформулированы и решены плоская задача и задача изгиба для ортотропной полосы-пластинки линейно-переменной толщины, находящейся под воздействием температурного поля, при учете поперечных сдвигов.

На основании выполненных расчетов исследована зависимость основных величин (перемещений, усилий, изгибающих моментов) от параметра γ , характеризующего изменяемость пластинки по толщине, и от параметра χ , характеризующего поперечный сдвиг. Приведены соответствующие графики.

Показано, что учет сдвигов приводит к увеличению значения прогиба \bar{w} и уменьшению поперечного усилия \bar{N}_x . С увеличением коэффициента χ точка максимума прогиба приближается к краю пластинки, где толщина наименьшая.

Установлено, что для пластинки с постоянной толщиной ($\gamma = 0$) горизонтальное перемещение точек срединной поверхности равно нулю. При $\gamma \neq 0$ горизонтальные перемещения отличны от нуля и с увеличением параметра γ максимальное значение этих перемещений увеличивается.

При увеличении параметра γ увеличивается также значение тангенциального усилия \bar{T}_x . При этом изгибающий момент \bar{M}_x мало изменяется в зависимости от параметра γ .

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
2. Киракосян Р. М. К теории ортотропных пластин переменной толщины при учете влияний поперечных сдвигов и изменения температуры // Проблемы механики деформируемого твердого тела: Сб., посвященный 90-летию акад. НАН Армении С. А. Амбарцумяна. – Ереван: НАН Армении, 2012. – С. 177–183.
3. Киракосян Р. М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. – Ереван: Гитутюн, 2000. – 122 с.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
5. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1947. – 464 с.
6. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 247 с.
7. Atarashi T., Minagawa S. Transient coupled-thermoelastic problem of heat conduction in a multilayered composite plate // Int. J. Eng. Sci. – 1992. – **30**, No. 10. – P. 1543–1550.
8. Bhullar S. K., Wegner J. L. Some transient thermoelastic plate problems // J. Therm. Stresses. – 2009. – **32**, No. 8. – P. 768–790.
9. Brock L. M. Transient plane wave solutions to homogeneous equations of orthotropic thermoelasticity with thermal relaxation: Illustration // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2012. – **79**, No. 6. – 6 p.
10. Eldesoky I. M. Mathematical analysis of unsteady MHD blood flow through parallel plate channel with heat source // World J. Mech. – 2012. – **2**, No. 3. – P. 131–137.
11. Grine A., Saury D., Desmons J-Y., Harmand S. Identification models for transient heat transfer on a flat plate // Exper. Therm. Fluid Sci. – 2007. – **31**, No. 7. – P. 701–710.
12. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal stresses – Advanced theory and applications. – Ser. Solid Mechanics and Applications. – Vol. 158/ Ser. Ed. G. M. L. Gladwell. – New-York: Springer, 2008. – 559 p.
13. Kanaun S. An efficient numerical method for calculation of elastic and thermoelastic fields in a homogeneous medium with several heterogeneous inclusions // World J. Mech. – 2011. – **1**, No. 2. – P. 31–43.
14. Lei Xiao-Yan, Huang Mao-Guang. A new boundary element method for Reissners plate with new boundary values // Acta Mech. Sinica. – 1995. – **27**, No. 5. – P. 551–559.
15. Lü Pin, Huang Mao-Guang. Calculation of the fundamental solution for the theory of shallow shells considering shear deformation // Appl. Math. Mech. – 1992. – **13**, No. 6. – P. 537–545.
16. Misra M., Ahmad N., Siddiqui Z. Unsteady boundary layer flow past a stretching plate and heat transfer with variable thermal conductivity // World J. Mech. – 2012. – **2**, No. 1. – P. 35–41.
17. Masinda J. Application of the boundary element method to elasticity and thermoelasticity problems. – Monogr. and Mem., Nat. Res. Inst. Mach. Des., 1986. – N 36. – 58 p.
18. Melnikov Yu. A. Influence function and matrices. – New York–Basel: Marcel Dekker, Inc. 1999. – 469 p.

19. *Meng-Cheng Chen, Xue-Cheng Ping, Wan-Hui Liu, Zheng Xie.* A novel hybrid finite element analysis of two polygonal holes in an infinite elastic plate // *Eng. Fract. Mech.* – 2012. – **83**. – P. 26–39.
20. *Mochihara M., Kamiwakida I.* Numerical solutions of plane stress problems by boundary element method // *Res. Rep. Kagoshima Nat. College Tech.* – 1987. – No. 21. – P. 29–35.
21. *Noda N.* Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: *Thermal Stresses I* / Ed. R. B. Hetnarski. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 391–483.
22. *Santaoja K.* Gradient theory from the thermomechanics point of view // *Eng. Fract. Mech.* – 2004. – **71**, No. 4-6. – P. 557–566.
23. *Schanz M., Steinbach O. (Eds)* Boundary element analysis. Mathematical aspects and applications // *Lect. Notes in Appl. and Comput. Mech.* – Berlin: Springer, 2007. – Vol. **29**.
24. *Selim M. M.* Orthotropic elastic medium under the effect of initial and couple stresses // *Appl. Math. Comput.* – 2006. – **181**, No. 1. – P. 185–192.
25. *Sugano Y.* Transient thermal stresses in a rectangular plate due to variation of heat-transfer coefficients on upper and lower surfaces // *Int. J. Eng. Sci.* – 1983. – **21**, No. 10. – P. 1203–1214.
26. *Sugano Y., Chiba R., Hirose K., Takahashi K.* Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk // *JSME Int. J. Ser. A–Solid M.* – 2004. – **47**, No. 2. – P. 189–197.
27. *Tokovyy Yu., Ma C.-C.* Analytical solutions to the 2D elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes // *Arch. Appl. Mech.* – 2009. – **79**, No 5. – P. 441–456.
28. *Wen P. H.* The Analytical solutions of incompressible saturated poroelastic circular Mindlin's plate // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2012. – **79**, No 5. – 7 p.

**ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ-СМУГИ
ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ЗА ВРАХУВАННЯ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ**

Розв'язано плоску задачу термопружності і задачу згину ортотропної пластинки-смуги лінійно-змінної товщини за крайових умов зацземлення. Наведено результати числового дослідження переміщень, зусиль і згинного моменту в пластинці-смугі.

**THERMOELASTICITY PROBLEM FOR AN ORTHOTROPIC PLATE-STRIP OF
VARIABLE THICKNESS WITH ACCOUNT OF TRANSVERSE SHEAR**

The plane thermoelasticity problem and bending problem for a fixed orthotropic plate of linear-variable thickness are solved. The results of numerical investigations of displacements, forces and bending moments in the plate-strip are given.

¹ Ин-т механики НАН Армении, Ереван, Армения,
² Ереван. гос. ун-т, Ереван, Армения

Получено
19.02.13