УДК 517.946

А. М. Кузь, Б. Й. Пташник

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В області, яка є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і простору $\mathbb{R}^3$, досліджено задачу з інтегральними умовами за часовою координатою для системи рівнянь динамічної теорії пружності у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Вступ. Математичне моделювання багатьох фізичних явищ та біологічних процесів призводить до задач із нелокальними (у тому числі – інтегральними) умовами для рівнянь із частинними похідними. Інтегральні умови виникають у випадках, коли межа області є недоступною для проведення вимірювань або неможливо безпосередньо обчислити певні фізичні величини, однак відомі їхні усереднені значення. Дослідженню задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними присвячено багато робіт (див. [5, 6, 9, 11, 22] та бібліографію там), однак для систем таких рівнянь ці задачі досліджені мало.

Для еволюційних рівнянь задачі з інтегральними умовами за часовою змінною, взагалі, є некоректними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників. Для однозначної розв'язності таких задач на шуканий розв'язок накладають певні додаткові умови за просторовими координатами, зокрема умови періодичності чи майже періодичності.

У роботах [16–20] у p-вимірному шарі досліджено задачу з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь із частинними похідними першого порядку. Отримано критерій коректної розв'язності задачі у класах функцій скінченної гладкості зі степеневим зростанням за просторовими змінними, а також вивчено вплив параметрів задачі на властивості розв'язку.

У працях [8, 10] встановлено коректність задач із інтегральними умовами за виділеною змінною у вигляді послідовних моментів від шуканої функції та умовами 2π-періодичності за іншими координатами для безтипної системи рівнянь із частинними похідними n-го порядку зі сталими коефіцієнтами для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа на $\mathbb{R}$) верхніх меж інтегрування та для лінійної системи еволюційних рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) значень параметра відхилення.

У [3] встановлено коректність задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для безтипної системи рівнянь із частинними похідними зі змінними за часом коефіцієнтами високого порядку.

У [24, 27] розглядалися задачі з інтегральними умовами для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а у [26] – для системи диференціальних рівнянь з дробовими похідними.

У цій роботі вивчається задача знаходження майже періодичного [1, 23] за просторовими координатами розв'язку системи рівнянь динамічної теорії пружності [12, с. 175] із загальними умовами за часовою змінною, частковими випадками яких є інтегральні умови у вигляді довільних моментів від шуканої функції, а також умови Діріхле. Задача Діріхле для такої системи рівнянь у класах функцій, 2π-періодичних за просторовими змінними, вивчалась у [2]. Зауважимо також, що для одновимірної системи рівнянь динамічної теорії пружності у смузі в роботі [4] вивчалась задача Коші, а у [13] – задача Діріхле.

1. Постановка задачі. В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^4 : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^3\}$ розглядаємо задачу про знаходження майже періодичного за змінними x_1, x_2, x_3 розв'язку системи диференціальних рівнянь, яка описує напружений стан ізотропного однорідного пружного тіла у переміщеннях (система Ляме) та має вигляд

$$L(\partial_t^2, \partial_x)\mathbf{u}(t,x) := \sigma\partial_t^2\mathbf{u}(t,x) = \mu^*\Delta\mathbf{u}(t,x) + (\lambda^* + \mu^*)\partial_x'\partial_x\mathbf{u}(t,x)\,,$$

$$(t,x) \in D\,, \tag{1}$$

з такими умовами за часовою координатою:

$$U_j[u] := \alpha_j\mathbf{u}(t_j,x) + \beta_j\int_0^T t^{r_j}\mathbf{u}(t,x)\,dt = \boldsymbol{\varphi}_j(x), \quad j \in \{1,2\}, \quad x \in \mathbb{R}^3\,. \tag{2}$$

Тут $\mathbf{u} := \mathbf{u}(t,x) = \operatorname{col}(u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ − вектор переміщень; t − час; $\lambda^* > 0$, $\mu^* > 0$ − коефіцієнти Ляме; $\sigma > 0$ − густина середовища,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \qquad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

$$\partial_x' = \operatorname{col}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

$t_1 = 0$, $t_2 = T$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $j \in \{1,2\}$; $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_+$, $r_1 < r_2$; вектор-функції $\boldsymbol{\varphi}_j(x) = \operatorname{col}(\boldsymbol{\varphi}_{j1}(x), \boldsymbol{\varphi}_{j2}(x), \boldsymbol{\varphi}_{j3}(x))$, $j \in \{1,2\}$, є майже періодичними за x із заданим спектром

$$M := \{\mu_k = (\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \mu_{k_3}) \in \mathbb{R}^3 : \mu_{-k} = -\mu_k,\ \mu_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}\,,$$

$$d_1|k|^{\theta_1} \le |\mu_k| \le d_2|k|^{\theta_2}\,,\ 0 < d_1 \le d_2,\ 0 < \theta_1 \le \theta_2,\ k \in \mathbb{Z}^3\}\,,$$

$$|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + |\mu_{k_2}| + |\mu_{k_3}|\,,$$

і розвиваються у векторні ряди Фур'є

$$\boldsymbol{\varphi}_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\boldsymbol{\varphi}_{jk}\exp(i\mu_k, x)\,,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{jk} = \operatorname{col}(\varphi_{j1,k}, \varphi_{j2,k}, \varphi_{j3,k}), \qquad j \in \{1,2\}\,, \tag{3}$$

де

$$\boldsymbol{\varphi}_{jk} = \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^3}\int_{[0,H]^3}\boldsymbol{\varphi}_j(x)\exp(-i\mu_k, x)\,dx\,,$$

$$(\mu_k, x) = \mu_{k_1}x_1 + \mu_{k_2}x_2 + \mu_{k_3}x_3\,.$$

Характеристичне рівняння, яке відповідає системі (1):

$$\det\left\|(\sigma\gamma^2 - \mu^*\|\eta\|^2)\mathbf{I}_3 - (\lambda^* + \mu^*)\|\eta_j\eta_\ell\|_{j,\ell=1}^3\right\| = 0\,,$$

де $\mathbf{I}_3$ − одинична матриця розміру 3×3, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\|\eta\|^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$, може бути записане у такій формі:

$$\sigma^3\gamma^6 - \sigma^2(\lambda^* + 4\mu^*)\|\eta\|^2\gamma^4 + \sigma\mu^*(2\lambda^* + 5\mu^*)\|\eta\|^4\gamma^2 -$$

$$-(\lambda^* + 2\mu^*)(\mu^*)^2\|\eta\|^6 = 0\,. \tag{4}$$

При цьому γ -корені рівняння (4) визначаються формулами

$$\gamma_1(\eta) = \gamma_2(\eta) = \|\eta\| \sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}}, \qquad \gamma_3(\eta) = \|\eta\| \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma}},$$

$$\gamma_4(\eta) = \gamma_5(\eta) = -\|\eta\| \sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}}, \qquad \gamma_6(\eta) = -\|\eta\| \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma}}. \tag{5}$$

Із (5) видно, що система (1) є гіперболічною за Петровським у широкому сенсі.

Надалі будемо використовувати такі очевидні нерівності:

$$\forall \mu_k \in M \qquad \|\mu_k\| \le |\mu_k| \le \sqrt{3}\,\|\mu_k\|, \qquad \|\mu_k\| = \sqrt{\mu_{k_1}^2 + \mu_{k_2}^2 + \mu_{k_3}^2}. \tag{6}$$

2. Єдиність розв'язку задачі. Майже періодичний за x зі спектром M розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$\mathbf{u}(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \mathbf{u}_k(t) \exp(i\mu_k, x),$$

$$\mathbf{u}_k(t) = \mathrm{col}\,(u_{1k}(t), u_{2k}(t), u_{3k}(t)), \qquad \mu_k \in M. \tag{7}$$

Підставивши ряди (3), (7) у систему (1) та умови (2), для знаходження кожної з вектор-функцій $\mathbf{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^3$, отримуємо таку задачу:

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, i\mu_k\right)\mathbf{u}_k(t) := \Bigg(\left(\sigma \frac{d^2}{dt^2} + \mu^* \|\mu_k\|^2\right)\mathbf{I}_3 +$$

$$+ (\lambda^* + \mu^*)\left\|\mu_{k_j}\mu_{k_\ell}\right\|_{j,\ell=1}^{3}\Bigg)\mathbf{u}_k(t) = \mathbf{0}, \tag{8}$$

$$U_j[\mathbf{u}_k] := \alpha_j \mathbf{u}_k(t_j) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} \mathbf{u}_k(t)\,dt = \boldsymbol{\varphi}_{jk}, \qquad j \in \{1,2\}. \tag{9}$$

При $k = \mathbf{0}$ $(\mu_{\mathbf{0}} = \mathbf{0})$ система (8) має вигляд

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, \mathbf{0}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t) := \sigma \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{I}_3 \mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t) = \mathbf{0},$$

а кожна компонента $u_{q,\mathbf{0}}(t)$, $q \in \{1,2,3\}$, розв'язку $\mathbf{u}_{\mathbf{0}}(t) = \mathrm{col}\,(u_{1,\mathbf{0}}(t), u_{2,\mathbf{0}}(t), u_{3,\mathbf{0}}(t))$ задачі (8), (9) є розв'язком такої відповідної задачі для скалярного рівняння:

$$\frac{d^2}{dt^2} u_{q,\mathbf{0}}(t) = 0, \tag{10}$$

$$U_j[u_{q,\mathbf{0}}] := \alpha_j u_{q,\mathbf{0}}(t_j) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u_{q,\mathbf{0}}(t)\,dt = \varphi_{jq,\mathbf{0}}, \qquad j \in \{1,2\}. \tag{11}$$

Характеристичний визначник задачі (10), (11) має вигляд

$$\Delta(\mathbf{0},T) := \begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \dfrac{T^{r_1+1}}{r_1+1} & \beta_1 \dfrac{T^{r_1+2}}{r_1+2} \\ \alpha_2 + \beta_2 \dfrac{T^{r_2+1}}{r_2+1} & \alpha_2 T + \beta_2 \dfrac{T^{r_2+2}}{r_2+2} \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2 T + \alpha_1\beta_2 \frac{T^{r_2+2}}{r_2+2} +$$

$$+ \frac{\alpha_2\beta_1 T^{r_1+1}}{(r_1+1)(r_1+2)} + \frac{\beta_1\beta_2(r_2 - r_1)T^{r_2+r_1+3}}{(r_1+1)(r_1+2)(r_2+1)(r_2+2)}.$$

За умови $\Delta(\mathbf{0},T)\neq 0$ завжди існує єдиний розв'язок задачі (10), (11) для кожного $q\in\{1,2,3\}$. Ці розв'язки зображаються формулами

$$u_{q,\mathbf{0}}(t)=\sum_{\ell,j=1}^{2}\frac{\Delta_{\ell j}(\mathbf{0},T)}{\Delta(\mathbf{0},T)}\varphi_{\ell q,\mathbf{0}}t^{j-1},\qquad q\in\{1,2,3\}, \tag{12}$$

де $\Delta_{\ell j}(\mathbf{0},T)$ − алгебричне доповнення елемента ℓ-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta(\mathbf{0},T)$.

Тепер розглянемо задачу (8), (9) для всіх $\mu_k\in M\setminus\{\mathbf{0}\}$. Характеристичне рівняння, яке відповідає системі (8), має вигляд

$$\sigma^3\gamma^6+\sigma^2(\lambda^*+4\mu^*)\|\mu_k\|^2\gamma^4+\sigma\mu^*(2\lambda^*+5\mu^*)\|\mu_k\|^4\gamma^2+$$

$$+(\lambda^*+2\mu^*)(\mu^*)^2\|\mu_k\|^6=0,$$

а його γ-корені зображаються формулами

$$\gamma_{1k}=\gamma_{2k}=i\|\mu_k\|\sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}},\qquad \gamma_{3k}=i\|\mu_k\|\sqrt{\frac{\lambda^*+2\mu^*}{\sigma}},$$

$$\gamma_{4k}=\gamma_{5k}=-i\|\mu_k\|\sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}},\qquad \gamma_{6k}=-i\|\mu_k\|\sqrt{\frac{\lambda^*+2\mu^*}{\sigma}}. \tag{13}$$

Для коренів (13) з урахуванням (6) справджуються такі оцінки:

$$|\gamma_{jk}|\le C_1(1+|\mu_k|),\qquad C_1=\sqrt{(\lambda^*+2\mu^*)/\sigma},\qquad j\in\{1,\dots,6\}. \tag{14}$$

Надалі через C_ν, $\nu=1,2,\dots$, позначатимемо сталі величини, що не залежать від k та μ_k.

Фундаментальна система розв'язків системи (8) має такий вигляд (див. [2]):

$$\{\mathbf{u}_{jk}(t)=\mathbf{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t),\ \mathbf{u}_{3+j,k}(t)=\mathbf{h}_{jk}\exp(-i\gamma_{jk}t),\quad j\in\{1,2,3\}\},$$

$$k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{\mathbf{0}\},$$

де вектор $\mathbf{h}_{jk}$, $j\in\{1,2,3\}$, − деякий ненульовий розв'язок системи алгебричних рівнянь

$$L(\gamma_{jk}^2,i\mu_k)\mathbf{h}=0,\qquad \mathbf{h}=\mathrm{col}(h_1,h_2,h_3).$$

Припустимо, що множина $M\setminus\{\mathbf{0}\}$ є такою, що $\mu_{k_j}\neq 0$, $k_j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, для деякого $j\in\{1,2,3\}$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $\mu_{k_3}\neq 0$, $k_3\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Тоді вектори $\mathbf{h}_{jk}$, $j\in\{1,2,3\}$, можемо вибрати так:

$$\mathbf{h}_{1k}=\mathrm{col}\left(\frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|},0,-\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}\right),\qquad \mathbf{h}_{2k}=\mathrm{col}\left(0,\frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|},-\frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}\right),$$

$$\mathbf{h}_{3k}=\mathrm{col}\left(\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|},\frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|},\frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}\right). \tag{15}$$

Загальний розв'язок системи (8) має вигляд

$$\mathbf{u}_k(t)=\sum_{j=1}^{3}(C_{jk}\mathbf{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t)+C_{3+j,k}\mathbf{h}_{jk}\exp(-\gamma_{jk}t)),\qquad k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{\mathbf{0}\},$$

де сталі C_{jk}, $j\in\{1,\dots,6\}$, визначаємо із системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{3}(C_{jk}\mathbf{h}_{jk}g_{1j}^{1}(0,\mu_k)+C_{3+j,k}\mathbf{h}_{jk}g_{1j}^{2}(0,\mu_k))=\boldsymbol{\varphi}_{1k}\,,$$

$$\sum_{j=1}^{3}(C_{jk}\mathbf{h}_{jk}g_{2j}^{1}(T,\mu_k)+C_{3+j,k}\mathbf{h}_{jk}g_{2j}^{2}(-T,\mu_k))=\boldsymbol{\varphi}_{2k}\,. \tag{16}$$

Тут

$$g_{qj}^{\ell}(t,\mu_k)=\alpha_q\exp(\gamma_{jk}t)+\beta_q I_{q\ell}(\gamma_{jk}),\qquad j=\{1,2,3\},\qquad q,\ell=\{1,2\}\,,$$

$$I_{q\ell}(z)=\int_0^T t^{r_q}\exp((-1)^{\ell+1}zt)\,dt=Q_{q\ell}(z,T)\exp((-1)^{\ell+1}zT)-Q_{q\ell}(z,0)\,, \tag{17}$$

$$Q_{q\ell}(z,t)=\sum_{n=1}^{r_q+1}\frac{(-1)^{\ell(n+1)}r_q!}{(r_q-n+1)!}\frac{t^{r_q-n+1}}{z^n},\qquad q,\ell=1,2\,. \tag{18}$$

Визначник $\Delta(\mu_k,T)$, $\mu_k\in M\setminus\{\mathbf{0}\}$, системи (16) співпадає з характеристичним визначником задачі (8), (9) і має такий вигляд:

$$\Delta(\mu_k,T)=|\mathcal{M}_1 \;\vdots\; \mathcal{M}_2|\,,$$

де

$$\mathcal{M}_1=\begin{vmatrix}\frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{11}^1(0,\mu_k) & 0 & \frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}g_{13}^1(0,\mu_k)\\ 0 & \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{12}^1(0,\mu_k) & \frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}g_{13}^1(0,\mu_k)\\ -\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}g_{11}^1(0,\mu_k) & -\frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}g_{12}^1(0,\mu_k) & \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{13}^1(0,\mu_k)\\ \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{21}^1(T,\mu_k) & 0 & \frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}g_{23}^1(T,\mu_k)\\ 0 & \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{22}^1(T,\mu_k) & \frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}g_{23}^1(T,\mu_k)\\ -\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}g_{21}^1(T,\mu_k) & -\frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}g_{22}^1(T,\mu_k) & \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{23}^1(T,\mu_k)\end{vmatrix},$$

$$\mathcal{M}_2=\begin{vmatrix}\frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{11}^2(0,\mu_k) & 0 & \frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}g_{13}^2(0,\mu_k)\\ 0 & \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{12}^2(0,\mu_k) & \frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}g_{13}^2(0,\mu_k)\\ -\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}g_{11}^2(0,\mu_k) & -\frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}g_{12}^2(0,\mu_k) & \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{13}^2(0,\mu_k)\\ \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{21}^2(-T,\mu_k) & 0 & \frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}g_{23}^2(-T,\mu_k)\\ 0 & \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{22}^2(-T,\mu_k) & \frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}g_{23}^2(-T,\mu_k)\\ -\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}g_{21}^2(-T,\mu_k) & -\frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}g_{22}^2(-T,\mu_k) & \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}g_{23}^2(-T,\mu_k)\end{vmatrix}.$$

Задача (8), (9) не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ [15].

При дослідженні розв'язності задачі (1), (2) використовуватимемо такі функціональні простори:

$H_B^\alpha := H_B^\alpha(M; \mathbb{R}^3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів вигляду $v(x) = = \sum_{|k| \le N} v_k \exp(i\mu_k, x)$, $\mu_k \in M$, за нормою [21]

$$\left\| v; H_B^\alpha \right\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} |v_k|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2};$$

$C^q([0,T], H_B^\alpha)$ – простір функцій $u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} u_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $\mu_k \in M$, $u_k(t) \in C^q([0,T])$, таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $d^j u(t,\cdot)/dt^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} u_k^{(j)}(t) \exp(i\mu_k, x)$, $j \in \{0,1,\ldots,q\}$, належать простору H_B^α і є неперервними за t у нормі цього простору

$$\left\| u; C^q([0,T], H_B^\alpha) \right\| = \sum_{j=1}^{q} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}; H_B^\alpha \right\|;$$

$\bar{H}_{B,3}^\alpha$ – простір вектор-функцій $\mathbf{v}(x) = \operatorname{col}(v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ таких, що $v_j(x) \in H_B^\alpha$, $j \in \{1,2,3\}$, з нормою

$$\left\| \mathbf{v}; \bar{H}_{B,3}^\alpha \right\| = \sum_{j=1}^{3} \left\| v_j; H_B^\alpha \right\|;$$

$\bar{C}^q([0,T], H_B^\alpha)$ – простір вектор-функцій $\mathbf{u}(t,x) = \operatorname{col}(u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ таких, що $u_j(t,x) \in C^q([0,T], H_B^\alpha)$, $j \in \{1,2,3\}$, з нормою

$$\left\| \mathbf{u}; \bar{C}^q([0,T], H_B^\alpha) \right\| = \sum_{j=1}^{3} \left\| u_j; C^q([0,T], H_B^\alpha) \right\|;$$

$\bar{C}_{B,3}^n(\bar{D})$ – простір вектор-функцій $\mathbf{u}(t,x)$, які є n раз неперервно диференційовними в області $\bar{D}$ за всіма змінними і майже періодичними за x рівномірно по $t \in [0,T]$, з нормою

$$\left\| \mathbf{u}; \bar{C}_{B,3}^n(\bar{D}) \right\| = \sum_{j=1}^{3} \sum_{0 \le |s| \le n} \max_{t \in [0,T]} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial^{|s|} u_j(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \partial x_3^{s_3}} \right|;$$

$C_{B,3}^n(\mathbb{R}^3)$ – підпростір вектор-функцій із $C_{B,3}^n(\bar{D})$, які не залежать від t.

Якщо $\alpha > 3/(2\theta_1)$, то справджуються такі вкладення (див. [25] і бібліографію там):

$$\bar{H}_{B,3}^{q+\alpha} \subset \bar{C}_{B,3}^q(\mathbb{R}^3), \qquad \bar{C}^q([0,T], H_B^{q+\alpha}) \subset C_{B,3}^q(\bar{D}), \qquad q \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{19}$$

Теорема 1. *Для того щоб задача* (1), (2) *мала не більше одного майже періодичного за* x *зі спектром* M *розв'язку у шкалі просторів* $\bar{C}^2([0,T], H_B^\alpha)$, *необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in M \qquad \Delta(\mu_k, T) \neq 0. \tag{20}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 1 з [5]. ♦

Зауваження 1. Якщо в умовах (2) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то

$$\Delta(\mathbf{0}, T) = \alpha_1 \alpha_2 T,$$

$$\Delta(\mu_k, T) = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\mu_{k_3}^2}{\|\mu_k\|^2} (\exp(-\gamma_{1k} T) - \exp(\gamma_{1k} T))^2 \times$$

$$\times (\exp(-\gamma_{3k} T) - \exp(\gamma_{3k} T)), \quad \mu_k \in M \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Тоді умова (20) справджується, якщо для довільного $\mu_k \in M \setminus \{\mathbf{0}\}$ рівняння

$$\frac{\mu^*}{\sigma} T^2 \|\mu_k\|^2 - (\pi m_1)^2 \neq 0, \qquad \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma} T^2 \|\mu_k\|^2 - (\pi m_2)^2 \neq 0$$

не мають розв'язків у цілих числах m_1, m_2.

3. Існування розв'язку задачі. Надалі будемо вважати, що виконується умова (20). Тоді для кожного $\mu_k \in M$ існує єдиний розв'язок $\mathbf{u}_k(t)$ задачі (8), (9), а формальний розв'язок $\mathbf{u}(t,x)$ задачі (1), (2) зображається рядом

$$\mathbf{u}(t,x) = u_{\mathbf{0}}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(\sum_{j=1}^{3} (C_{jk} \mathbf{h}_{jk} \exp(\gamma_{jk} t) + \right.$$

$$\left. + C_{3+j,k} \mathbf{h}_{jk} \exp(-\gamma_{jk} t)) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{21}$$

у якому вектори $\mathbf{h}_{jk}$, $j \in \{1,2,3\}$, визначені формулами (15), а

$$C_{qk} = \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\varphi_{1\ell,k} \Delta_{\ell q}(\mu_k, T) + \varphi_{2\ell,k} \Delta_{3+\ell,q}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)}, \qquad q \in \{1, \ldots, 6\}, \tag{22}$$

де $\Delta_{rq}(\mu_k, T)$ – алгебричне доповнення r-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$.

Ряд (21), взагалі кажучи, є розбіжним, оскільки вираз $|\Delta(\mu_k, T)|$, як відмінний від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in M$.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (20) *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in M$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geq (1 + |\mu_k|)^{-\eta}. \tag{23}$$

Якщо $\boldsymbol{\varphi}_j(x) \in \bar{H}_{B,3}^{\eta+\alpha+2}$, $j = 1,2$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $\bar{C}^2([0,T], H_B^\alpha)$, *який зображається формулою* (21) *і неперервно залежить від функцій* $\boldsymbol{\varphi}_j(x)$, $j = 1,2$.

Д о в е д е н н я. На підставі формули (21) отримуємо

$$\|\mathbf{u}; C^2([0,T], \bar{H}_B^\alpha)\| = \sum_{q=1}^{3} \sum_{m=0}^{2} \max_{t \in [0,T]} \left(\left| u_{q,\mathbf{0}}^{(m)}(t) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}} \left| u_{qk}^{(m)}(t) \right|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2} \leq \sum_{q=1}^{3} \sum_{m=0}^{2} \left(\max_{t \in [0,T]} \left| u_{q,\mathbf{0}}^{(m)}(t) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}} \max_{t \in [0,T]} \left| u_{qk}^{(m)}(t) \right|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2}, \tag{24}$$

де

$$u_{qk}(t)=\sum_{j=1}^{3}(C_{jk}h_{jq,k}\exp(\gamma_{jk}t)+C_{3+j,k}h_{jq,k}\exp(-\gamma_{jk}t)),$$

$$q\in\{1,2,3\},\qquad \mu_k\in M\setminus\{\mathbf{0}\},\qquad (25)$$

де $h_{jq,k}$ – компонента під номером q вектора $\mathbf{h}_{jk}$, а сталі C_{qk} визначені формулами (22).

З формули (12) випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_{q,\mathbf{0}}^{(m)}(t)\right|^2\le C_2\sum_{\ell=1}^{2}\left|\varphi_{\ell q,\mathbf{0}}\right|^2,\qquad q\in\{1,2,3\},$$

$$C_2=C_2(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,r_1,r_2,T).\qquad (26)$$

Із (15), (22), (25) отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_{qk}^{(m)}(t)\right|\le C_1\sum_{j=1}^{6}\sum_{\ell=1}^{3}\frac{|\varphi_{1\ell,k}||\Delta_{\ell j}(\mu_k,T)|+|\varphi_{2\ell,k}||\Delta_{3+\ell,j}(\mu_k,T)|}{|\Delta(\mu_k,T)|}\times$$

$$\times(1+|\mu_k|)^m,\qquad (27)$$

де $m\in\{0,1,2\}$.

Із формул (15), (17) і (18) випливає, що

$$\left|\Delta_{rq}(\mu_k,T)\right|\le C_3,\qquad r,q\in\{1,\ldots,6\},\qquad \mu_k\in M\setminus\{\mathbf{0}\},\qquad (28)$$

де

$$C_3=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|\}+\max\{|\beta_1|,|\beta_2|\}r_2!T^{r_2}.$$

Враховуючи (23), (27), (28), отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_{qk}^{(m)}(t)\right|\le 6C_1C_3\sum_{\ell=1}^{3}(|\varphi_{1\ell,k}|+|\varphi_{2\ell,k}|)(1+|\mu_k|)^{m+\eta},$$

$$q\in\{1,2,3\},\qquad m\in\{0,1,2\}.\qquad (29)$$

З нерівностей (24), (26) і (29) випливає така оцінка:

$$\left\|\mathbf{u};\bar{C}^2([0,T],H_B^\alpha)\right\|\le$$

$$\le 3\max\{C_2,6C_1C_3\}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{3}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}|\varphi_{j\ell,k}|^2(1+|\mu_k|)^{2(2+\eta+\alpha)}\right)^{1/2}=$$

$$=C_4\sum_{j=1}^{2}\left\|\boldsymbol{\varphi}_j;\bar{H}_{B,3}^{\eta+\alpha+2}\right\|.$$

З отриманої нерівності отримуємо доведення теореми. ♦

Зауваження 2. Якщо в теоремі 2 прийняти, що $\alpha>2+3/(2\theta_1)$, то згідно з (19) справджується вкладення $C^2([0,T],\bar{H}_B^\alpha)\subset C_{B,3}^2(\bar{D}^3)$, і тоді розв'язок задачі (1), (2) є класичним.

4. Метричні оцінки малих знаменників. Вияснимо можливість виконання нерівності (23), скориставшись методикою роботи [9]. Покажемо спочатку, що $\Delta(\mu_k,T)$, як функція змінної T, є квазімногочленом.

Введемо позначення: S_n – симетрична група всіх перестановок перших n натуральних чисел; ρ_ω – кількість інверсій у перестановці $\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in S_n$; $A=(\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)$; $B=(\beta_1,\beta_1,\beta_1,\beta_2,\beta_2,\beta_2)$; $R=$

$= (r_1, r_1, r_1, r_2, r_2, r_2)$; $\Im_6$ – множина всіх векторів $J = (j_1, \ldots, j_6)$, $j_q \in \{0,1\}$, $q \in \{1, \ldots, 6\}$; $\Gamma_k = (\gamma_{1k}, \gamma_{2k}, \gamma_{3k}, -\gamma_{1k}, -\gamma_{2k}, -\gamma_{3k})$; $A_q, B_q, R_q, \Gamma_{qk}$ – q-компоненти векторів A, B, R та Γ_k відповідно, $q \in \{1, \ldots, 6\}$; $\Gamma_{\omega,k} = (\Gamma_{i_1,k}, \ldots, \Gamma_{i_6,k})$, $\omega = (i_1, \ldots, i_6) \in S_6$; $V_q = (1, 1, 1, \exp(\Gamma_{qk}T), \exp(\Gamma_{qk}T), \exp(\Gamma_{qk}T))$, $q \in \{1, \ldots, 6\}$; $\mathbf{H}$ – матриця розміру 6×6, складена з векторів $\mathbf{h}_{jk}$, $j = 1, 2, 3$, таким чином:

$$H = \left\| H_{qj} \right\|_{q,j=1}^{6} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{1k} & \mathbf{h}_{2k} & \mathbf{h}_{3k} & \mathbf{h}_{1k} & \mathbf{h}_{2k} & \mathbf{h}_{3k} \\ \mathbf{h}_{1k} & \mathbf{h}_{2k} & \mathbf{h}_{3k} & \mathbf{h}_{1k} & \mathbf{h}_{2k} & \mathbf{h}_{3k} \end{pmatrix}.$$

Надалі знадобиться таке твердження.

Лема 2. *Для довільних* $x_q, y_q \in \mathbb{C}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, *справджується рівність*

$$\prod_{q=1}^{n} (x_q + y_q) = \sum_{j_1=0}^{1} \ldots \sum_{j_n=0}^{1} \prod_{q=1}^{n} x_q^{j_q} \prod_{s=1}^{n} y_s^{1-j_s}.$$

Д о в е д е н н я наведено в роботі [6]. ♦

Для кожного $\mu_k \in M \setminus \{\mathbf{0}\}$ визначник $\Delta(\mu_k, T)$ можна зобразити формулою [7]

$$\Delta(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_6} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{6} H_{i_q,q} (A_q V_{i_q,q} + B_q I(R_q, \Gamma_{i_q,k})), \tag{30}$$

де $V_{i_q,q}$ – q-компонента вектора V_{i_q}, а

$$I(R_q, \Gamma_{sk}) = \int_0^T t^{R_q} \exp(\Gamma_{sk} t)\, dt =$$

$$= Q_{R_q}(\Gamma_{sk}, T) \exp(\Gamma_{sk} T) - Q_{R_q}(\Gamma_{sk}, 0), \tag{31}$$

$$Q_{R_q}(\Gamma_{sk}, t) = \sum_{n=1}^{R_q+1} \frac{(-1)^{n+1} R_q\,!}{(R_q - n + 1)!} \frac{t^{R_q - n + 1}}{(\Gamma_{sk})^n}, \qquad q, s \in \{1, \ldots, 6\}. \tag{32}$$

На підставі (30)–(32) та леми 2 отримуємо

$$\Delta(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_6} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{6} H_{i_q,q} \left(\left[A_q V_{i_q,q} + B_q \frac{(-1)^{R_q+1} R_q\,!}{(\Gamma_{i_q,k})^{R_q+1}} \right] + \right.$$

$$\left. + B_q Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T) \exp(\Gamma_{i_q,k} T) \right) =$$

$$= \sum_{\omega \in S_6} (-1)^{\rho_\omega} \sum_{J \in \Im_6} \Delta_{1k}(\omega, J, T) \Delta_{2k}(\omega, J, T), \tag{33}$$

де

$$\Delta_{1k}(\omega, J, T) = \prod_{q=1}^{6} (B_q Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T) \exp(\Gamma_{i_q,k} T))^{j_q} =$$

$$= B(J) Q_J(\Gamma_{\omega,k}, T) \exp((J, \Gamma_{\omega,k}) T), \tag{34}$$

$$B(J)=\prod_{q=1}^{6}(B_q)^{j_q}, \qquad Q_J(\Gamma_{\omega,k},T) = \prod_{q=1}^{6}(Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k},T))^{j_q}, \tag{35}$$

$$(J,\Gamma_{\omega,k})=\sum_{q=1}^{6} j_q\Gamma_{i_q,k}, \qquad J\in\Im_6, \qquad \omega\in S_6, \tag{36}$$

$$\Delta_{2k}(\omega,J,T)=\prod_{s=1}^{6}(A_sV_{i_s,s}+B_s(-1)^{R_s+1}R_s!(\Gamma_{i_s,k})^{-(R_s+1)})^{1-j_s}. \tag{37}$$

Формулу (37) подамо у вигляді

$$\Delta_{2k}(\omega,J,T)=P_{1k}(\omega,J)\exp\left(\sum_{s=4}^{6}(1-j_s)\Gamma_{i_s,k}T\right)+P_{2k}(\omega,J), \tag{38}$$

де величини

$$P_{1k}(\omega,J):=\prod_{s=1}^{3}(A_s+B_s(-1)^{R_s+1}R_s!(\Gamma_{i_s,k})^{-(R_s+1)})^{1-j_s}\prod_{s=4}^{6}(A_s)^{1-j_s},$$

$$P_{2k}(\omega,J):=\prod_{s=1}^{3}(A_s+B_s(-1)^{R_s+1}R_s!(\Gamma_{i_s,k})^{-(R_s+1)})^{1-j_s}\times$$

$$\times\prod_{s=4}^{6}(B_s(-1)^{R_s+1}R_s!(\Gamma_{i_s,k})^{-(R_s+1)})^{1-j_s}$$

не залежать від T.

Із (33), враховуючи (34), (38), отримуємо таке зображення для $\Delta(\mu_k,T)$:

$$\Delta(\mu_k,T)=\sum_{\omega\in S_6}(-1)^{\rho_\omega}\sum_{J\in\Im_6}\bar{Q}_J(\Gamma_{k,\omega},T)\exp((J,\Gamma_{\omega,k})T), \tag{39}$$

де $\bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k},T)$, $J\in\Im_6$, – многочлен за змінною T із комплексними коефіцієнтами. При цьому для степеня многочлена $\bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k},T)$ маємо оцінку

$$\deg\bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k},T)\le\max_{J\in\Im_6}\{\deg Q_J(\Gamma_{\omega,k},T)\}=\sum_{q=1}^{6}\deg Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k},T)=$$

$$=\sum_{q=1}^{6}R_q=3(r_1+r_2), \qquad \omega\in S_6, \qquad J\in\Im_6. \tag{40}$$

З (39) випливає, що $\Delta(\mu_k,T)$ є квазімногочленом за змінною T. Для встановлення оцінки (40) використано формули (18), (32), (35).

Для кожного $\mu_k\in M\setminus\{\mathbf{0}\}$ розглянемо функцію $\Delta(\mu_k,\tau)$, визначену на інтервалі $(0,\infty)$ формулою (39), у якій T замінено на τ. На підставі формули (39) і нерівностей (40) $\Delta(\mu_k,\tau)$ можна зобразити у вигляді

$$\Delta(\mu_k,\tau)=\sum_{J\in\Im_6}F_J(\tau)\exp((J,\Gamma_k)\tau), \tag{41}$$

де $F_J(\tau)$ – многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня N_J-1, де $N_J\le 1+3(r_1+r_2)$, а кількість доданків із різними експонентами не перевищує 17. З формули (41) випливає, що функція $\Delta(\mu_k,\tau)$ є аналітичною на інтервалі $(0,\infty)$. Продовжимо її аналітично на $\mathbb{R}$ і отриману функцію позначимо через $D:=D(\mu_k,\tau)$. Множину тих $\tau\in[0,b]$, для яких виконується нерівність $|D(\mu_k, \tau)| \le \varepsilon$, позначимо через $E(D, \varepsilon, [0, b])$. За теоремою 2.1 із [9], враховуючи, що $\mathrm{Re}\,(J, \Gamma_k) = 0$ (це випливає із (13)), для кожного $\mu_k \in M \setminus \{\mathbf{0}\}$ маємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, E(D, \varepsilon, [0, b]) \le C_7 B(\mu_k) \left(\frac{4\varepsilon}{G(\mu_k)} \right)^{1/N-1},$$

де

$$N := \sum_{J \in \Im_6} N_J \le 17(1 + 3(r_1 + r_2)), \tag{42}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J \in \Im_6} |(J, \Gamma_k)|, \qquad \mu_k \in M \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{43}$$

$$G(\mu_k) = \max_{1 \le j \le N} \left\{ \left| \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{j-1} D(\mu_k, \tau) \right|_{\tau=0} (B(\mu_k))^{-j} \right\}, \qquad \mu_k \in M \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{44}$$

На підставі (14), (36) і (43) отримуємо оцінку

$$B(\mu_k) \le C_8 (1 + |\mu_k|), \qquad C_8 = 6C_1. \tag{45}$$

Оцінимо тепер знизу $G(\mu_k)$. Нехай $\delta = \delta(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\left. \frac{d^q D(\mu_k, \tau)}{d\tau^q} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \delta, \\ W(\mu_k), & q = \delta. \end{cases} \tag{46}$$

Використовуючи очевидні розвинення в околі точки $\tau = 0$:

$$\exp(\Gamma_{sk}\tau) = 1 + \Gamma_{sk}\tau + \tau^2 \nu_{1k}(\tau), \qquad s \in \{1, \dots, 6\},$$

$$\int_0^\tau t^{R_q} \exp(\Gamma_{sk} t)\, dt = \frac{1}{R_q + 1} \tau^{R_q + 1} + \frac{\Gamma_{sk}}{R_q + 1} \tau^{R_q + 2} + \tau^{R_q + 3} \nu_{2k}(\tau),$$

$$s, q \in \{1, \dots, 6\},$$

де $\nu_{1k}(\tau), \nu_{2k}(\tau)$ – деякі аналітичні в околі $\tau = 0$ функції, безпосередньо встановлюємо, що для $D(\mu_k, \tau)$ справджується розвинення

$$\begin{aligned} D(\mu_k, \tau) = C_9 \mu_{k_3}^3 \|\mu_k\| \tau^3 (&\beta_1\beta_2 (r_2 - r_1) \tau^{r_2 + r_1 + 2} + \alpha_2\beta_1 (r_2 + 1)(r_2 + 2) \tau^{r_1 + 1} + \\ &+ \alpha_1\beta_2 (r_1 + 1)(r_1 + 2)(r_2 + 1) \tau^{r_2 + 1} + \\ &+ \alpha_1\alpha_2 (r_1 + 1)(r_1 + 2)(r_2 + 1)(r_2 + 2))^3 + \tau^{3(r_2 + r_1 + 4)} \nu_{3k}(\tau), \end{aligned} \tag{47}$$

де $C_9 = 8\mu^* \sqrt{\dfrac{\lambda^* + \mu^*}{\sigma^3}} \prod_{s=1}^{2} \dfrac{1}{((r_s + 1)(r_s + 2))^3}$, $\nu_{3k}(\tau)$ – аналітична в околі $\tau = 0$ функція.

Із (47) випливає, що величини δ і $W(\mu_k)$ з формули (46) набувають, відповідно, таких значень:

$$\delta = \begin{cases} 3, & \alpha_1 \ne 0,\ \alpha_2 \ne 0, \\ 3(r_1 + 2), & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \ne 0, \\ 3(r_2 + 2), & \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 \ne 0, \\ 3(r_2 + r_1 + 3), & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \end{cases} \tag{48}$$

$$W(\mu_k) = $$

$$= \begin{cases} C_9(\alpha_1\alpha_2(r_1+1)(r_1+2)(r_2+1)(r_2+2))^3 \mu_{k_3}^3 \|\mu_k\|, & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0, \\ C_9(\alpha_2\beta_1(r_2+1)(r_2+2))^3 \mu_{k_3}^3 \|\mu_k\|, & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0, \\ C_9(\alpha_1\beta_2(r_1+1)(r_1+2)(r_2+1))^3 \mu_{k_3}^3 \|\mu_k\|, & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 = 0, \\ C_9(\beta_1\beta_2(r_2-r_1))^3 \mu_{k_3}^3 \|\mu_k\|, & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0. \end{cases} \quad (49)$$

Припустимо, що $\left|\mu_{k_3}\right| \geq K > 0$, $k_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тоді, враховуючи (44)–(46), (48) і (49), отримуємо

$$G(\mu_k) = \left|\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{\delta} D(\mu_k,\tau)\right|_{\tau=0} (B(\mu_k))^{-\delta-1} \geq C_{10}(1+|\mu_k|)^{-\delta}, \quad (50)$$

де $C_{10} = C_9\tilde{C}K^3$, а $\tilde{C}$ – деяка константа, яка залежить від α_j, β_j, r_j, $j \in \{1,2\}$.

Теорема 3. *Нехай спектр* M *є таким, що* $\left|\mu_{k_3}\right| \geq K > 0$, $k_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Тоді для майже всіх* (*стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$) *чисел* $T > 0$ *нерівність* (23) *справджується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in M$, *коли* $\eta > \delta + 17\left(\frac{3}{\theta_1} + 1\right)(1 + 3(r_1 + r_2))$, *де стала* δ *визначена рівністю* (48).

Д о в е д е н н я. Нехай $\varepsilon_k = (1+|\mu_k|)^{-\eta}$, $k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Згідно з теоремою 2.1 із [9], враховуючи (42), (45) і (50), для міри тих $\tau \in [0,b]$, для яких виконується нерівність $|D(\mu_k,\tau)| \leq \varepsilon_k$, отримуємо оцінку

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(D,\varepsilon_k,[0,b]) \leq C_7C_8(1+|\mu_k|)\left(\frac{4(1+|\mu_k|)^{-\eta}}{C_{10}(1+|\mu_k|)^{-\delta}}\right)^{\frac{1}{17(1+3(r_1+r_2))}} =$$

$$= C_{11}(1+|\mu_k|)^{-\frac{\eta-\delta}{17(1+3(r_1+r_2))}+1} \leq C_{11}d_1|k|^{-\left(\frac{\eta-\delta}{17(1+3(r_1+r_2))}-1\right)\theta_1}. \quad (51)$$

Оскільки $\left(\frac{\eta-\delta}{17(1+3(r_1+r_2))} - 1\right)\theta_1 > 3$, то ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^3\setminus\{\mathbf{0}\}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(D,\varepsilon_k,[0,b])$ є збіжним. Тоді, за лемою Бореля – Кантеллі [14], міра тих $\tau \in (0,b]$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $E(D,\varepsilon_k,[0,b])$, дорівнює нулеві. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in (0,b]$ нерівність $|D(\mu_k,\tau)| \geq \varepsilon_k$ справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M$. Оскільки з нерівності (51) випливає, що міри множин $E(D,\varepsilon_k,[0,b])$ не залежать від b (цей факт є наслідком гіперболічності системи (1)), то спрямувавши b до ∞, отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in (0,\infty)$ нерівність $|D(\mu_k,\tau)| \geq \varepsilon_k$ справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M$. Оскільки $\Delta(\mu_k,T) \equiv D(\mu_k,T)$ для $T \in (0,\infty)$, то з викладених вище міркувань випливає доведення теореми. ♦

Висновки. Результати можна поширити на гіперболічні за Гордінгом системи рівнянь

$$L[\mathbf{u}] := \sum_{|\tilde{s}|\leq 2n} A_{\tilde{s}} \frac{\partial^{|\tilde{s}|}\mathbf{u}(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} = 0, \qquad (t,x) \in D^p,$$

де $A_{\tilde{s}}$ – матриці розміру $m \times m$ зі сталими комплексними коефіцієнтами, $\mathbf{u}(t,x) = \operatorname{col}(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$.

Робота підтримана ДФФД України (проект № 54.1/027).

1. *Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М.* Элементы теории функций. – Москва: Физматгиз, 1963. – 244 с.
2. *Жук В. И., Пташник Б. И.* Краевая задача для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 9. – С. 3–9.
3. *Ільків В. С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 318–323.
4. *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Сохан П. Л.* Операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними безмежного порядку. – Львів, 1995. – 42 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики; № 1-95).
5. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна–Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 41–53.
6. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь, гіперболічних за Гордінгом // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 252–265.
   Те саме: *Kuz' A. M., Ptashnyk B. I.* A problem with integral conditions with respect to time for Gårding hyperbolic equations // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 2. – С. 277–293.
7. *Ланкастер П.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1982. – 272 с.
8. *Медвідь О., Симотюк М.* Задача з інтегральними умовами для лінійної систем рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу // Мат. вісн. НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 414–427.
9. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Діофантові наближення характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 74–85.
10. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 32–39.
11. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.
   Те саме: *Pul'kina L. S.* A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation // Differ. Equat. – 2004. – **40**, No. 7. – P. 947–953.
12. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. – Москва: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.
13. *Сохан П. Л.* Крайова задача для однієї системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. –1998. – № 337. – С. 153–155.
14. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – Москва: Наука, 1977. – 144 с.
15. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308+XIV с.
16. *Фардигола Л. В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.
17. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 6. – С. 122–129.
   Те саме: *Fardigola L. V.* Integral boundary problem in a layer // Math. Notes. – 1993. – **53**, No. 6. – P. 644–649.
18. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 11. – С. 123–144.
   Те саме: *Fardigola L. V.* An integral boundary-value problem in a layer for a system of linear partial differential equations // Sbornik Math. – 1995. – **53**, No. 6. – P. 1671–1692.
19. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральным условием // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.
   Те саме: *Fardigola L. V.* Test for propriety in a layer of a boundary problem with integral condition // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, No. 11. – P. 1388–1394.
20. *Фардигола Л. В.* Свойства T-устойчивости интегральной краевой задачи в слое // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1991. – № 55. – С. 78–80.

21. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук – 1978. – **33**, № 2 (200). – С. 3–47.
22. *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. – 2011. – **5**, No. 11. – P. 31–37.
23. *Besicovitch A. S.* Almost periodic functions. – Cambridge: Dover Publ., Inc., 1954. – 180 p.
24. *Bougoffa L.* A coupled system with integral conditions // Appl. Math. E-Notes. – 2004. – **4**. – P. 99–105.
25. *Dell'Acqua G., Santucci P.* Embedding theorems for Sobolev–Besicovitch spaces $W_{ap}^{k,1}(\mathbb{R}^s)$ // Rend. Mat. – 1996. – Ser. 7. – **16**, No. 3. – P. 525–536.
26. *Ntouyas S. K., Obaid M.* A coupled system of fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions // Adv. Differ. Equat.–NY. – 2012. – **2012**, No. 130. – P. 1–8.
27. *Song W., Gao W.* Positive solutions for a second-order system with integral boundary conditions // Electron. J. Differ. Equat. – 2011. – No. 13.– P. 1–9.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В области, являющейся декартовым произведением отрезка $[0,T]$ и пространства $\mathbb{R}^3$, исследована задача с интегральными условиями по временной координате для системы уравнений динамической теории упругости в классе почти периодических по пространственным переменным функций. Найдены критерий единственности и достаточные условия существования решения задачи. Для решения проблемы малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи, использовано метрический подход.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS WITH RESPECT TO TIME FOR SYSTEM OF EQUATIONS OF DYNAMIC ELASTICITY THEORY

In a domain specified in the form of a Cartesian product of a segment $[0,T]$ and the space $\mathbb{R}^3$, a problem with integral conditions with respect to the time variable for a system of equations in dynamic elasticity theory in the class of functions, almost periodic in the space variables is investigated. A criterion for the unique solvability of the problem and sufficient conditions for the existence of its solution are established. To solve the problem of small denominators arising in the solution of the problem, the metric approach is used.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.09.13