УДК 517.956

І. Д. Пукальський, І. М. Ісарюк

НЕЛОКАЛЬНІ ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ОСОБЛИВОСТЯМИ

У гельдерових просторах зі степеневою вагою розглядаються перша крайова задача та одностороння крайова задача з нелокальною умовою за часовою змінною для лінійного диференціального рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку на координатних площинах. Встановлено інтегральне зображення та знайдено оцінки розв'язків сформульованих задач у відповідних просторах.

Математичне моделювання багатьох фізичних і біологічних явищ приводить до крайових задач з виродженням та особливостями для рівнянь із частинними похідними. Дослідженню таких задач присвячено праці [1, 2, 6–10, 13, 14].

У монографіях [6, 7] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші та крайових задач у просторах максимально широких класів функцій для рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких мають степеневі особливості обмеженого порядку на межі області.

Необхідність вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь із нелокальними умовами стимулюється, зокрема, розв'язуванням обернених задач для рівняння теплопровідності [4], задач із теорії фізики плазми [3]. Нелокальним крайовим задачам присвячено праці [10, 11].

У цій статті розглянемо першу крайову задачу та односторонню крайову задачу з нелокальною умовою за часовою змінною для лінійного диференціального рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку на координатних площинах $x_i = 0$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. У гельдерових просторах зі степеневою вагою знайдено оцінки розв'язків сформульованих задач і встановлено інтегральне зображення розв'язку.

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай $(x_1,\ldots,x_n)$ – координати точки $x \in \mathbb{R}^n$; $\Omega_j = \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$; D – обмежена область з множини $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D така, що $\partial D \bigcap \Omega_j \neq \varnothing$; $t_0, t_1, \ldots, t_N, T$ – фіксовані додатні числа, $t_k \le T$, $k \in \{0,1,\ldots,N\}$.

Розглянемо в області $Q = D \times [0,T)$ задачу знаходження функції u, яка в області $Q^{(0)} = Q \setminus Q_{(0)}$, $Q_{(0)} = \{(t,x) \in Q \mid t = t_0,\ x \in D \setminus \Omega\} \bigcup \{(t,x) \in Q \mid t \in \in [0,T), x \in \Omega\}$, задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right]u(t,x) = f(t,x)\,, \tag{1}$$

нелокальну умову за часовою змінною

$$u(0,x) + \sum_{j=1}^N p_j(t_j,x)u(t_j,x) = \varphi(x)\,, \tag{2}$$

а на межі області $\Gamma = [0,T) \times \partial D$ – одну з крайових умов:

$$\lim_{x \to z \in \partial D} [u(t,x) - g(t,x)] = 0\,, \tag{3}$$

$$\lim_{x \to z \in \partial D} [(\mathcal{B}u - \psi)(t,x)] \equiv \lim_{x \to z \in \partial D} \left[\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\partial_{x_k} u + b_0(t,x)u - \psi(t,x)\right] = 0\,,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} u \ge 0, \qquad \lim_{x\to z\in\partial D} [(u\mathcal{B}u - \psi)(t,x)] = 0. \tag{4}$$

Порядок особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і $\mathcal{B}$ в точці $M(t,x)\in Q$ будуть характеризувати функції $s_1(a_i^{(1)},t)$, $s_2(a_i^{(2)},x_i)$: $s_1(a_i^{(1)},t) = \begin{cases} |t-t_0|^{a_i^{(1)}}, & |t-t_0|\le 1, \\ 1, & |t-t_0|\ge 1, \end{cases}$ $s_2(a_i^{(2)},x_i) = \begin{cases} |x_i|^{a_i^{(2)}}, & |x_i|\le 1, \\ 1, & |x_i|\ge 1, \end{cases}$ де $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$ – довільні фіксовані дійсні числа, $i\in\{1,\dots,n\}$; $s(a_i;M) = s_1(a_i^{(1)},t)s_2(a_i^{(2)},x_i)$; $S(a;M) = \min_i \{s(a_i;M)\}$, $a = (a_i^{(1)},a_i^{(2)})$.

Нехай $\bar{D} = D\cup\partial D$; $\bar{Q} = [0,T)\times\bar{D}$; $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $H_i^{(1)}(t^{(1)},x^{(2)})$, $H_i^{(2)}(t^{(2)},x^{(2)})$, $i\in\{1,\dots,n\}$, – точки із $\bar{Q}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)}, \dots,x_n^{(1)})$; ℓ, q – додатні фіксовані дійсні числа.

Означимо простір $C^\ell(\gamma;\beta;q;Q)$, у якому будемо вивчати задачі (1)–(4). $C^\ell(\gamma;\beta;q;Q)$ – множина функцій u, які мають неперервні частинні похідні в $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u(M)$, $2j+|k|\le[\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_{\bar{Q}}|u| \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\begin{aligned}
\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell = \sum_{r=0}^{[\ell]}\|u;\gamma;\beta;q\|_r + \langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_\ell \equiv \\
\equiv \sum_{r=0}^{[\ell]}\sum_{2j+|k|=r}\sup_{M\in\bar{Q}} S((2j+|k|+q)\gamma;M)\times \\
\times\prod_{m=1}^{n} s_1(-k_m\beta_m^{(1)},t)s_2(-k_m\beta_m^{(2)},x_m)\times \\
\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u(M)\right| + \sum_{2j+|k|=[\ell]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(H_i^{(1)},P_1)\subset\bar{Q}}\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\{\ell\}}\times \\
\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u(H_i^{(1)}) - \partial_t^j\partial_x^k u(P_1)\right| S((\ell+q)\gamma;\tilde{H}^{(1)})\times \\
\times\prod_{m=1}^{n} s_1(-k_m\beta_m^{(1)},t^{(1)})\, s_2(-k_m\beta_m^{(2)},\tilde{x}_m)\times \\
\times s_1(-\{\ell\}\beta_i^{(1)},t^{(1)})\, s_2(-\{\ell\}\beta_i^{(2)},\tilde{x}_i) + \\
+\sum_{2j+|k|=[\ell]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(H_i^{(1)},H_i^{(2)})\subset\bar{Q}}\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\{\ell\}/2} S((\ell+q)\gamma;\tilde{H}^{(2)})\times \\
\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u(H_i^{(2)}) - \partial_t^j\partial_x^k u(H_i^{(1)})\right|\times \\
\times\prod_{m=1}^{n} s_1(-k_m\beta_m^{(1)},\tilde{t})s_2(-k_m\beta_m^{(2)},x_m^{(2)}).
\end{aligned}$$

Тут позначено $s_2(a,\tilde{x}_m) = \min\{s_2(a,x_m^{(1)}),s_2(a,x_m^{(2)})\}$; $S(a;\tilde{H}^{(1)}) = \min\{S(a;P_1), S(a;H_i^{(1)})\}$; $S(a;\tilde{H}^{(2)}) = \min\{S(a;H_i^{(1)}),S(a;H_i^{(2)})\}$; $|k| = k_1+\ldots+k_n$; $\ell = [\ell]+\{\ell\}$; $[\ell]$ – ціла частина числа ℓ; $\gamma = \{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}\}$; $\beta_i\in\{\beta_i^{(1)},\beta_i^{(2)}\}$, $\beta = \{\beta_1,\dots,\beta_n\}$;

$q = \{q_1, q_2\}$; $q_{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\beta_i^{(\nu)}$ − фіксовані дійсні числа, $\nu \in \{1,2\}$, $\gamma^{(\nu)} \geq 0$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $q_{(\nu)} \geq 0$.

Нехай для задач (1)−(4) виконуються такі умови.

1°. Для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ справджується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} s(\beta_i; M) s(\beta_j; M) A_{ij}(M) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2,$$

де π_1, π_2 − додатні фіксовані сталі; $s(\mu_i; M) A_i(M) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; q)$, $s(\beta_i; M) \times$ $\times s(\beta_j; M) A_{ij}(M) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$; $S(\mu_0; M) A_0(m) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; Q)$, $A_0 < 0$ для $(t, x) \in \overline{Q}$; $f \in C^\alpha(\gamma; \beta; \mu_0; Q)$; $\mu_i = (\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)})$, $\mu_i^{(\nu)} \geq 0$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$; межа $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$; $p_j(t_j, x) \in C^{2+\alpha}(D)$, $p_j(t_j, x) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{N} p_j(t_j, x) e^{-\lambda t_j} \leq \lambda_0 <$ < 1, де λ − довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda < A_0(t, x)$ для $(t, x) \in \overline{Q}$; $\varphi \in C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; D)$, $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$.

2°. $g \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $g(0, x) + \sum_{j=1}^{N} p_j(t_j, x) g(t_j, x) = \varphi(x)$,

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left\{\max_i (1 + \beta_i^{(\nu)}), \max_i (\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\right\}.$$

3°. Вектори $\mathbf{b}^{(s)} = \{b_1^{(s)}, \ldots, b_n^{(s)}\}$, де $b_k^{(s)} = s(\beta_k; M) b_k(M)$, і $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ до Γ у точці $M \in \partial\Gamma$ кут, менший від $\pi/2$; $s(\beta_k; M) b_k(M) \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$; $S(\delta; M) b_0(M) \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $b_0 > 0$; $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)})$, $\delta^{(\nu)} \geq 0$; $\psi \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; \delta; Q)$,

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left\{\max_i (1 + \beta_i^{(\nu)}), \max_i (\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)}\right\}.$$

Справджуються такі теореми.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* ***1°***, ***2°***, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1)−(3) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ *і є правильною така оцінка*:

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq c\big(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q\|_\alpha + \|\varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}\big). \tag{5}$$

Теорема 2. *Якщо для задачі* (1), (2), (4) *виконуються умови* ***1°***, ***3°***, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), (4) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$ *і справджується оцінка*

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq c\big(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q\|_\alpha + \|\varphi; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|\psi; \gamma; \beta; \delta; Q\|_{2+\alpha}\big). \tag{6}$$

Для дослідження задачі (1)−(4) встановимо спочатку коректну розв'язність послідовностей допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничними значеннями послідовностей розв'язків яких будуть розв'язки задач (1)−(4).

Оцінки розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = Q \bigcap \{(t, x) \in Q \mid s_1(1, t) \geq m_1^{-1}, s_2(m_2, x_i) \geq m_2^{-1}\}$, $m = (m_1, m_2)$, $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq$ ≥ 1, − послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до $Q^{(0)}$.

Розглянемо в області Q задачу про знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\right] u_m(t,x) = f_m(t,x), \tag{7}$$

які задовольняють нелокальну умову

$$u_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} p_j(t_j,x) u_m(t_j,x) = \varphi_m(x) \tag{8}$$

та одну з крайових умов на межі області Γ:

$$\lim_{x\to z\in\partial D} [u_m(t,x) - g_m(t,x)] = 0, \tag{9}$$

$$(\mathcal{B}_1 u_m - \psi_m)(t,x)\big|_\Gamma = \lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{k=1}^{n} l_k(t,x)\partial_{x_k} u_m + \right.$$

$$\left. + l_0(t,x)u_m - \psi_m(t,x)\right] \ge 0,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} u_m \ge 0, \qquad \lim_{x\to z\in\partial D} [u_m(\mathcal{B}_1 u_m - \psi_m)(t,x)] = 0. \tag{10}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, l_k, l_0 і функції f_m, φ_m, ψ_m, g_m при $(t,x) \in \in Q_m$ співпадають відповідно з A_{ij}, A_i, A_0, b_k, b_0 і f, φ, ψ, g, а при $(t,x) \in Q \setminus Q_m$ є продовженням зі збереженням норм і гладкості [12, с. 82].

У задачах (7)–(10) зробимо заміну

$$u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda t}, \tag{11}$$

де λ задовольняє нерівність $\lambda < -A_0(t,x)$.

Тоді $v_m(t,x)$ буде розв'язком крайових задач

$$((L_1 - \lambda)v_m)(t,x) = f_m(t,x)e^{\lambda t}, \tag{12}$$

$$v_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} p_j(t_j,x)e^{-\lambda t_j} v_m(t_j,x) = \varphi_m(x), \tag{13}$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} [v_m(t,x) - g_m(t,x)e^{\lambda t}] = 0, \tag{14}$$

$$(\mathcal{B}_1 v_m - \psi_m e^{\lambda t})\big|_\Gamma \ge 0, \qquad v_m\big|_\Gamma \ge 0, \qquad [v_m(\mathcal{B}_1 v_m - \varphi_m e^{\lambda t})]\big|_\Gamma = 0. \tag{15}$$

Встановимо оцінку розв'язків задач (12)–(15). Введемо у просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|w_m;\gamma;\beta;q,Q\|_\ell$, еквівалентну при кожному фіксованому (m_1,m_2) гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell$, тільки замість функцій $s_1(a_i^{(1)},t)$, $s_2(a_i^{(2)},x_i)$ беремо відповідно $d_1(a_i^{(1)},t)$, $d_2(a_i^{(1)},x_i)$, де $d_1(a_i^{(1)},t) = \max\{s_1(a_i^{(1)},t), m_1^{-a_i^{(1)}}\}$ при $a_i^{(1)} \ge 0$ і $d_1(a_i^{(1)},t) = = \min\{s_1(a_i^{(1)},t), m_1^{-a_i^{(1)}}\}$ при $a_i^{(1)} \le 0$; $d_2(a_i^{(2)},x_i) = \max\{s_2(a_i^{(2)},x_i), m_2^{-a_i^{(2)}}\}$ при $a_i^{(2)} \ge 0$ і $d_2(a_i^{(2)},x_i) = \min\{s_2(a_i^{(2)},x_i), m_2^{-a_i^{(2)}}\}$ при $a_i^{(2)} < 0$. Позначимо $d(a_i;M) = d_1(a_i^{(1)},t)d_2(a_i^{(2)},x_i)$, $R(a;M) = \min_i\{d(a_i;M)\}$.

Виконується така теорема.

Теорема 3. *Нехай* v_m *– класичний розв'язок задачі* (12)–(14) *в області* Q *і виконуються умови* **1°**, **2°**. *Тоді для* v_m *справджується оцінка*

$$|v_m| \le \max\left\{ \left\| \varphi_m \left(1 - \sum_{j=1}^{N} p_j e^{-\lambda t_j}\right)^{-1}; D \right\|_0 , \right.$$

$$\left. \left\| f_m e^{\lambda t} (-\lambda - a_0)^{-1}; Q \right\|_0 , \left\| g_m e^{\lambda t}; Q \right\|_0 \right\}. \qquad (16)$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (16) встановлюємо за схемою доведення теореми 2.1 із [5, с. 22], тобто аналізуємо всі можливі розміщення додатного максимуму і від'ємного мінімуму функції $v_m(x)$.

Якщо $\max\limits_{\bar{Q}} v_m(t,x) = v_m(0, x^{(3)}) > 0$, то враховуючи обмеження $p_j(t_j, x) \ge$ ≥ 0, із умови (13) знаходимо

$$v_m(0, x^{(3)}) \left(1 - \sum_{j=1}^{N} p_j(t_j, x^{(3)}) e^{-\lambda t_j}\right) \le \varphi_m(x^{(3)}).$$

Отже,

$$v_m(0, x^{(3)}) \le \max_{\bar{D}} \left\{ \varphi_m(x) \left(1 - \sum_{j=1}^{N} P_j(t_j, x) e^{-\lambda t_j}\right)^{-1} \right\}.$$

Аналогічно одержуємо оцінку, коли $0 > \min\limits_{\bar{Q}} v_m(t,x) = \min\limits_{\bar{D}} v_m(0,x)$. ♦

Теорема 4. *Якщо* v_m *– класичний розв'язок задачі* (12), (13), (15) *в області* Q *і виконуються умови* **1°**, **3°**, *то для* v_m *справджується оцінка*

$$|v_m| \le \max\left\{ \left\| \varphi_m \left(1 - \sum_{j=1}^{N} p_j e^{-\lambda t_j}\right)^{-1}; D \right\|_0 , \left\| f e^{\lambda t} (-\lambda - a_0)^{-1}; Q \right\|_0 , \right.$$

$$\left. \left\| \psi_m e^{\lambda t} l_0^{-1}; Q \right\|_0 \right\}. \qquad (17)$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (17) одержуємо за схемою доведення теореми 2.2 [5, с. 25]. Відмінність є тільки у випадку, коли $0 < \max\limits_{\bar{Q}} v_m =$ $= \max\limits_{\partial\Gamma \cup D} v_m = v_m(P_3)$. Якщо $P_3 \in \Gamma$, то маємо $\sum\limits_{k=1}^{n} l_k(P_3) \partial_{x_k} v_m(P_3) \ge 0$ (де вектор $\boldsymbol{l}$ задовольняє умову **3°**), тому з крайової умови (15) отримаємо

$$v_m(P_3) \le \max_{\bar{Q}} \{ l_0^{-1}(t,x) \psi_m(t,x) e^{\lambda t} \}.$$

Якщо P_4, $P_4 \in \Gamma$, – точка від'ємного мінімуму для $v_m(t,x)$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} l_k(P_4) \partial_{x_k} v_m(P_4) \le 0$. Враховуючи крайову умову (15), одержуємо

$$v_m(P_4) \ge \min_{\bar{Q}} \{ l_0^{-1}(t,x) \psi_m(t,x) e^{\lambda t} \}.$$

Якщо $P_3 \in D$ або $P_4 \in D$, то, використовуючи нелокальну умову (13), одержимо оцінку

$$|v_k| \le \left\| \varphi_m \left(1 - \sum_{j=1}^{N} p_j e^{-\lambda t_j}\right)^{-1}; D \right\|_0 . \qquad ♦$$

При виконанні умов ***1°*–*3°*** існують єдині розв'язки задач (12)–(15) із простору $C^{2+\alpha}(Q)$ [10]. Ці розв'язки мають скінченну норму $\|v_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}$ при кожному m.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді для розв'язку задачі* (7)–(9) *справджується оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} \le c\Big(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \\ + \|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|g;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\Big). \tag{18}$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (18) одержуємо за схемою доведення теореми 5 із [11]. Наведемо найбільш важливі місця. У задачі (7)–(9) зробимо заміну

$$u_m(t,x) = \omega_m(t,x)e^{-\lambda t} + g_m(t,x), \tag{19}$$

де λ задовольняє нерівність $\lambda < -A_0(t,x)$. Тоді $\omega_m(t,x)$ буде розв'язком однорідної задачі

$$((L_1-\lambda)\omega_m)(t,x) = f_m(t,x)e^{\lambda t} - (L_1 g_m)(t,x) \equiv F_m(t,x), \tag{20}$$

$$\omega_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} p_j(t_j,x)e^{-\lambda t_j}\omega_m(t_j,z) = \varphi(x) - g_m(0,x) - \\ - \sum_{j=1}^{N} P_j(t_j,x)g_m(t_j,x)e^{-\lambda t_j} \equiv \Phi_m(x), \tag{21}$$

$$\omega_m\big|_\Gamma = 0. \tag{22}$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності [10], досить оцінити півнорму $\langle\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha}$. Із означення норми випливає існування в Q точок P_1, $H_i^{(1)}$, $H_i^{(2)}$, для яких є правильною одна з нерівностей

$$\mu\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le E_k(\omega_m), \qquad k\in\{1,2\}, \tag{23}$$

де

$$E_1(\omega_m) = \sum_{2j+|k|=r}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t^j\partial_x^k\omega_m(H_i^{(1)}) - \partial_t^j\partial_x^k\omega_m(P_1)\right| \times \\ \times R((2+\alpha)\gamma;\tilde H^{(1)})\prod_{m=1}^{n} d_1(-k_m\beta_m^{(1)},t^{(1)})d_2(-k_m\beta_m^{(2)},\tilde x_m)\times \\ \times d_1(-\alpha\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_2(-\alpha\beta_i^{(2)},\tilde x_i),$$

$$E_2(\omega_m) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{2j+|k|=r}\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left|\partial_t^j\partial_x^k\omega_m(H_i^{(1)}) - \partial_t^j\partial_x^k\omega_m(H_i^{(2)})\right| \times \\ \times R((2+\alpha)\gamma;\tilde H^{(2)})\prod_{m=1}^{n} d_1(-k_m\beta_m^{(1)},\tilde t)d_2(-k_m\beta_m^{(2)},\tilde x_m),$$

$$\mu \in \left(\frac{1+\lambda_0}{2},1\right].$$

Розглянемо випадок, коли

$$\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \le n^{-1}R(\gamma;\tilde H^{(1)})d_2(-\beta_i^{(2)},\tilde x_i)d_1(-\beta_i^{(1)},t^{(1)})\frac{r}{4} \equiv T_2,$$

$$\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \le R(2\gamma;\tilde H^{(2)})\frac{r^2}{16} \equiv T_1,$$

r − довільна стала, $r \in (0,1)$. Будемо вважати, що $\min\{R(\gamma;\tilde{H}^{(1)}), R(\gamma;\tilde{H}^{(2)})\} = R(\gamma;P_1)$, $|x^{(1)} - y| \ge 2T_2 n$ або $|x_n^{(1)} - y_n| \ge 2T_2$, $y \in \partial D$.

Запишемо задачу (20)−(22) у вигляді

$$(L_2 v_m)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]\omega_m =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} [a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega_m +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i}\omega_m + (a_0(P) - \lambda)\omega_m + F_m(P) \equiv$$

$$\equiv F_m(P) + F(\omega_m), \tag{24}$$

$$\omega_m(0,x) = -\sum_{j=1}^{N} p_j(t_j,x)\omega_m(t_j,x)e^{-\lambda t_j} + \Phi_m(x) \equiv \Phi_m(x) + \Phi(\omega_m),$$

$$\omega_m|_\Gamma = 0. \tag{25}$$

Нехай V_ρ − куб з центром в точці P_1, $V_\rho = \{(t,x) \in Q, |t - t^{(1)}| \le \rho^2 T_1$, $|x_i - x_i^{(1)}| \le \rho T_2$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$. Виконавши у задачі (24), (25) заміну $\omega_m(t,x) = W_m(t,z)$, $z_i = d(\beta_i;P_1)$, одержимо таку задачу:

$$(L_3 W_m)(t,z) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i;P_1)d(\beta_j;P_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right]W_m \equiv$$

$$\equiv F(W_m) + F_m(t,\tilde{z}),$$

$$W_m(0,Z) = \Phi_m(\tilde{z}) + \Phi_m(W_m),$$

$$W_m|_\Gamma = 0,$$

де $\tilde{z} = (z_1 d(-\beta_1;P_1),\ldots,d(-\beta_n;P_1))$.

Позначимо $z_i^{(1)} = d(\beta_i;P_1)x_i^{(1)}$, $H_\rho = \{(t,z); |t - t^{(1)}| \le \rho^2 T_1, |z_i - z_i^{(1)}| \le n^{-1}\rho\sqrt{T_1}$, $i \in \{1,\ldots,n\}\}$ і виберемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,z)$, яка задовольняє такі умови:

$$\eta(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in H_{1/4}, \quad 0 \le \eta(t,z) \le 1, \\ 0, & (t,z) \not\in H_{3/4}, \quad |\partial_t^j \partial_z^k \eta| \le c_{jk} R(-(2j+|k|)\gamma;P_1). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m^{(1)}(t,z) = w_m(t,z)\eta(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$(L_3 W_m^{(1)})(t,z) = w_m \partial_t \eta - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i,P_1)d(\beta_j,P_1)[\partial_{z_i} w_m \partial_{z_j}\eta +$$

$$+ \partial_{z_i}\eta \partial_{z_j} w_m + w_m \partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta] + \eta F(w_m) +$$

$$+ \eta F_m(t,\tilde{z}) \equiv F_m^{(1)}(t,z,w_m),$$

$$W_m^{(1)}(0,z) = \eta(0,z)[\Phi_m(\tilde{z}) + \Phi(w_m)] \equiv \Phi_m^{(1)}(z),$$

$$W_m^{(1)}|_\Gamma = 0. \tag{26}$$

На підставі теореми 5.3 із [5, с. 364] для розв'язку задачі (26) і довільних точок $(M_1, M_2) \subset H_{1/4}$ справджується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\left|\partial_t^j \partial_z^k w_m(M_1) - \partial_t^j \partial_z^k w_m(M_2)\right| \le$$

$$\le C\left(\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^{\alpha}(H_{3/4})} + \left\|\Phi_m^{(1)}\right\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4})}\right), \qquad 2j + |k| = 2\,, \tag{27}$$

де $d(M_1, M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, z)$, знаходимо

$$\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^{\alpha}(H_{3/4})} \le cR(-(2+\alpha)\gamma; P_1)\left(\left\|w_m; \gamma; 0; 0; H_{3/4}\right\|_2 + \left\|w_m; H_{3/4}\right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \left\|(F(w_m) + F_m); \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}\right\|_\alpha\right),$$

$$\left\|\Phi_m^{(1)}\right\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4})} \le cR(-(2+\alpha)\gamma; P_1)\left\|(\Phi(w_m) + \Phi_m); \gamma; 0; 0; H_{3/4}\right\|_{2+\alpha}. \tag{28}$$

Підставляючи (28) у (27) і повертаючись до змінних (t, x), отримуємо

$$E_\nu(\omega_m) \le c\left(\left\|F(\omega_m); \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}\right\|_\alpha + \left\|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}\right\|_\alpha + \right.$$

$$+ \left\|\omega_m; V_{3/4}\right\|_0 + \left\|\Phi_m(\omega_m); \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\right\|_{2+\alpha} +$$

$$\left. + \left\|\Phi_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\right\|_{2+\alpha} + \left\|\omega_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}\right\|_2\right). \tag{29}$$

Знайдемо оцінки виразів $F(\omega_m)$, $\Phi(\omega_m)$, F_m, Φ_m. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка. Наприклад,

$$\left\langle a_i \partial_{x_i} \omega_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}\right\rangle_\alpha \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \sup_{\{A_1, B_j^{(1)}, B_j^{(2)} \subset V_{3/4}\}} \left\{\left(\left|\partial_{x_i}\omega_m\right| R(\gamma; \tilde{A}_1) d(-\beta_i; \tilde{A}_1)\right) \times\right.$$

$$\times \left[\left(R((1+\alpha)\gamma; \tilde{A}) d(\beta_i; \tilde{A}) \left|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2} \left|a_i(A_1) - a_i(B_j^{(1)})\right|\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \left(R(\gamma; \tilde{A}) d((\gamma - \beta_j)\alpha; \tilde{B}^{(1)}) \left|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\right|^{-\alpha} \left|a_i(A_1) - a_i(B_j^{(1)})\right|\right)\right]\right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sup_{\{A_1, B_j^{(1)}, B_j^{(2)} \subset V_{3/4}\}} \left\{\left(|a_i| R(\gamma; \tilde{A}_1) d(\beta_i; \tilde{A}_1)\right) \times\right.$$

$$\times \left[\left(R(\gamma + \alpha; \tilde{A}) d(-\beta_i; \tilde{A}) \left|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}\right|^{-\alpha/2} \times\right.\right.$$

$$\left. \times \left|\partial_{x_i} w_m(B_j^{(1)}) - \partial_{x_j} w_m(B_j^{(2)})\right|\right) +$$

$$+ \left(R(\gamma; \tilde{A}) d((\gamma - \beta)\alpha; \tilde{B}^{(1)}) \left|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}\right|^{-\alpha} \times\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left|\partial_{x_i} w(A_1) - \partial_{x_i} w(B_j^{(1)})\right|\right)\right]\right\}.$$

Аналогічно одержуємо оцінки інших доданків виразів $F(\omega_m)$, $\Phi(\omega_m)$, F_m, Φ_m.

Отже, остаточно для F_m, $F(\omega_m)$, Φ_m, $\Phi(\omega_m)$ маємо такі оцінки:

$$\left\| F(\omega_m);\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4} \right\|_\alpha \le c\Big(\left\| \omega_m;V_{3/4} \right\|_0 +$$

$$+ (n^2r^2 + \varepsilon^\alpha + nr)\left\| \omega_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4} \right\|_{2+\alpha}\Big),$$

$$\left\| \Phi(\omega_m);\gamma;\beta;0;V_{3/4} \right\|_{2+\alpha} \le c\Big(\left\| \omega_m;V_{3/4} \right\|_0 + (\lambda + \varepsilon^\alpha)\left\| \omega_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4} \right\|_{2+\alpha}\Big),$$

$$\left\| F_m;\gamma;\beta;2\gamma;V_{3/4} \right\|_\alpha \le c\big(\| f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \| g_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\big),$$

$$\left\| \Phi_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4} \right\|_{2+\alpha} \le c\Big(\left\| \varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D \right\|_{2+\alpha} +$$

$$+ (\lambda_0 + \varepsilon^\alpha)C_1 \| g_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\Big). \qquad (30)$$

Підставляючи (30) у (29), одержимо

$$E_\nu(\omega_m) \le c\big(\| f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \| g_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + \left\| \varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D \right\|_{2+\alpha}\big) +$$

$$+ (\lambda_0 + \varepsilon^\alpha + nr^2 + (n+2)r) \times$$

$$\times \left\| \omega_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4} \right\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|\omega_m;Q\|_0. \qquad (31)$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x^{(1)} - y\right| \le 2T_2 n$ і $\left|x_n^{(1)} - y_n\right| \le 2T_2$, $y \in \partial D$. Нехай $\mathcal{K}_{R_1}(P)$ − куля радіуса R_1, $R_1 \ge 4T_2 n$, з центром у деякій точці $P \in \partial D$, яка містить точки P_1, $H_i^{(1)}$, $H_i^{(2)}$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D \bigcap \mathcal{K}_{R_1}(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi_1(\xi)$ із [12, с. 126]. Внаслідок такого перетворення область $D \bigcap \mathcal{K}_{R_1}(P)$ переходить в область Π, для точок якої $\xi_n \ge 0$. Приймемо, що при цьому перетворенні $\omega_m(t,x)$, $p_j(t_j,x)$, F_m, Φ_m, F, Φ, P_1 переходять відповідно в $\omega_m(t,\xi)$, $p_j^{(1)}(t_j,\xi)$, $F_m^{(1)}$, $\Phi_m^{(1)}$, F_1, Φ_1, N_1. Позначимо коефіцієнти диференціального виразу L_2 в області Π через $a_{ij}^{(1)}(t,\xi)$. Тоді $\omega_m^{(1)}(t,\xi)$ буде розв'язком задачі

$$(L_4\omega_m^{(1)})(t,\xi) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j,i=1}^{n} a_{ij}^{(1)}(N_1)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\right]\omega_m^{(1)} = F_m^{(1)}(\tau,\xi) + F_1(\omega_m^{(1)}),$$

$$\omega_m^{(1)}(0,\xi) = \Phi_m^{(1)}(\xi) + \Phi_1(\omega_m^{(1)}),$$

$$\omega_m^{(1)}\Big|_{\xi_n=0} = 0.$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінки розв'язку задачі (23)−(25), і використовуючи при цьому теорему 5.3 із [5, с. 364], одержимо оцінку (31).

Якщо $\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \ge T_2$, то використовуючи інтерполяційні нерівності, отримуємо

$$E_1(\omega_m) \le \varepsilon^\alpha \|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|\omega_m;Q\|_\alpha. \qquad (32)$$

У випадку, коли $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \ge T_1$, маємо

$$E_2(\omega_m) \le \varepsilon^\alpha \|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|\omega_m;Q\|_\alpha. \qquad (33)$$

Скориставшись нерівностями (23), (31)−(33), вибравши r та ε достатньо малими та врахувавши заміну (19), оцінку (16) і умови теореми 1, отримаємо оцінку (18). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Права частина нерівності (18) не залежить від m, тому послідовності

$$\{W_{m,0}\} \equiv \{u_m\}, \qquad \{W_{m,1}\} \equiv \{R(\gamma;P)d(-\beta_i;P)\partial_{x_i}u_m(P)\},$$

$$\{W_{m,2}\} \equiv \{R(2\gamma;P)\partial_t u_m(P)\},$$

$$\{W_{m,3}\} \equiv \{R(2\gamma;O)d(-\beta_i;P)d(-\beta_j;P)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(P)\}$$

рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в Q. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{W_{m_j,\nu}\}$, рівномірно збіжні в $\bar{Q}$ до $\{W^{(\nu)}\}$, $\nu \in \{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m_j \to \infty$ в задачі (7)–(9), одержимо, що $u(t,x) = W^{(0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3) і $u \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді для розв'язку задачі* (7), (8), (10) *є правильною оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le \left(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \right.$$

$$\left. + \|\psi;\gamma;\beta;\delta;Q\|_{1+\alpha}\right). \tag{34}$$

Д о в е д е н н я. Оцінку (34) встановлюємо за схемою доведення нерівності (18). Покажемо найбільш важливі моменти. Спочатку знайдемо оцінку розв'язку задачі (12), (13), (15).

Для знаходження оцінок виразів $E_\nu(v_m)$ у випадку $\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \le T_2$, $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \le T_1$, $\left|x^{(1)} - y\right| \le 2T_2 n$ і $\left|x_n^{(1)} - y_n\right| \le 2T_2$, $y \in \partial D$, запишемо задачу (12), (13), (15) у вигляді

$$(L_2 v_m)(t,x) = F_m(P) + F(v_m),$$

$$v_m(0,x) = \Phi_m(x) + \Phi(v_m),$$

$$\mathcal{B}_2 v_m\big|_\Gamma = \left(\sum_{k=1}^n l_k(P_1)\partial_{x_k}v_m\right)\Bigg|_\Gamma \ge \left[\sum_{k=1}^n (l_k(P_1) - l_k(P))\partial_{x_k}v_m - \right.$$

$$\left. - l_0(P)v_m + \psi_m e^{\lambda t}\right]\Bigg|_\Gamma \equiv \psi_m^{(1)}(t,x,v_m)\big|_\Gamma,$$

$$v_m\big|_\Gamma \ge 0, \qquad [v_m(\mathcal{B}_2 v_m - \psi_m^{(1)})(t,x)]\big|_\Gamma = 0.$$

Нехай $x = \psi_1(\xi)$ – взаємно однозначне перетворення, яке переводить область $Q \cap \mathcal{K}_{R_1}(P)$ в область Π. Позначимо коефіцієнти диференціальних виразів L_2 і $\mathcal{B}_2$ в області Π через $a_{ij}^{(1)}(t,\xi)$, $l_k^{(1)}(t,\xi)$. Вважаємо, що $v_m(t,x)$, $p_j(t_j,x)$, $\psi_m^{(1)}$, F_m, Φ_m, F, Φ, P_1, $d(\beta;P_1)$, $R(\gamma;P)$ при цьому перетворенні переходять у $v_m^{(1)}(t,\xi)$, $p_j^{(1)}(t_j,\xi)$, $\psi_m^{(2)}$, $F_m^{(1)}$, $\Phi_m^{(1)}$, F_1, Φ_1, N_1, $\tilde{d}(\beta;N_1)$, $\tilde{R}(\gamma;N)$. Тоді $v_m^{(1)}$ буде розв'язком задачі

$$(L_4 v_m^{(1)})(t,\xi) = F_m^{(1)}(\tau,\xi) + F_1(v_m^{(1)}), \tag{35}$$

$$v_m^{(1)}(0,\xi) = \Phi_m^{(1)}(\xi) + \Phi_1(v_m^{(1)}), \tag{36}$$

$$\mathcal{B}_3 v_m^{(1)}\big|_{\xi_n=0} = \sum_{k=1}^n l_k^{(1)}(N_1)\partial_{\xi_k}v_m^{(1)}\Bigg|_{\xi_n=0} \ge \psi_m^{(2)}(t,\xi,v_m^{(1)})\big|_{\xi_n=0},$$

$$v_m^{(1)}\big|_{\xi_n=0} \ge 0, \qquad [v_m^{(1)}(\mathcal{B}_3 v_m^{(1)} - \psi_m^{(2)})(t,\xi)]\big|_{\xi_n=0} = 0. \tag{37}$$

Можливі два випадки: ***I***) в області Π існують точки, в яких виконується умова

$$(\mathcal{B}_3 v_m^{(1)} - \psi_m^{(2)})(t,\xi)\Big|_{\xi_n=1} = 0\,, \tag{38}$$

II) таких точок в області Π не існує, тоді з крайової умови (37) маємо, що

$$v_m^{(1)}\Big|_{\xi_n=0} = 0\,. \tag{39}$$

У випадку ***I*** досліджуємо задачу (35), (36), (38). Виконавши у задачі (35), (36), (38) заміну $v_m^{(1)}(t,\xi) = v_m^{(2)}(t,z)$, $z_i = \tilde d(\beta_i; N_1)\xi_i$, одержимо

$$(L_5 v_m^{(2)})(t,z) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}(N_1)\tilde d(\beta_i; N_1)\tilde d(\beta_j; N_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right] v_m^{(2)} =$$

$$= F_m^{(1)}(t,z) + F_1(v_m^{(2)})\,, \tag{40}$$

$$v_m^{(2)}(0,z) = \Phi_m^{(1)}(z) + \Phi_1(v_m^{(2)})\,, \tag{41}$$

$$\mathcal{B}_4 v_m^{(2)}\Big|_{z_n=0} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(1)}(N_1)\tilde d(\beta_k; N_1)\partial_{z_k} v_m^{(2)}\Bigg|_{z_n=0} \ge \psi_m^{(2)}(t,z,v_m^{(2)})\Big|_{z_n=0}. \tag{42}$$

Коефіцієнти рівняння (40) і крайової умови (42), згідно із зробленими обмеженнями, не залежать від точки N_1. Позначимо $z_i^{(1)} = \tilde d(\beta_i; N_1)\xi^{(1)}$, $\Pi_\rho =$
$= \left\{(t,z); \left|t - t^{(1)}\right| \le \rho^2 \frac{r^2}{16}\tilde R(2\gamma; N_1), \left|z_i - z_i^{(1)}\right| \le \rho\frac{r}{4}\tilde R(\gamma; N_1)\tilde d(-\beta_i; N_1), i \in \{1,2,\dots,n\}\right\}$
і виберемо тричі диференційовну функцію $\eta_1(t,z)$, яка задовольняє такі умови:

$$\eta_1(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z)\in \Pi_{1/4}, \quad 0 \le \eta_1(t,z) \le 1, \\ 0, & (t,z) \not\in \Pi_{3/4}, \quad \left|\partial_t^j \partial_z^k \eta_1\right| \le c_{jk}\tilde R(-(2j+|k|)\gamma; N_1). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m^{(2)}(t,z) = v_m^{(2)}(t,z)\eta_1(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$(L_5 W_m^{(2)})(t,z) = v_m^{(2)}\partial_t \eta_1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}(N_1)\tilde d(\beta_i, N_1)\tilde d(\beta_j, N_1)[\partial_{z_i} v_m^{(2)} \partial_{z_j}\eta_1 +$$

$$+ \partial_{z_j} v_m^{(2)}\partial_{z_i}\eta_1 + v_m^{(2)}\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta_1] +$$

$$+ \eta_1 F_m^{(1)}(t,z) + \eta_1 F_1(v_m^{(2)}) \equiv F_2^{(1)}\,,$$

$$W_m^{(2)}(0,z) = \eta_1(0,z)[\Phi_m^{(1)}(z) + \Phi_1(v_m^{(2)})] \equiv \Phi_m^{(1)}\,,$$

$$\mathcal{B}_4 W_m^{(2)}\Big|_{z_n=0} =$$

$$= \left[\eta_1 \psi_m^{(2)}(t,z,v_m^{(2)}) - v_m^{(2)}\sum_{k=1}^{n} l_k^{(1)}(N_1)\tilde d(\beta_k, N_1)\partial_{z_k}\eta_1\right]\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_2^{(1)}. \tag{43}$$

На підставі теореми 5.3 із [5, с. 364] для розв'язку задачі (43) і довільних точок $\{M_1, M_2\} \subset \Pi_{1/4}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^j\partial_z^k v_m^{(2)}(M_1) - \partial_t^j\partial_z^k v_m^{(2)}(M_1)\right| \le C\Big(\left\|F_2^{(1)}\right\|_{C^\alpha(\Pi_{3/4})} +$$

$$+ \left\|\Phi_2^{(1)}\right\|_{C^{2+\alpha}(\Pi_{3/4})} + \left\|G_2^{(1)}\right\|_{C^{1+\alpha}(\Pi_{3/4})}\Big).$$

Враховуючи властивості функції $\eta_1(t,z)$ і умови теореми 2, одержимо

$$E_\nu(v_m) \le c\big(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\psi_m;\gamma;\beta;\delta;Q\|_{1+\alpha} + \|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} +$$

$$+ (\lambda_0 + \varepsilon^\alpha + nr^2 + (n+2)r)\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\|_{2+\alpha} +$$

$$+ c(\varepsilon)\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;Q\|_0\big).$$

У випадку ***II*** досліджуємо задачу (35), (36), (39).

Скориставшись методикою доведення теореми 5, маємо

$$E_\nu(v_m) \le c\big(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha}\big) + \big(\lambda_0 + \varepsilon^\alpha + nr^2 +$$

$$+ (n+2)r\big)\|v_m;\gamma;\beta;0;V_{3/4}\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;Q\|_0\big).$$

Аналогічно, використовуючи методику доведення теореми 5, одержуємо оцінки величин $E_\nu(v_m)$ і у випадку $|x_n^{(1)} - y_n| \ge 2T_2$ або $|x^{(1)} - y| \ge 2T_2N$.

Об'єднавши всі випадки та врахувавши заміну (11) і нерівність (17), одержуємо оцінку (34). ♦

Зауваження 1. Доведення теореми 2 проводимо аналогічно до доведення теореми 1 з використанням оцінки (34).

Теорема 7. *Якщо* $f \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$ *і виконуються умови теореми* 1, *то єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою* $\mathcal{E}(t,x;Z)$:

$$u(t,x) = \int_Q \mathcal{E}_1(t,x;\tau,d\xi)f(\tau,\xi) + \int_{\partial D} \mathcal{E}_2(t,x;d\xi)\varphi(\xi) +$$

$$+ \int_\Gamma \mathcal{E}_3(t,x;d\tau,d_\xi S)g(\tau,\xi).$$

Д о в е д е н н я теореми 7 аналогічне до доведення теореми 6 із [11]. ♦

1. *Базалий Б. В., Краснощек Н. В.* Классическая разрешимость первой начально-краевой задачи для нелинейного сильно вырождающегося параболического уравнения // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 10. – С. 1299–1320.
   Те саме: *Bazalii B. V., Krasnoshchek N. V.* Classical solvability of the first initial boundary-value problem for a nonlinear strongly degenerate parabolic equation // Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, No. 10. – P. 1547–1573.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
3. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 739–740.
4. *Вабищевич П. Н.* Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 7. – С. 1193–1199.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., vol 23. – Providence, RI: AMS, 1968.
6. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
7. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. – 248 с.
8. *Мойсеев Е. И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 11. – С. 1565–1567.
   Те саме: *Moiseev E. I.* Solvability of a nonlocal boundary value problem // Differ. Equat. – 2001. – **37**, No. 11. – P. 1643–1646.

9. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
10. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
11. *Пукальський І. Д.* Нелокальна крайова задача з виродженням і задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 2. – С. 23–35.
    Те саме: *Pukalskyi I. D.* Nonlocal boundary-value problem with degeneration and optimal control problem for linear parabolic equations // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, No. 1. – P. 19–35.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
13. *Dziubański J.* Note on H^1 spaces related to degenerate Schrödinger operators // Illinois J. Math. – 2005. – **49**, No. 4. – P. 1271–1297.
14. *Lange H., Teismann H.* Controlability of the nonlinear Schrödinger equation in the vicinity of the ground state // Math. Meth. Appl. Sci. – 2007. – **30**, No. 13. – P. 1483–1505.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ОСОБЕННОСТЯМИ

В гельдеровых пространствах со степенным весом рассматриваются первая краевая задача и односторонняя краевая задача с нелокальным условием по часовой переменной для линейного дифференциального уравнения со степенными особенностями произвольного порядка на координатных плоскостях. Установлено интегральное представление и найдены оценки решений сформулированных задач в соответствующих пространствах.

NONLOCAL PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH FEATURES

The first boundary value problem and one-side boundary value problem with nonlocal condition by time variable for linear differential equation with degree features of an arbitrary degree in the coordinate planes are considered in Hölder spaces with degree weight. The integral representation and the estimates of solutions are established for such problems in the appropriate spaces.

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
04.05.12