УДК 517.52

Д. І. Боднар, М. М. Бубняк

ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ПОТОЧКОВОЇ ТА РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ 1-ПЕРІОДИЧНОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Встановлено нову формулу різниці двох підхідних дробів 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду, на основі якої одержано оцінки швидкості поточкової і рівномірної збіжності такого дробу.

Неперервний дріб

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1}=1+\frac{a_1}{1}\,\frac{a_2}{+\,1}\,+\ddots\,, \tag{1}$$

послідовність елементів a_n якого є k-періодичною: $a_{kn+p}=a_p$, для всіх $n\in\in\mathbb{N}$, $1\le p<k$, називають k-періодичним, $k\in\mathbb{N}$. 1-періодичний дріб досліджували L. Euler, D. Bernoulli, а k-періодичні дроби – E. Kahl, E. Galois, W. Leighton, O. Perron, R. Lane, H. Wall, W. Jones, W. Thron, H. Waadeland, L. Lorentzen та ін. Огляд цих результатів зроблено у [3–7, 9].

Розглянемо дробово-лінійне відображення $t(\omega)=\dfrac{a\omega+b}{c\omega+d}$, де a, b, c, d, $\omega\in\mathbb{C}$ такі, що $ab-dc\ne 0$, $c\ne 0$. Нехай відображення $t(\omega)$ має дві нерухомі точки x та y. Точку x називають *притягувальною* (attracting), якщо $t^n(\omega)=t(t^{n-1}(\omega))\to x$ при $n\to\infty$ для всіх $\omega\ne y$. Тоді y – *відштовхувальна* (repelling) точка цього відображення.

Для 1-періодичного неперервного дробу

$$1+\frac{c_1}{1}\,\frac{c_1}{+\,1}\,+\ldots\,, \tag{2}$$

де $c_1\in\mathbb{C}$, маємо

$$t(\omega)=1+\frac{c_1}{\omega},\qquad x=\frac{1+\sqrt{1+4c_1}}{2},\qquad y=\frac{1-\sqrt{1+4c_1}}{2}. \tag{3}$$

Зауважимо, що тут і надалі при розгляді квадратного кореня беремо головну вітку $(\sqrt{1}=1)$.

Відомо [5–9], що в області

$$G=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|\arg\left(z+\frac{1}{4}\right)\right|<\pi\right\} \tag{4}$$

дріб (2) збігається, $x\ne y$, $x\ne 0$ і значення його n-го підхідного дробу рівне

$$f_n=1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\frac{c_1}{1}=\frac{x^{n+2}-y^{n+2}}{x^{n+1}-y^{n+1}}=x\,\frac{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{n+2}}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{n+1}},\qquad n\ge 0,\qquad f_0=1. \tag{5}$$

Лема 1. *Нехай елемент* c_1 *дробу* (2) *належить замкненій області*

$$D=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|\arg\left(z+\frac{1}{4}\right)\right|\le\pi-\varepsilon,\ \delta\le\left|z+\frac{1}{4}\right|\le\Delta\right\}, \tag{6}$$

де $0<\varepsilon<\pi$, $0<\delta<\Delta$ (*рис.* 1). *Тоді*:

(***i***) *дріб* (2) *рівномірно збігається в області* D *до притягувальної точки* x, *яку визначаємо за формулою* (3);

(*ii*) *справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|f_n - x| \le L \cdot \rho^{n+1}, \qquad n \ge 0\,, \tag{7}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{1 - 4\sqrt{d}\,\sin\frac{\varepsilon}{2} + 4d}{1 + 4\sqrt{d}\,\sin\frac{\varepsilon}{2} + 4d}}\,, \tag{8}$$

причому $d = \delta$, *якщо* $\delta \cdot \Delta \le \frac{1}{16}$, *і* $d = \Delta$, *якщо* $\delta \cdot \Delta > \frac{1}{16}$, $L = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1-\rho}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $D \subset G$, то, використовуючи формулу (5), одержимо

$$|f_n - x| = \left|\frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}} - x\right| = \left|\frac{y}{x}\right|^{n+1} \frac{|x-y|}{\left|1 - \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}\right|} \le \left|\frac{1 - \sqrt{1+4c_1}}{1 + \sqrt{1+4c_1}}\right|^{n+1} \frac{|x-y|}{1 - \left|\frac{y}{x}\right|}.$$

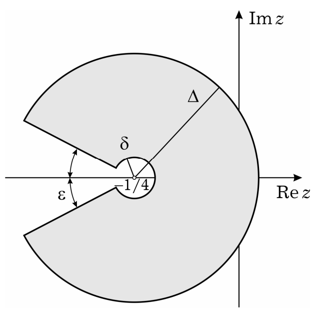

Рис. 1

Якщо $c_1 \in D$, то максимальне значення виразу $\left|\frac{1 - \sqrt{1+4c_1}}{1 + \sqrt{1+4c_1}}\right|$ дорівнює ρ, яке знаходимо за формулою (8). Рівномірна збіжність випливає з оцінки (7). Лему доведено. ♦

Дріб (1) називають гранично-періодичним, якщо послідовність його елементів задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$.

Поряд з гранично-періодичними дробами розглядають скінченні дроби вигляду

$$h_n = 1 + \frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{1} + \ldots + \frac{a_1}{1}, \quad n \ge 1, \quad h_0 = 1\,, \tag{9}$$

які назвемо зворотними (reversed) дробами, дотримуючись термінології монографії [6, с. 48].

L. Lorentzen, H. Waadeland, W. Thron досліджували питання збіжності гранично-періодичних дробів і дробів вигляду (9) у роботах [5, 6, 8].

Лема 2. *Нехай* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ − *послідовність зворотних дробів вигляду* (9), *елементи яких задовольняють умову* $|a_n| \le |a| < \frac{1}{4}$, $n \ge 1$. *Тоді виконуються нерівності*

$$|h_n| > \xi, \qquad \xi = \frac{1 + \sqrt{1 - 4|a|}}{2}, \qquad n \ge 0\,. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я випливає з того, що мінімантою дробу h_n є n-й підхідний дріб (2), де $c = -|a|$. Послідовність підхідних дробів мініманти $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ є монотонно спадною і $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \xi$, де ξ − притягувальна точка дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + \frac{-|a|}{\omega}$. Отже, $|h_n| > \xi$. ♦

Розглянемо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{11}$$

де $c_j \in \mathbb{C}$, $j=1,\ldots,N$, $i_0 = N$ − фіксоване натуральне число.

Скінченні ГЛД

$$F_n = \left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \qquad n \ge 1, \qquad F_0 = 1,$$

називають n-ми підхідними дробами ГЛД (11), а вирази

$$R_n^{(q)} = 1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{j_{k-1}}\frac{c_{j_k}}{1}, \qquad 1 \le q \le N, \qquad n \ge 1,$$

− n-ми залишками q-го порядку дробу (11) ($j_0 = q$, $R_0^{(q)} = 1$, $R_n^{(0)} = 1$).

Якщо $R_n^{(q)} \ne 0$, $q = 1,\ldots,N$, $n \ge 1$, то справджуються рекурентні співвідношення

$$R_n^{(q)} = 1+\sum_{j=1}^{q}\frac{c_j}{R_{n-1}^{(q)}} = R_n^{(q-1)} + \frac{c_q}{R_{n-1}^{(q)}}, \tag{12'}$$

$$R_{n+m}^{(q)} - R_n^{(q)} = R_{n+m}^{(q-1)} - R_n^{(q-1)} + \frac{(-1)c_q}{R_{n+m-1}^{(q)}R_{n-1}^{(q)}}\left(R_{n+m-1}^{(q)} - R_{n-1}^{(q)}\right). \tag{12''}$$

Нехай

$$I_{n+1}^{(q)} = \left\{k = (k_1,k_2,\ldots,k_q) : k_\ell \ge 0,\ \ell = 1,\ldots,q,\ \sum_{\ell=1}^{q} k_\ell = n+1\right\},$$

$$I_{n+1}^{(j,q)} = \{k \in I_{n+1}^{(q)} : k_i \ge 1,\ i = 1,\ldots,j,\ k_{j+1} = \ldots = k_q = 0\},$$

$$q = 1,\ldots,N, \qquad j = 1,\ldots,q,$$

− множини мультиіндексів. Тоді

$$I_{n+1}^{(q)} = \bigcup_{j=1}^{q} I_{n+1}^{(j,q)},$$

$$I_{n+1}^{(q+1,q+1)} = \bigcup_{s=1}^{n+1}\left(I_{n+1-s}^{(q)} \times \{s\}\right), \tag{13}$$

причому $I_{n+1}^{(k,q)} \cap I_{n+1}^{(\ell,q)} = \varnothing$, якщо $k \ne \ell$.

Встановимо формулу різниці двох підхідних дробів ГЛД (11), використовуючи запропоновану в [2, с. 28] схему. При цьому вважаємо, що добуток, у якому верхній індекс менший від нижнього, дорівнює 1.

Лема 3. *Для різниці двох підхідних дробів ГЛД* (11) *справджується формула*

$$F_{n+m} - F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{R_{n+m}^{(N)}R_n^{(N)}}\sum_{k \in I_{n+1}^{(N)}}\frac{c_1^{k_1}c_2^{k_2}\ldots c_N^{k_N}}{\prod_{j=1}^{N}\prod_{r=1}^{k_j}\left(R_{p_j+m-r}^{(j)}\hat{R}_{p_j-r}^{(j)}\right)}, \tag{14}$$

де $n \ge 0$, $m \ge 1$, $p_j = n - \sum_{\ell=j+1}^{N} k_\ell$, $\hat{R}_n^{(q)} = \begin{cases} R_n^{(q)}, & n \ge 0, \\ 1, & n = -1. \end{cases}$

Д о в е д е н н я. Використовуючи метод математичної індукції за q при фіксованих $n \ge 0$, $m \ge 1$, встановимо рівність

$$R_{n+m}^{(q)} - R_n^{(q)} = (-1)^n \sum_{k \in I_{n+1}^{(q)}} \frac{c_1^{k_1} c_2^{k_2} \ldots c_q^{k_q}}{\prod_{j=1}^{q} \prod_{r=1}^{k_j} \left(R_{p_j+m-r}^{(j)} \hat{R}_{p_j-r}^{(j)}\right)}. \tag{15}$$

Для $q = 1$ рівність (15) випливає зі співвідношень (12′), (12″) при $p_1 = n$:

$$R_{n+m}^{(1)} - R_n^{(1)} = \frac{(-1)^n c_1^{n+1}}{\prod_{r=1}^{n+1} R_{n+m-r}^{(1)} \hat{R}_{n-r}^{(1)}}.$$

Припустивши, що рівність (15) виконується при $q = s$, для $q = s + 1$ після елементарних перетворень з урахуванням співвідношень (12), (13) отримаємо

$$R_{n+m}^{(s+1)} - R_n^{(s+1)} = R_{n+m}^{(s)} - R_n^{(s)} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p c_{s+1}^p}{\prod_{s=1}^{p} R_{n+m-s}^{(s+1)} R_{n-s}^{(s+1)}} \left(R_{n+m-p}^{(s)} - R_{n-p}^{(s)}\right) =$$

$$= (-1)^n \sum_{k \in I_{n+1}^{(s+1)}} \frac{c_1^{k_1} c_2^{k_2} \ldots c_{s+1}^{k_{s+1}}}{\prod_{j=1}^{s+1} \prod_{r=1}^{k_j} \left(R_{p_j+m-r}^{(j)} \hat{R}_{p_j-r}^{(j)}\right)}.$$

Враховуючи, що $F_{n+m} - F_n = \dfrac{1}{R_{n+m}^{(N)}} - \dfrac{1}{R_m^{(N)}}$, завершуємо доведення леми. ♦

Побудуємо області Ω_j для вибору елементів c_j, $j = 1, \ldots, N$, дробу (11).

Нехай $\Omega_1 = G$, де область G означена формулою (4). Виберемо елемент $c_1 \in \Omega_1$ та зафіксуємо його. Позначимо $p_1 = \left|\dfrac{y_1}{x_1}\right| = \left|\dfrac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}}\right|$, де x_1, y_1 – нерухомі точки дробово-лінійного відображення (3).

Виберемо та зафіксуємо елемент c_2 з області

$$\Omega_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{r_1}{4} \right\}, \qquad r_1 = |x_1|^2 \frac{1 - p_1^3}{1 + p_1}. \tag{16}$$

Нехай елементи $c_j \in \Omega_j$, $j = 3, \ldots, k$, вибрані та зафіксовані. Тоді область Ω_{k+1} означимо так:

$$\Omega_{k+1} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{4} \prod_{j=1}^{k} r_j \right\}, \quad r_j = \xi_j^2, \quad \xi_j = \frac{1 + d_j}{2}, \quad k \le N - 1, \tag{17}$$

$$d_j = \sqrt{1 - 4|c_j| \prod_{k=1}^{j-1} r_k^{-1}}. \tag{18}$$

Теорема 1. *Нехай елементи дробу* (11) *належать побудованим вище областям, тобто* $c_j \in \Omega_j$, $j = 1, \ldots, N$.

Тоді:

(***i***) *дріб* (11) *збігається*;

(***ii***) *справджується оцінка поточкової швидкості збіжності*

$$|F_n - F| \le C_{n+N-1}^{N-1}\, L\, p^{n+1}, \qquad n \ge 1, \tag{19}$$

де $p = \max_{j=1,\dots,N}\{p_j\}$, $p_j = \dfrac{1}{(1+d_j)^2}$, d_j, $j = 2,\dots,N$, *знаходимо за формулами* (18),

$$L = \frac{4^N}{\cos^2\alpha} M_1 \prod_{j=2}^{N} \frac{M_j}{(1+d_j)^2}, \qquad 2\alpha = \begin{cases} \arg c_1, & \arg c_1 \ne \pi, \\ 0, & \arg c_1 = \pi, \end{cases}$$

$$M_1 = \frac{|x_1|(1+p_1)}{(1-p_1)^2}, \quad M_j = \frac{|c_j|\, 4^j}{p_j \cos^2\alpha \prod_{m=2}^{j}(1+d_m)^2}, \qquad j = 2,\dots,N;$$

(***iii***) $F = \left(\prod_{j=1}^{N} x_j\right)^{-1}$ *– значення дробу* (11), *де* $x_j = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4c_j \prod_{p=1}^{j-1} x_p^{-2}}\right)$.

Д о в е д е н н я. Методом математичної індукції за q доведемо, що $\left|R_n^{(q)}\right| \ge K_q$, де $K_q = \dfrac{\cos\alpha}{2} \prod_{j=2}^{q} \dfrac{1+d_j}{2}$, $n \ge 0$, $q = 1,\dots,N$.

Оскільки $R_n^{(1)} = f_n$ – n-й підхідний дріб 1-періодичного дробу (2), то для будь-якого $c_1 \in \Omega_1$ маємо, що $c_1 \in P(\alpha)$, де $P(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \mathrm{Re}\,(ze^{-2i\alpha}) \le \le \dfrac{1}{2}\cos^2\alpha \right\}$, α означено в пункті (***ii***) теореми. З параболічної теореми 3.43 [6, с. 151] випливає, що $R_n^{(1)} \in V(\alpha)$, де $V(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(ze^{-i\alpha}) \ge \dfrac{1}{2}\cos\alpha \right\}$. Враховуючи, що $\mathrm{dist}\,(0; \partial V(\alpha)) = K_1$, одержимо $\left|R_n^{(1)}\right| \ge K_1$, $n \ge 0$. Використовуючи формулу (5), встановлюємо також оцінку $\left|R_n^{(1)} R_{n-1}^{(1)}\right| \ge r_1$.

Припустивши, що $\left|R_n^{(s)}\right| \ge K_s$, $n \ge 0$, $2 \le s \le q$, доведемо, що виконуються нерівності $\left|R_n^{(q+1)}\right| \ge K_{q+1}$, $n \ge 0$. Оскільки всі $R_n^{(s)} \ne 0$, $n \ge 0$, $2 \le \le s \le q$, то на основі твердження 1 з [1, с. 9] маємо $R_n^{(q+1)} = R_n^{(q)} \cdot h_n^{(q+1)}$, $n \ge 0$, де $h_n^{(q+1)}$ – зворотний дріб вигляду

$$h_n^{(q+1)} = 1 + \cfrac{\dfrac{c_{q+1}}{R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}}}{1} + \cfrac{\dfrac{c_{q+1}}{R_{n-1}^{(q)} R_{n-2}^{(q)}}}{1} + \ldots + \cfrac{\dfrac{c_{q+1}}{R_1^{(q)} R_0^{(q)}}}{1}. \tag{20}$$

Враховуючи, що $c_{q+1} \in \Omega_{q+1}$, отримаємо, що при $n \ge 0$ елементи дробів $h_n^{(q+1)}$ задовольняють умови

$$\left|\frac{c_{q+1}}{R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}}\right| \le \frac{|c_{q+1}|}{r_1 \prod_{j=2}^{q} \xi_j^2} = \frac{|c_{q+1}|}{\prod_{j=1}^{q} r_j} < \frac{1}{4}. \tag{21}$$

Згідно з лемою 2 при $|a| = \dfrac{|c_{q+1}|}{\prod_{j=1}^{q} r_j}$ одержимо оцінки $\left|h_n^{(q+1)}\right| > \xi_{q+1}$, де $\xi_{q+1} = \frac{1}{2}(1 + d_{q+1})$. Отже, для $n \geq 0$ справджуються нерівності $\left|R_n^{(q+1)}\right| = \left|R_n^{(q)}\right|\left|h_n^{(q+1)}\right| \geq K_q \dfrac{1 + d_{q+1}}{2} = K_{q+1}$.

Для встановлення оцінки швидкості збіжності дробу (11) використаємо формулу (14). Оцінимо зверху вирази

$$\frac{|c_j|^{k_j}}{\prod_{r=1}^{k_j}\left(\left|R_{s_j+m-r}^{(j)}\right|\left|\hat{R}_{s_j-r}^{(j)}\right|\right)}, \qquad j = 1, \ldots, N, \qquad s_j = n - \sum_{\ell=j+1}^{N} k_\ell. \tag{22}$$

При $j = 1$, враховуючи формулу (5), отримаємо $\dfrac{|c_j|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1}\left(\left|R_{s_1+m-r}^{(1)}\right|\left|\hat{R}_{s_1-r}^{(1)}\right|\right)} \leq \leq M_1\left(\dfrac{|c_1|}{|x_1|^2}\right)^{k_1}$. Якщо x_1, y_1 – розв'язки рівняння $\omega^2 - \omega - c_1 = 0$, то $\dfrac{|c_1|}{|x_1|^2} = = \dfrac{|x_1||y_1|}{|x_1|^2} = p_1$ і $p_1 < 1$.

Враховуючи співвідношення $\left|R_n^{(j)}\right| = \left|R_n^{(j-1)}\right|\left|h_n^{(j)}\right|$, $j = 2, \ldots, N$, і нерівності (21), маємо

$$\frac{|c_j|}{\left|R_n^{(j)}\right|\left|R_{n-1}^{(j)}\right|} = \frac{\dfrac{|c_j|}{\left|R_n^{(j-1)}\, R_{n-1}^{(j-1)}\right|}}{\left|h_n^{(j)}\right|\left|h_{n-1}^{(j)}\right|} < \frac{1/4}{\xi_j^2} < \frac{1}{(1 + d_j)^2} = p_j.$$

Оскільки $1 \leq k_j \leq n + 1$, то для виразів (22) справджуються оцінки

$$\prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_j|}{\left(\left|R_{s_j+m-2r+1}^{(j)}\right|\left|R_{s_j+m-2r}^{(j)}\right|\right)} \cdot \prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_j|}{\left(\left|\hat{R}_{s_j-2r+1}^{(j)}\right|\left|\hat{R}_{s_j-2r}^{(j)}\right|\right)} \leq M_j p_j^{k_j}, \tag{23}$$

де $M_j = \max\left\{1, \dfrac{|c_j|}{p_j K_j^2}\right\} = \dfrac{|c_j| 4^j}{p_j \cos^2\alpha \prod_{m=2}^{j}(1 + d_m)^2}$.

Отже,

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{K_N^2} \sum_{k \in I_{n+1}^{(N)}} \prod_{j=1}^{N} M_j p_j^{k_j} \leq \frac{\prod_{j=1}^{N} M_j}{K_N^2} \sum_{k \in I_{n+1}^{(N)}} p^{k_1 + k_2 + \ldots + k_N} =$$

$$= C_{n+N-1}^{N-1}\, L\, p^{n+1}.$$

Перейшовши до границі при $m \to \infty$, одержимо оцінку (19).

Знайдемо значення дробу (11). Використовуючи твердження 1 [1, с. 9], отримаємо

$$F = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \left(R_n^{(N)}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(h_n^{(1)}\right)^{-1} \cdot \left(h_n^{(2)}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(h_n^{(N)}\right)^{-1}.$$

Методом математичної індукції за q доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{(q)} = x_q$, де $x_q = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4c_q / \prod\limits_{p=1}^{q-1} x_p^2}\right)$. При $q = 1$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{(1)} = x_1$, де x_1 визначаємо за формулою (3). Враховуючи припущення індукції, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{q+1}}{R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}}\right| = \dfrac{|c_{q+1}|}{\prod\limits_{j=1}^{q} |x_j|^2}$. Згідно з лемою 2 виконуються нерівності $\left|h_n^{(s)}\right| > \xi_s$, $n \ge 0$, звідси $\lim\limits_{n\to\infty} \left|h_n^{(s)}\right| = |x_s| \ge \xi_s$, $s = 2, \ldots, q$. Враховуючи оцінки $\dfrac{|c_{s+1}|}{\prod\limits_{j=1}^{s} |x_j|^2} \le \dfrac{|c_{s+1}|}{|x_1|^2 \prod\limits_{j=2}^{s} \xi_j^2} \le \dfrac{|c_{s+1}|}{\prod\limits_{j=1}^{s} r_j} < \dfrac{1}{4}$ і теорему 4.1 [8, с. 47], одержимо $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{(q+1)} = x_{q+1}$.

Отже, значенням дробу (11) є $F = \left(\prod\limits_{j=1}^{N} x_j\right)^{-1}$. Теорему доведено. ♦

Нехай $\partial G = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\arg\left(z + \dfrac{1}{4}\right)\right| = \pi\right\}$, K – довільний компакт ($K \subset G$), де G визначаємо за формулою (4), $\Delta = \max\limits_{z\in\partial K}\left|z + \dfrac{1}{4}\right|$, $\delta = \min\limits_{z\in\partial K}\left|z + \dfrac{1}{4}\right| = \operatorname{dist}\left(-\dfrac{1}{4}, \partial K\right)$, $\operatorname{dist}(\partial G, z^*) = \operatorname{dist}(\partial G, \partial K)$, $\varepsilon = \begin{cases} \pi - \arg z^*, & \arg z^* \ne \pi, \\ \pi, & \arg z^* = \pi. \end{cases}$
Побудуємо область D_1 вигляду (6) із заданими вище параметрами. Очевидно, що $K \subseteq D_1$.

Теорема 2. *Нехай елементи дробу* (11) *належать областям* D_j, *тобто* $c_j \in D_j$, $j = 1, \ldots, N$, *де* D_1 – *визначена вище область вигляду* (6),

$$D_j = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{m_1^2}{4^{j-1}}\right\}, \qquad j = 2, \ldots, N,$$

причому

$$m_1 = (1 - \rho_1)\sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{\delta}\sin\frac{\varepsilon}{2} + \delta}, \tag{24}$$

де ρ_1 *задано формулою* (8).

Тоді:

(***i***) *дріб* (11) *рівномірно збігається в* $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_N$;

(***ii***) *справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|F_n - F| \le C_{n+N-1}^{N-1} \cdot L \cdot \rho^{n+1}, \qquad n \ge 1, \tag{25}$$

де $\rho = \max\left\{\rho_1, \dfrac{1}{3}\right\}$, $L = \dfrac{12^{N-1} M}{m_1^2}$, $M = \dfrac{(1/2 + \sqrt{\Delta})(1 + \rho_1)}{(1 - \rho_1)}$, F – *значення дробу* (11).

Д о в е д е н н я. Аналогічно, як у теоремі 1, методом математичної індукції доведемо, що $\left|R_n^{(q)}\right| \geq m_q$, $m_q = \dfrac{m_1}{2^{q-1}}$, $n \geq 0$, $q = 1, \dots, N$.

Оскільки $R_n^{(1)} = f_n$ – n-й підхідний дріб 1-періодичного дробу (2), то справджується оцінка $\left|R_n^{(1)}\right| \geq |x_1|(1-\rho_1)$, $n \geq 0$, де x_1, ρ_1 знаходимо за формулами (3) і (8). Враховуючи, що $c_1 \in D_1$, маємо $\left|R_n^{(1)}\right| \geq m_1$, де m_1 визначаємо за формулою (24).

Припустимо, що виконуються нерівності $\left|R_n^{(s)}\right| \geq m_s$, $s = 2, \dots, q$, $n \geq 0$. Оскільки для елементів зворотних дробів $h_n^{(q+1)}$ вигляду (20) виконуються нерівності $\left|\dfrac{c_{q+1}}{R_n^{(q)} R_{n-1}^{(q)}}\right| \leq \dfrac{|c_{q+1}|}{m_q^2} < \dfrac{1}{4}$, $n \geq 0$, то справджуються оцінки $\left|R_n^{(q+1)}\right| = \left|R_n^{(q)}\right| \cdot \left|h_n^{(q+1)}\right| \geq m_q \cdot \dfrac{1}{2} \geq m_{q+1}$, $n \geq 0$.

Для встановлення оцінки швидкості збіжності дробу (11) використаємо формулу (14). Оцінимо вирази (22). При $j = 1$, враховуючи, що $c_1 = x_1 \cdot y_1$, отримаємо оцінку

$$\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod\limits_{r=1}^{k_1}\left(\left|R_{s_1+m-r}^{(1)}\right|\left|\hat{R}_{s_1-r}^{(1)}\right|\right)} \leq M\left|\frac{y_1}{x_1}\right|^{k_1} \leq M\rho_1^{k_1},$$

де ρ_1 – максимальне значення величини $\left|\dfrac{y_1}{x_1}\right|$, яке визначаємо за формулою (8).

Враховуючи, що виконуються нерівності $\left|\dfrac{c_j}{R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}}\right| < \dfrac{1}{4}$ і $\left|h_{n-1}^{(s)}\right| > \dfrac{1}{2}$, для будь-якого j, $j = 2, \dots, N$, маємо $\dfrac{\dfrac{|c_j|}{\left|R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}\right|}}{\left|h_{n-1}^{(j)}\right|} < \dfrac{1}{2}$. Таким чином, встановлюємо оцінку

$$\frac{|c_j|}{\left|R_n^{(j)}\right|\left|R_{n-1}^{(j)}\right|} = \frac{\dfrac{|c_j|}{\left|R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}\right|}}{\left|h_{n-1}^{(j)}\right|} \cdot \frac{1}{\left|1 + \dfrac{\dfrac{c_j}{R_n^{(j-1)} R_{n-1}^{(j-1)}}}{h_{n-1}^{(j)}}\right|} \leq \frac{1}{3} = \rho_j.$$

При $1 \leq k_j \leq n+1$, аналогічно, як у теоремі 1, оцінка (23) матиме вигляд

$$\prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_j|}{\left(\left|R_{s_j+m-2r+1}^{(j)}\right|\left|R_{s_j+m-2r}^{(j)}\right|\right)} \cdot \prod_{r=1}^{[k_j/2]} \frac{|c_j|}{\left(\left|\hat{R}_{s_j-2r+1}^{(j)}\right|\left|\hat{R}_{s_j-2r}^{(j)}\right|\right)} \leq M_j \rho_j^{k_j},$$

де $M_j = \max\left\{1, \dfrac{|c_j|}{\rho_j m_1^2}, \dfrac{|c_j|}{\rho_j}, \dfrac{|c_j|}{\rho_j m_1}\right\} = 3$.

Отже,

$$|F_{n+m} - F_n| \le \frac{1}{m_N^2} \sum_{k \in I_{n+1}^{(N)}} \prod_{j=1}^{N} M_j \rho_j^{k_j} \le C_{n+N-1}^{N-1} \cdot L \cdot \rho^{n+1} .$$

Звідси при $m \to \infty$ одержуємо оцінку (25). Теорему доведено. ♦

1. *Боднар Д., Бубняк М.* Про збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. вісн. НТШ. – 2011. – **8**. – С. 5–16.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Brezinski C.* History of continued fractions and Padé approximants. – Berlin: Springer, 1991. – Springer Ser. in Computational Mathematics. – **12**. – 551 p.
4. *Cuyt A., Petersen V. B., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbook of continued fractions for special functions. – New York: Springer, 2008. – 431 p.
5. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p. – Encyclopedia Math. Appl. – Vol. 11.
6. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – 308 p.
7. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbrüchen. – Band II: Analytisch-funktionen-theoretishe Kettenbrüche. – Stuttgart: Teubner, 1957. – vi + 316 S.
8. *Thron W. J., Waadeland H.* Modifications of continued fractions. A survey // Analytic Theory of Continued fractions: Lect. Notes in Math. – 1981. – **932**. – P. 38–66.
9. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ ПОТОЧЕЧНОЙ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ 1-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВЕТВЯЩЕЙСЯ ЦЕПНОЙ ДРОБИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Установлена новая формула разности двух подходящих дробей 1-периодической ветвящейся цепной дроби специального вида, с использованием которой получена оценка скорости поточечной и равномерной сходимости этой дроби.

ESTIMATES FOR SPEED OF POINTWISE AND UNIFORM CONVERGENCE OF 1-PERIODIC BRANCHED CONTINUED FRACTION OF A SPECIAL FORM

A new formula for the difference between two approximants of 1-periodic branched continued fraction of a special form is constructed. An estimate for speeds of pointwise and uniform convergence of such fraction is obtained using that formula.

Тернопіль. нац. економ. ун-т, Тернопіль

Одержано
11.02.13