

## КОМБІНОВАНИЙ АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ТА $h$ -АДАПТАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Запропоновано комбінований алгоритм для розв'язування задач про контакт пружних тіл. В алгоритмі застосовано поєднання ітераційного методу декомпозиції області та  $h$ -адаптивної схеми, яка базується на порівнянні результатів МСЕ і МГЕ. Чисельний аналіз тестової задачі показав, що згущення сітки, здійснюване згідно з алгоритмом, відповідає особливостям поля напружень в області контакту, а загальна кількість невідомих значно зменшується порівняно з випадком рівномірного розбиття.

**Вступ.** Числові алгоритми для розв'язування задач про контакт деформованих тіл на основі варіаційного формулювання і методу скінченних елементів (МСЕ) успішно використовують уже впродовж десятирок років [6, 7, 19, 21, 23, 27–29]. Однак питання їх ефективності, особливо для задач про контакт декількох тіл, залишається актуальним.

Ефективним підходом до розв'язування контактних задач є застосування методів декомпозиції області (МДО) [11, 15, 18, 22, 25]. Декомпозиція за підобластями суттєво зменшує загальну розмірність контактної задачі, але вимагає ітераційного розв'язування окремих задач у підобластях. Значно зменшити обчислювальні затрати при розв'язуванні цих задач дозволяють також адаптивні модифікації МСЕ, зокрема  $h$ -адаптивні схеми [12, 16, 17, 28, 30], коли в процесі розв'язування згущують сітку лише в областях з більшою похибкою розв'язку.

Раніше авторами статті було запропоновано адаптивний алгоритм розв'язування задач теорії пружності, що ґрунтується на порівнянні результатів МСЕ та методу граничних елементів (МГЕ) [5, 14], а також схеми методу декомпозиції області для задач про контакт декількох пружних тіл [4, 15, 25]. Метою пропонованої роботи є розробка та практична апробація комбінованого алгоритму чисельного розв'язування контактних задач для декількох пружних тіл, який об'єднує процеси декомпозиції та  $h$ -адаптації.

**Постановка контактної задачі.** Розглянемо задачу про односторонній контакт за умов плоскої деформації двох ізотропних пружних тіл, заданих обмеженими областями  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$  з ліпшицевими границями  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  відповідно (рис. 1).

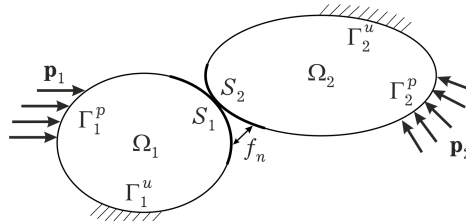


Рис. 1. Односторонній контакт двох пружних тіл.

Для опису напружено-деформованого стану тіл будемо використовувати модель лінійної теорії пружності [8]. У просторі  $\mathbb{R}^2$  введемо декартову систему координат з базисними векторами  $\mathbf{e}_1$  і  $\mathbf{e}_2$ . Позначимо через  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ ,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$  та  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$  відповідно вектор переміщень, тензор деформацій і тензор напружень у точці  $\mathbf{x}$  тіла  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . На межі  $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$  кожного з тіл введемо локальну ортонормовану систему координат з базисними векторами  $\mathbf{n}_\alpha$  і  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ , де  $\mathbf{n}_\alpha$  – одинична

зовнішня нормаль, а  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$  – одиничний дотичний вектор. Запишемо в цьому базисі вектори переміщень і напружень на  $\Gamma_\alpha$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) &= u_{\alpha\tau}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}_\alpha + u_{\alpha n}(\mathbf{x})\mathbf{n}_\alpha, \\ \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) &= \sigma_{\alpha\tau}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}_\alpha + \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x})\mathbf{n}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.\end{aligned}$$

Компоненти тензора деформацій визначаються через переміщення за співвідношеннями Коші

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad i, j = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2, \quad (1)$$

а компоненти тензора напружень пов'язані з деформаціями законом Гука

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}\lambda_\alpha(\mathbf{x})\Theta_\alpha(\mathbf{x}) + 2\mu_\alpha(\mathbf{x})\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad i, j = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2)$$

де  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$  – символ Кронекера,  $\Theta_\alpha = \varepsilon_{\alpha 11} + \varepsilon_{\alpha 22}$  – об'ємна деформація, а  $\lambda_\alpha = \frac{E_\alpha \nu_\alpha}{(1 + \nu_\alpha)(1 - 2\nu_\alpha)}$  та  $\mu_\alpha = \frac{E_\alpha}{2(1 + \nu_\alpha)}$  – параметри Ляме для тіла

$\Omega_\alpha$ , що визначаються через модуль Юнга  $E_\alpha$  та коефіцієнт Пуассона  $\nu_\alpha$ . Для кожного з тіл виконуються рівняння рівноваги

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \sigma_{\alpha ik}(\mathbf{x})}{\partial x_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3)$$

Підстановка (2) в (3) з використанням (1) дає рівняння рівноваги Нав'є відносно переміщень [8]:

$$(\lambda_\alpha + \mu_\alpha) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{\alpha k}(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_i} + \mu_\alpha \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_k^2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4)$$

Припустимо, що межа  $\Gamma_\alpha$  складається з трьох частин, які не перетинаються:  $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^p \cup S_\alpha$ . Тут  $\Gamma_\alpha^u$  – частина межі  $\Gamma_\alpha$ , де задано переміщення (умови Діріхле), які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u. \quad (5)$$

На частині  $\Gamma_\alpha^p$  межі  $\Gamma_\alpha$  виконуються статичні крайові умови (умови Неймана):

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^p, \quad (6)$$

де  $\mathbf{p}_\alpha$  – задані граничні зусилля. Межа  $S_\alpha$  відповідає зоні можливого одностороннього контакту тіла  $\Omega_\alpha$  з іншим тілом. Вважаємо, що криві  $S_1 \subset \subset \Gamma_1$  і  $S_2 \subset \subset \Gamma_2$  – достатньо близькі ( $S_1 \approx S_2$ ), тому приймаємо, що їхні зовнішні нормалі відрізняються лише знаком [6]:  $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_2(\mathbf{x}')$ , де  $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_2$  – ортогональна проекція точки  $\mathbf{x} \in S_1$  на криву  $S_2$ . Відстань по нормалі між тілами  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  до деформації позначимо через  $f_n(\mathbf{x}) =$

$$= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_k - x'_k)^2}.$$

На зонах можливого контакту тіл виконуються такі умови:

– нерозтягування

$$\sigma_{1n}(\mathbf{x}) = \sigma_{2n}(\mathbf{x}') \leq 0; \quad (7)$$

– відсутності тертя

$$\sigma_{1\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{2\tau}(\mathbf{x}') = 0; \quad (8)$$

– взаємного непроникнення тіл

$$u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') \leq f_n(\mathbf{x}); \quad (9)$$

– контактної альтернативи

$$(u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') - f_n(\mathbf{x}))\sigma_{1n}(\mathbf{x}) = 0. \quad (10)$$

Тут  $\mathbf{x} \in S_1$ ,  $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_2$ .

Рівняння (1), (2), (4) з крайовими умовами (5)–(10) описують односторонній контакт двох пружних тіл без тертя.

**Варіаційні формулювання.** Наведемо варіаційне формулювання розглянутої контактної задачі (1), (2), (4)–(10) у вигляді варіаційної нерівності на опуклій замкненій множині кінематично допустимих переміщень, яку далі за допомогою методу штрафу зведемо до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння у гільбертовому просторі.

Розглянемо простори Соболева  $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^2$  для кожного з тіл. Введемо замкнуті підпростори  $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$  та означимо в них скалярний добуток  $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\alpha} (u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j}) d\Omega$  і норму

$$\|\mathbf{u}\|_{V_\alpha^0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_\alpha^0}}.$$

Значення елементів просторів  $V_\alpha$  і  $V_\alpha^0$  на частинах межі  $\Gamma_\alpha$  будемо розуміти у сенсі слідів [24] і для простоти позначатимемо їх тими самими символами. Слід елемента  $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha$  на межі  $\Gamma_\alpha^u$  належить класу  $[H^{1/2}(\Gamma_\alpha^u)]^2$ , а слід елемента  $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0$  на межі  $\Xi_\alpha = \text{int}(\Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u)$  належить до  $[H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)]^2$ . Надалі вважатимемо, що  $\Gamma_\alpha^u = \bar{\Gamma}_\alpha^u$ . Тоді  $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$ ,  $\Gamma_\alpha^p \subset \Xi_\alpha$ ,  $S_\alpha \subset \Xi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Тепер введемо простір  $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^\top : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0, \alpha = 1, 2\}$  зі скалярним добутком  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^2 (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$  та нормою  $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$ .

Означимо білінійну форму  $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$ , таку, що  $\frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  відповідає за сумарну енергію деформації двох тіл, а також лінійну форму  $L(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v} \in V_0$ , що дорівнює роботі зовнішніх сил, прикладених до тіл:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha),$$

$$a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \lambda_\alpha \Theta_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) \Theta_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega + 2 \int_{\Omega_\alpha} \mu_\alpha \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{u}_\alpha) \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega,$$

$$\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \quad (11)$$

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha), \quad \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha^p} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha dS = \int_{\Gamma_\alpha^p} \sum_{i=1}^2 p_{\alpha i} v_{\alpha i} dS,$$

$$\mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \quad (12)$$

де  $\mathbf{p}_\alpha \in [H_{00}^{-1/2}(\Xi_\alpha)]^2$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

У просторі  $V_0$  означимо опуклу замкнену множину кінематично допустимих переміщень на основі умови взаємного непроникнення (9):

$$K = \{\mathbf{u} \in V_0 : u_{1n} + u_{2n} \leq f_n \text{ на } S_1\},$$

де  $u_{\alpha n} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $f_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$ .

Результати робіт [6, 7, 24] дозволяють сформулювати теорему.

**Теорема 1 [6, 7].** *Вихідна контактна задача (1), (2), (4)–(10) у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації квадратичного функціонала Лагранжа на опуклій замкненій множині  $K \subsetneq V_0$ :*

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in K}. \quad (13)$$

Із застосуванням результатів праць [6, 7, 13, 24] можна сформулювати і довести таке твердження.

**Теорема 2 [6, 7].** *Нехай межі тіл  $\Gamma_\alpha$  є ліпшицевими,  $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{p}_\alpha \in [H_{00}^{-1/2}(\Xi_\alpha)]^2$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $f_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$ , а параметри Ляме обмежені:*

$$(\forall \mathbf{x} \in \Omega_\alpha) \quad \{0 < \lambda_\alpha(\mathbf{x}) < \infty, 0 < \mu_\alpha(\mathbf{x}) < \infty\}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Тоді задача (13) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню варіаційної нерівності на множині  $K$ :

$$F'(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K, \quad \mathbf{u} \in K. \quad (14)$$

Для зведення задачі мінімізації (13) на опуклій множині  $K$  до задачі мінімізації у вихідному просторі  $V_0$  застосуємо метод штрафу [21, 24]. За порушення умови непроникнення (9) введемо штраф у такій формі [21]:

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \int_{S_1} [(f_n - u_{1n} - u_{2n})^-]^2 dS, \quad \mathbf{u} \in V_0,$$

де  $\theta > 0$  – параметр штрафу,  $z^- = \min\{0, z\}$ .

Розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі  $V_0$ :

$$F_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \quad (15)$$

Штрафний доданок  $J_\theta(\mathbf{u})$  є невід'ємним і диференційовним за Гато:

$$J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \int_{S_1} (f_n - u_{1n} - u_{2n})^- (v_{1n} + v_{2n}) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0.$$

Зазначимо, що диференціал  $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  є лінійним за  $\mathbf{v}$ , однак нелінійним за  $\mathbf{u}$ .

Із використанням праць [13, 24] можна довести таку теорему.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді задача (15) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню в просторі  $V_0$  нелінійного за  $\mathbf{u}$  варіаційного рівняння*

$$F'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad \mathbf{u} \in V_0. \quad (16)$$

На основі результатів праць [20, 24] доведено наступне твердження про сильну збіжність розв'язку нелінійного варіаційного рівняння (16) до розв'язку вихідної варіаційної нерівності (14) при  $\theta \rightarrow 0$ .

**Теорема 4 [15].** *Нехай виконуються умови теореми 2. Крім цього, нехай  $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$  – розв'язок задачі (15) (варіаційного рівняння (16)) для  $\theta > 0$ , а  $\bar{\mathbf{u}}_* \in K$  – розв'язок задачі (13) (варіаційної нерівності (14)). Тоді  $\bar{\mathbf{u}}_\theta \rightarrow \bar{\mathbf{u}}_*$  сильно у просторі  $V_0$  при  $\theta \rightarrow 0$ , тобто  $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}_*\|_{V_0} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$ .*

**Ітераційний метод декомпозиції області.** Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння зі штрафом (16), що відповідає вихідній контактній задачі, застосуємо такий ітераційний метод [4, 15]:

$$A(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})] \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

де  $\gamma \in \mathbb{R}$  – ітераційний параметр;  $\mathbf{u}^k \in V_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , –  $k$ -те наближення до точного розв'язку рівняння (16), а  $\mathbf{u}^0 \in V_0$  – початкове наближення. На кожному кроці ітераційного методу (17) необхідно розв'язувати для заданого  $\mathbf{u}^k$  лінійне варіаційне рівняння відносно  $\mathbf{u}^{k+1}$ .

Покажемо, що цей ітераційний метод приводить до декомпозиції за підобластями, тобто зводить розв'язування вихідної задачі у всій області  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  до розв'язування послідовності окремих задач для кожного із тіл  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Після перетворень ітераційний процес (17) набуде вигляду

$$A\left(\frac{1}{\gamma}[\mathbf{u}^{k+1} - (1 - \gamma)\mathbf{u}^k], \mathbf{v}\right) = L(\mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Далі, увівши заміну  $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = \frac{1}{\gamma}[\mathbf{u}^{k+1} - (1 - \gamma)\mathbf{u}^k]$ , отримаємо, що ітераційний метод (17) можна записати так:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad (18)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \gamma)\mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Оскільки величини, які є спільними для обох тіл, відомі з попередньої ітерації, то варіаційне рівняння (18) розпадається на два незалежних рівняння в окремих тілах, і метод (18), (19) еквівалентний наступному ітераційному процесу [4, 15]:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) = \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \int_{S_\alpha} (f_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^- v_{\alpha n} dS \quad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (20)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma)\mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Метод (20), (21) полягає у паралельному розв'язуванні на кожній ітерації варіаційних задач (20), незалежних для кожного з тіл, які відповідають задачам теорії пружності із заданими навантаженнями  $\sigma_{1n}^k = \sigma_{2n}^k = \frac{1}{\theta}(f_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^-$  на зонах можливого контакту (умовами Неймана). Тому цей ітераційний метод відноситься до паралельних алгоритмів декомпозиції області типу Неймана [3, 4, 15, 25].

Доведено теорему про збіжність паралельної схеми Неймана декомпозиції області (20), (21).

**Теорема 5 [4, 15].** *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді існує  $\gamma^* > 0$  таке, що для будь-якого параметра  $\gamma \in (0, \gamma^*)$  послідовність наближень  $\{\mathbf{u}^k = (\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^k)^\top\}$ , отримана методом декомпозиції області (20), (21), збігається сильно у просторі  $V_0$  до точного розв'язку  $\bar{\mathbf{u}}$  задачі (16), тобто  $\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . При цьому швидкість збіжності методу (20), (21) в енергетичній нормі  $\|\cdot\|_A = \sqrt{A(\cdot, \cdot)}$  є лінійною:*

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\|_A \leq q \|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\|_A, \quad q \in (0, 1).$$

Отже, за допомогою методу декомпозиції області (20), (21) вихідну нелінійну контактну задачу можна звести до розв'язування послідовності класичних задач лінійної теорії пружності в окремих тілах. Такий підхід дозволяє застосовувати найбільш ефективні числові методи для розв'язування окремих задач, а також організувати розпаралелення обчислень.

**Комбінований алгоритм декомпозиції та  $h$ -адаптації.** У працях [2, 9, 15] для числового розв'язування задач (20) у кожній із областей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  використовується метод скінченних елементів. Зазначимо, що весь процес розв'язування є ітераційним, і на кожному кроці необхідно розв'язувати дві повноцінні задачі теорії пружності. Тому важливу роль відіграє оптимальність скінченноелементної сітки.

Побудуємо комбінований алгоритм для розв'язування вихідної контактної задачі на основі описаної вище схеми Неймана декомпозиції області та розробленого раніше в роботі [14] алгоритму  $h$ -адаптації сітки МСЕ для лінійних задач теорії пружності, який базується на апріорній різниці похибок методів скінченних і граничних елементів при обчисленні напружень. Для простоти адаптацію будемо здійснювати лише в області  $\Omega_2$ , а в області  $\Omega_1$  застосовуватимемо МСЕ з рівномірною сіткою. Спершу опишемо процедуру оцінювання похибки як основного елемента адаптивного процесу. Для цього введемо означення термінів, які будемо використовувати надалі.

Розглянемо деяке скінченноелементне розбиття області  $\Omega_2$ . Нехай  $\Omega_{2e}$  – деякий скінченний елемент цього розбиття. Надалі, для зручності, індекс тіла  $\Omega_2$  у позначеннях певних величин опускаємо.

**Означення 1.** Верхнім і нижнім діаметром скінченного елемента  $\Omega_{2e}$  називатимемо відповідно величини  $D_e$  та  $d_e$  такі, що

а)  $D_e = \tilde{D}_e$ ,  $d_e = \tilde{d}_e$ , де  $\tilde{D}_e$  та  $\tilde{d}_e$  – діаметри відповідно описаного та вписаного кіл в елемент  $\Omega_{2e}$  у випадку, коли  $\Omega_{2e}$  – трикутний елемент;

б)  $D_e = \max_{i=1,\dots,4} T_i$ ,  $d_e = \min_{i=1,\dots,4} t_i$ , де  $T_i$  та  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , – діаметри відповідно описаного та вписаного кіл у всі можливі трикутники, утворені з вершин елемента  $\Omega_{2e}$  у випадку, коли  $\Omega_{2e}$  – чотирикутний елемент.

Діаметром сітки скінченних елементів області  $\Omega_2$  називатимемо величину  $h_F = \max_e D_e$ .

**Означення 2.** Величину  $K_e = D_e/d_e$  називатимемо коефіцієнтом регулярності скінченного елемента  $\Omega_{2e}$ . Скінченноелементну сітку області  $\Omega_2$  будемо називати регулярною, якщо виконується умова

$$(\exists K^* < \infty) \quad (\forall e) \quad \{K_e \leq K^*\}.$$

Тепер розглянемо деяке граничноелементне розбиття області  $\Omega_2$ .

**Означення 3.** Діаметром граничного елемента  $\Gamma_{2e}$  називатимемо величину  $\Delta_e = \sup_{x,y \in \Gamma_{2e}} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ . Діаметром сітки граничних елементів області  $\Omega_2$  називатимемо величину  $h_B = \max_e \Delta_e$ .

Розв'яжемо на деякій ітерації методу декомпозиції області (20), (21) задачу в області  $\Omega_2$  за допомогою МСЕ та МГЕ з однаковим порядком апроксимацій, наприклад, першим. Припустимо, що для діаметрів сітки МСЕ  $h_F$  та сітки МГЕ  $h_B$  справджується таке обмеження:

$$C_1 h_F \leq h_B \leq C_2 h_F, \quad (22)$$

де  $C_1, C_2 > 0$  – деякі константи.

Введемо норму довільного тензора  $\hat{\mathbf{z}}$  в області  $W \subset \Omega$  таким чином:

$$\|\hat{\mathbf{z}}\|_W = \sqrt{\int_W \sum_{i,j=1}^2 z_{ij}^2 d\Omega}.$$

Позначимо через  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_F$  і  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B$  тензори напружень у тілі  $\Omega_2$ , знайдені відповідно методами скінченних і граничних елементів. Відомо [10], що апіорі  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B$  визначаються з кращим порядком точності, ніж  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_F$ . Тому можна припустити, що у випадку виконання обмеження (22) існує константа  $C \in (0, 1)$  така, що

$$\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_B\|_{\Omega_2} \leq C \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_F\|_{\Omega_2}, \quad (23)$$

де  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*$  – точне значення тензора напружень в області  $\Omega_2$ .

Застосуємо теорему.

**Теорема 6** [5]. *Нехай виконуються співвідношення (22), (23). Тоді існують константи  $\underline{c}$  та  $\bar{C}$  такі, що:*

$$\underline{c} \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_F\|_{\Omega_2} \leq \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_F\|_{\Omega_2} \leq \bar{C} \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_F\|_{\Omega_2}. \quad (24)$$

Співвідношення (24) вказує на те, що  $\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_F\|_{\Omega_2}$  є оцінювачем істинної похибки  $\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_F\|_{\Omega_2}$ . Для виконання (24) потрібно задовольнити умову (22). З цією метою узгодимо сітки скінченних і граничних елементів. Позначимо через  $Z$  множину сторін усіх скінченних елементів. Означимо сітку граничних елементів так:

$$\Xi_B = Z \cap \partial\Omega_2. \quad (25)$$

Нехай  $N_F^i$ ,  $i = 1, \dots, m_F$ , – базисні функції МСЕ, визначені в області  $\Omega_2$ . Означимо граничноелементні базисні функції  $N_B^j$ ,  $j = 1, \dots, m_B$ , так:

$$\{N_B^j\}_{j=1}^{m_B} = \mathfrak{R}(\{N_F^i\}_{i=1}^{m_F}), \quad (26)$$

де  $\mathfrak{R}(\cdot)$  – оператор звуження на  $\Gamma_2 = \partial\Omega_2$  функцій, визначених у тілі  $\Omega_2$ .

Справджується така

**Лема 1** [5]. *Нехай деяка сітка скінченних елементів є регулярною і серед її елементів максимального верхнього діаметра існує такий, що має сторону, яка розташована на  $\partial\Omega_2$ . Тоді для такої сітки та сітки граничних елементів, побудованої за способом (25), (26), буде виконуватись подвійна нерівність (22) про еквівалентність діаметрів.*

Отже, спосіб (25), (26) побудови сітки граничних елементів забезпечує умову еквівалентності діаметрів, яка є необхідною для обґрунтування оцінювача (24).

Теорема 6 дає змогу використати оцінювач  $\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_F\|_{\Omega_2}$  для побудови адаптивного алгоритму. Для визначеності вважатимемо, що всі скінченні елементи є чотирикутними. Сформулюємо критерій адаптації на кожному скінченному елементі  $\Omega_{2e}$  у такому вигляді [5, 14]:

$$\eta_{FB}(\Omega_{2e}) = \frac{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_F\|_{\Omega_{2e}}}{|\Omega_{2e}|} \cdot \left( \frac{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_B\|_{\Omega_2}}{|\Omega_2|} \right)^{-1} \leq \delta, \quad (27)$$

де  $|\Omega_{2e}|$  і  $|\Omega_2|$  – площі відповідно  $\Omega_{2e}$  і  $\Omega_2$ , а  $\delta > 0$  – поріг адаптації. Елементи, для яких  $\eta_{FB}$  перевищуватиме деякий наперед заданий поріг адаптації  $\delta$ , розбиватимемо. Якщо не використовувати специфічних алгоритмів розбиття, то у загальному випадку після цієї процедури скінченноелементна сітка втратить сумісність. У випадку несумісної скінченноелементної

сітки будемо застосовувати метод мортарних функцій. У роботі [26] показано, що порядок точності результатів МСЕ при цьому не погіршується. Як наслідок, описані вище теоретичні твердження справджуються також і для МСЕ з мортарними функціями.

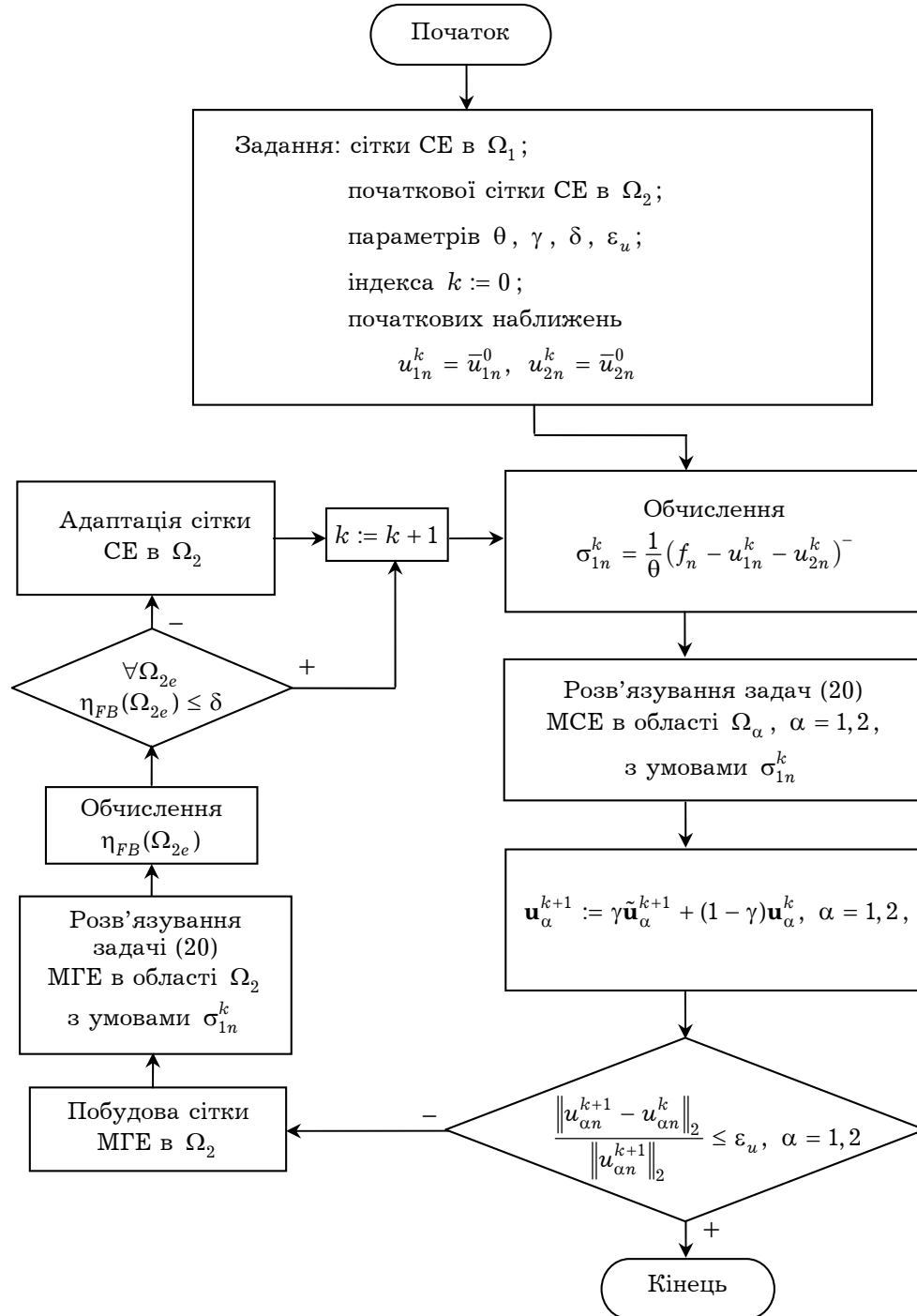


Рис. 2. Блок-схема комбінованого алгоритму.

У стандартних адаптивних схемах процес модифікації сітки ітераційно повторюється до досягнення точності на всіх скінченних елементах. Поєднуючи ітераційний процес декомпозиції області (20), (21) та вищеписаний адаптивний алгоритм, одночасно виконуючи одну ітерацію декомпозиції та



один крок адаптації. Тоді отримаємо комбінований алгоритм, блок-схема якого зображена на рис. 2.

**Числовий аналіз.** Дослідимо практичну ефективність запропонованого комбінованого алгоритму. Розглянемо задачу про односторонній контакт двох ізотропних пружних тіл  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  за умов плоскої деформації. Схему контакту та граничні умови для цієї задачі зображено на рис. 3. Довжина і висота кожного із тіл відповідно дорівнюють  $L = 4$  см і  $H = 1$  см. Відстань між тілами до деформації дорівнює  $f_n(\mathbf{x}) = r_0 x_1^2$ ,  $r_0 = 10^{-3}$  см, а обтиснення тіл дорівнює  $\Delta = 1.366 r_0$ . Модулі Юнга обох тіл  $E_1 = E_2 = 2.1 \cdot 10^5$  МПа, а коефіцієнти Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ .

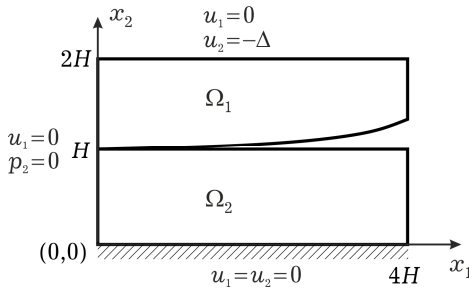


Рис. 3. Схема тестової задачі.

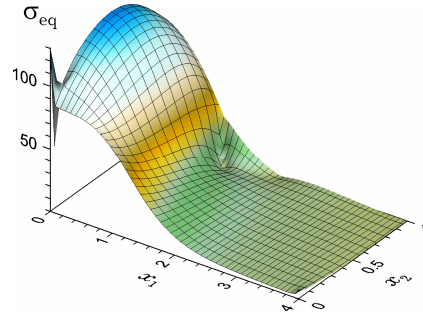


Рис. 4. Розподіл еквівалентних напружень у тілі  $\Omega_2$ .

Задачу розв'язано запропонованим комбінованим алгоритмом декомпозиції області та  $h$ -адаптації. В області  $\Omega_1$  застосовано МСЕ з лінійними трикутними елементами, а в області  $\Omega_2$  — МСЕ з лінійними чотирикутними елементами. Як зазначено раніше, для простоти обмежувались адаптацією лише в області  $\Omega_2$ .

Початкові наближення для переміщень  $u_{\alpha n}^0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , задавали за моделлю пружного шару [15]. Параметр штрафу вибирали у вигляді  $\theta = cH/E_1$ , де  $c$  — безрозмірний коефіцієнт. Для завершення ітераційного процесу використано критерій

$$\frac{\|u_{\alpha n}^{k+1} - u_{\alpha n}^k\|_2}{\|u_{\alpha n}^{k+1}\|_2} \leq \varepsilon_u, \quad \alpha = 1, 2,$$

де  $\|u_{\alpha n}\|_2 = \left(\sum_j [u_{\alpha n}(\mathbf{x}^j)]^2\right)^{1/2}$  — дискретна норма,  $\mathbf{x}^j \in S_1$  — вузли скінченноелементного розбиття зони можливого контакту, а  $\varepsilon_u > 0$  — відносна точність для переміщень. Параметри  $c$ ,  $\gamma$  і  $\varepsilon_u$  ітераційного алгоритму вибрано такими:  $c = 0.05$ ,  $\gamma = 0.02$ ,  $\varepsilon_u = 0.0015$ . Числові експерименти проводили для різних значень порогу адаптації  $\delta$ .

На рис. 4 зображено розподіл еквівалентних напружень Губера — Мізеса  $\sigma_{eq}$  у тілі  $\Omega_2$ , які знайдено за формулою

$$\sigma_{eq} = \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]/2 + 3\sigma_{12}^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_2,$$

де  $\sigma_{33} = \lambda\Theta = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ .

Виявлено, що у задачі про контакт пружних тіл у процесі адаптації виникають ефекти, яких не спостерігали у більш простих задачах. Так, всередині області  $\Omega_2$  можуть виникати локальні згущення сітки у місцях, де немає значних градієнтів напружень (див. рис. 5). Це зумовлено локальною

заміною умов неперервності у методі мортарних функцій умовами слабкої неперервності, що негативно впливає на точність напружень, які обчислюються через похідні від переміщень. Тому в зоні несумісної сітки скінченних елементів числова похибка методу мортарних функцій може призвести до великих значень критерію (27). Зауважимо, що при цьому величина  $\eta_{FB}$  набуває великих значень на менших скінченних елементах, а подальша адаптація сітки може лише погіршувати ситуацію (рис. 6). Оцінка може залишатись великою на дуже малих елементах. Однак, оскільки мортарний МСЕ в цілому збіжний [26], то умова зупинки комбінованого алгоритму все ж досягається для достатньо малих порогів адаптації  $\delta$ .

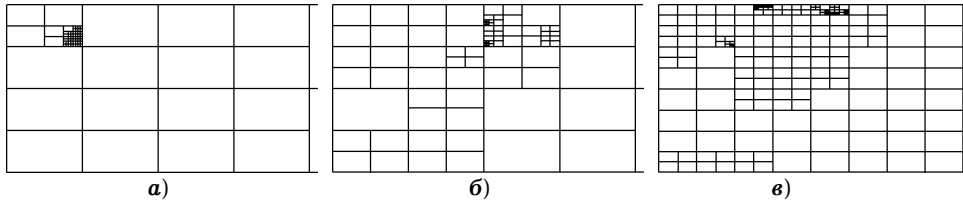


Рис. 5. Приклади небажаних згущень у зонах без особливостей.

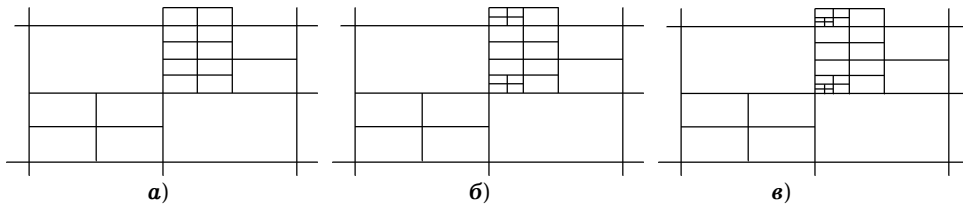


Рис. 6. Частини сіток на послідовних ітераціях. Небажана адаптація збільшує несумісність сітки.

Для отримання коректного результату внесено таку зміну у комбінований алгоритм (рис. 2): на етапі адаптації сітки скінченних елементів в області  $\Omega_2$  розбиваємо також елементи, що мають сторону, яка межує із більш ніж двома іншими скінченними елементами.

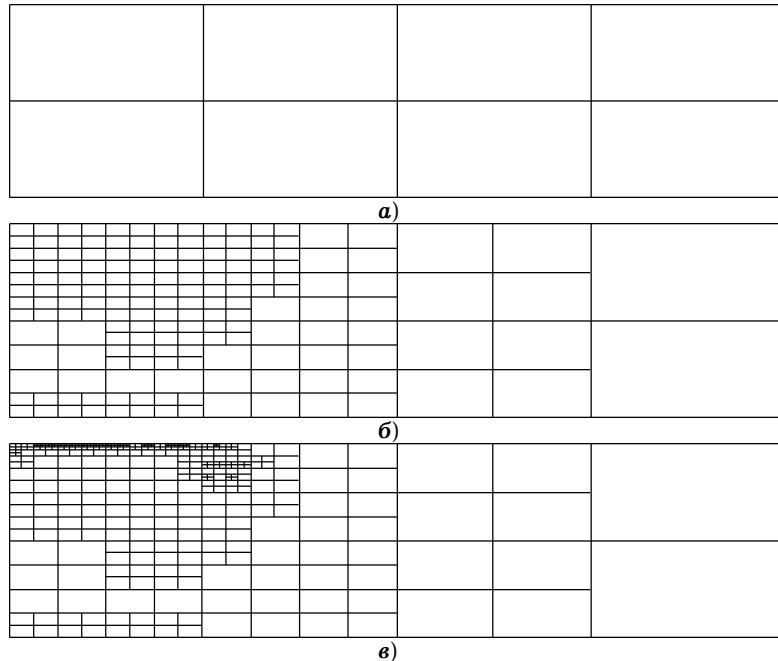


Рис. 7. Сітки МСЕ в області  $\Omega_2$ : а) – початкова сітка; б) – сітка на 3-й ітерації, в) – кінцева сітка.

Застосування такої модифікації дозволило покращити результати. На рис. 7 зображено деякі із сіток, отриманих у процесі адаптації з порогом  $\delta = 0.1$ . Збіжність комбінованого алгоритму у цьому випадку досягнуто за шість ітерацій. Як бачимо, адаптація сітки відбувається у зоні контакту, що відповідає особливостям поля напружень у тілі.

Досліджено точність числових результатів залежно від значення порогу адаптації  $\delta$ . На рис. 8 показано збіжність переміщень  $u_1$  (рис. 8а) та  $u_2$  (рис. 8б) у точці  $\mathbf{x} = (0.5, 0.75)^\top$  при зменшенні порогу адаптації  $\delta$ . При  $\delta \rightarrow 0$  переміщення прямують до своїх асимптотичних значень.

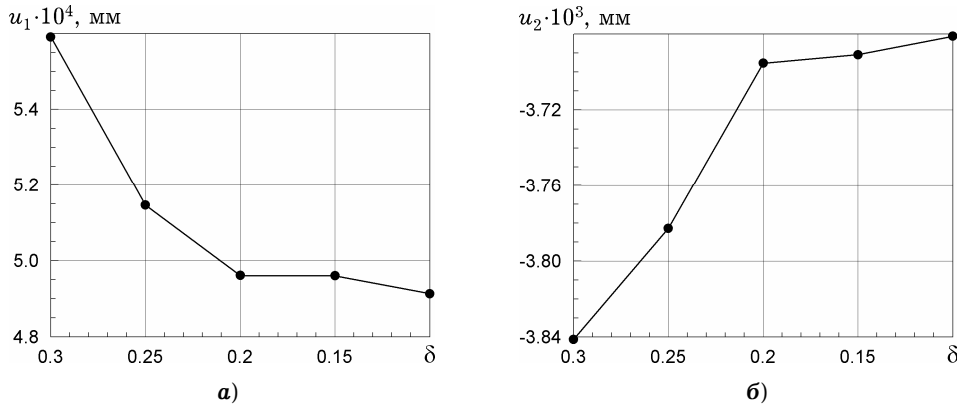


Рис. 8. Збіжність переміщень у точці  $\mathbf{x} = (0.5, 0.75)^\top$  при зменшенні порогу адаптації: а) – переміщення  $u_1$ ; б) – переміщення  $u_2$ .

На рис. 9 наведено графіки, які ілюструють процес збіжності контактних переміщень  $u_n$  для тіла  $\Omega_2$  (рис. 9а) та контактної тиску  $\sigma_n^* = -\sigma_n$  (рис. 9б) за ітераціями  $k$ . Суцільною лінією на рис. 9б зображено розподіл контактної тиску, отриманий на основі праці [1] для випадку, коли тіло  $\Omega_2$  нескінченно довге. Як бачимо, отримані числові результати є близькими до альтернативного розв'язку з поправкою на обмеженість області, що підтверджує їх достовірність.

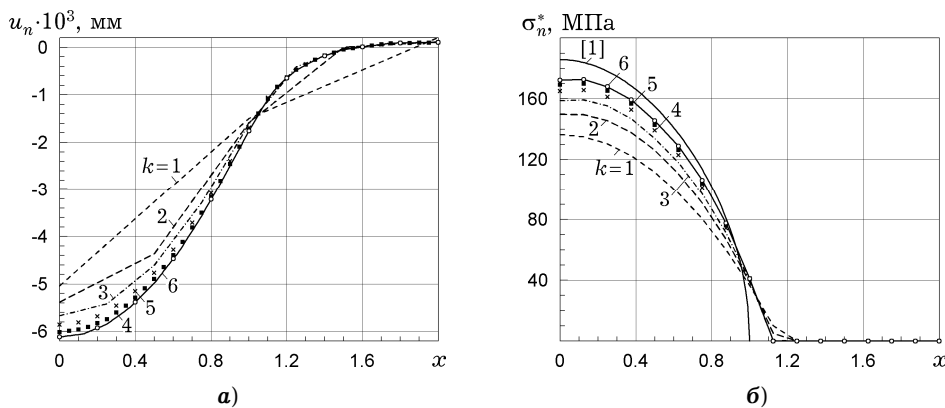


Рис. 9. Збіжність за ітераціями для тіла  $\Omega_2$ : а) – контактної переміщення; б) – контактної тиску.

Застосування запропонованого комбінованого алгоритму суттєво зменшує обчислювальні ресурси, необхідні для розв'язування задачі про контакт пружних тіл. На рис. 10 наведено графіки залежності загальної кільк-

кості невідомих  $M$  від параметра згущення  $1/\delta$  на кінцевій сітці комбінованого алгоритму (суцільна крива) і на рівномірній сітці такого ж мінімального діаметра (штрихова крива). Тут враховано усі невідомі включно з невідомими МГЕ для оцінки похибки. Бачимо, що адаптивна схема у десятки разів економніша від схеми МСЕ з рівномірною сіткою.

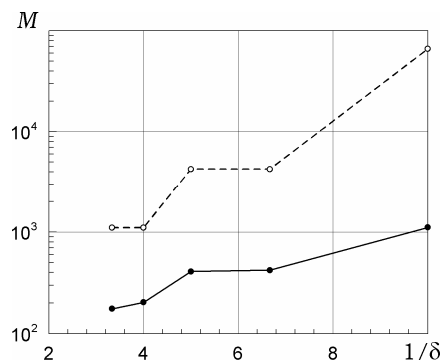


Рис. 10. Загальна кількість невідомих при розв'язуванні задачі в області  $\Omega_2$  МСЕ з адаптивним і рівномірним згущенням сітки.

**Висновки.** Комбінований алгоритм для розв'язування задачі про контакт пружних тіл, який поєднує метод декомпозиції області та адаптивну схему МСЕ–МГЕ, дозволяє ефективно отримувати достатньо точний розв'язок. Адаптована сітка відповідає особливостям поля напружень в області зони контакту. Для коректного застосування адаптивної схеми необхідно уникати утворення «сильно» несумісної сітки шляхом додаткового розбиття елементів. Порівняння із альтернативним розв'язком підтверджує достовірність отриманих результатів. Використання запропонованого комбінованого алгоритму дозволяє значно економити обчислювальні ресурси.

1. Ворочич И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – Москва: Наука, 1974. – 456 с.
2. Григоренко А. Я., Дьяк И. И., Матысяк С. И., Прокопшин И. И. Методы декомпозиции области для решения задач контакта без трения многослойных упругих тел // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 4. – С. 25–37.  
Te same: Grigorenko A. Ya., Dyyak I. I., Matysyak S. I., Prokopyshyn I. I. Domain decomposition methods applied to solve frictionless-contact problems for multilayer elastic bodies // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 4. – P. 388–399.
3. Григоренко А. Я., Дьяк И. И., Прокопшин И. И. Применение метода декомпозиции области с использованием гибридных аппроксимаций для решения задач теории упругости // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 11. – С. 18–29.  
Te same: Grigorenko A. Ya., Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I. Domain decomposition method with hybrid approximations applied to solve problems of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 11. – P. 1213–1222.
4. Дьяк И. И., Прокопшин И. И. Збіжність паралельної схеми Неймана методу декомпозиції області для задач контакту без тертя декількох пружних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 3. – С. 78–89.  
Te same: Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I. Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No. 4. – P. 516–533.
5. Дьяк И., Яцук Ю. Скінченно-граничноелементний оцінювач похибки МСЕ для задач теорії пружності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2013. – Вип. 19. – С. 47–55.
6. Кравчук А. С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, № 3. – С. 467–474.
7. Кузьменко В. И. О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, № 5. – С. 893–901.

8. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
9. Прокопишин І. І., Дьяк І. І., Мартиняк Р. М. Числові дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – **49**, № 1. – С. 46–55.  
Te same: Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M. Numerical analysis of the problems of contact of three elastic bodies by the domain decomposition methods // Mater. Sci. – 2013. – **49**, No. 1. – P. 45–58.
10. Ainsworth M., Oden J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. – New York: J. Wiley & Sons, 2000. – 240 p.
11. Avery P., Farhat C. The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2009. – **198**. – P. 1673–1683.
12. Buscaglia G. C., Duran R., Fancello E. A., Feijoo R. A., Padra C. An adaptive finite element approach for frictionless contact problems // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2001. – **50**. – P. 395–418.
13. Céa J. Optimisation: Théorie et algorithmes. – Paris: Dunod, 1971.  
Te same: Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы – Москва: Мир, 1973. – 244 с.
14. Dyyak I., Matysiak S., Yashchuk Yu. FEM-BEM based error estimator in elasticity problems // 19<sup>th</sup> Int. Conf. on Comput. Meth. in Mech.: Short Papers. – Warszawa, 2011. – P. 175–176.
15. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // <http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf>. – 2012. – 32 p.
16. Franke D., Düster A., Nübel V., Rank E. A comparison of the  $h$ -,  $p$ -,  $hp$ - and  $rp$ -version of the FEM for the solution of the 2D Hertzian contact problem // Comput. Mech. – 2010. – **45**, No. 5. – P. 513–522.
17. Gallimard L., Sassi T. A posteriori error analysis of a domain decomposition algorithm for unilateral contact problem // Comput. Struct. – 2010. – **88**. – P. 879–888.
18. Haslinger J., Kučera R., Sassi T. A domain decomposition algorithm for contact problems: Analysis and implementation // Math. Model. Nat. Phenom. – 2009. – **4**, No. 1. – P. 123–146.
19. Hlaváček I., Haslinger J., Nečas J., Lovíšek J. Solution of variational inequalities in mechanics. – New York: Springer, 1988. – Ser. Appl. Math. Sci. – Vol. 66. – 275 p.
20. Khludnev A. M., Kovtunenkov V. A. Analysis of cracks in solids. – Southampton, Boston: WIT Press, 2000. – 386 p.
21. Kikuchi N., Oden J. T. Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – 489 p.
22. Koko J. Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem // Appl. Math. Lett. – 2009. – **22**. – P. 1534–1538.
23. Kravchuk A., Neittaanmaki P. Variational and quasi-variational inequalities in mechanics. – Dordrecht etc.: Springer, 2007. – 338 p.
24. Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire. – Paris: Dunod Gauthier-Villards, 1969.
25. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – **91**. – P. 647–654.
26. Wohlmuth B. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – **38**, No. 3. – P. 989–1012.
27. Wohlmuth B. Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems // Acta Numerica. – 2011. – **20**. – P. 569–734.
28. Wriggers P. Computational contact mechanics. – Berlin: Springer, 2006. – 518 p.
29. Wriggers P. Finite element algorithms for contact problems // Arch. Comput. Meth. Eng. – 1995. – **2**, No. 4. – P. 1–49.
30. Wriggers P., Scherf O. Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems // Math. Comput. Model. – 1998. – **28**, No. 4–8. – P. 437–447.

## КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ И $h$ -АДАПТАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предложен комбинированный алгоритм решения задач о контакте упругих тел. В алгоритме использовано сочетание итерационного метода декомпозиции области и  $h$ -адаптивной схемы, которая основана на сравнении результатов МКЭ и МГЭ. Численный анализ тестовой задачи показал, что сгущение сетки, осуществляемое алгоритмом, соответствует особенностям поля напряжений в области контакта, а общее количество неизвестных значительно уменьшается по сравнению со случаем равномерного разбиения.

## COMBINED ALGORITHM OF DOMAIN DECOMPOSITION AND $h$ -ADAPTATION FOR SOLVING ELASTIC CONTACT PROBLEMS

The composed algorithm for solving problems of contact between elastic bodies is proposed. This algorithm combines the iterative domain decomposition method and the  $h$ -adaptive scheme, which is based on comparison of FEM and BEM results. Numerical analysis of a test problem has indicated that the mesh refinement, performed by the algorithm, correctly reveals singularities of stress field near the contact area, and the total number of variables decreases significantly compared to uniform mesh case.

<sup>1</sup> Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
12.09.13