УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська

СТІЙКІСТЬ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

З використанням властивостей залишків двовимірного неперервного дробу встановлено відносну та абсолютну похибки при обчисленні двовимірних неперервних дробів, а також область їх абсолютної стійкості.

Попередні дослідження. Неперервні дроби, які мають властивість малого нагромадження похибки при обчисленнях, стали використовуваним апаратом обчислювальної математики. Однією з основних властивостей як неперервних дробів, так і їх багатовимірних узагальнень є властивість обчислювальної стійкості, однак доволі небагато робіт присвячено цій тематиці [1–3, 6–8].

Розглядатимемо двовимірний неперервний дріб

$$f = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}} = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i}, \tag{1}$$

з наближеннями

$$f_n = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-1-i)}},$$

$$\Phi_i^{(n-1-i)} = b_{i,i} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \qquad \Phi_{n-1}^{(0)} = b_{n-1,n-1}, \tag{2}$$

де $a_{i,j} \neq 0$, $b_{i,j}$ – комплексні числа, а також двовимірні неперервні дроби з додатними елементами $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots$. Суттєву роль у дослідженні властивостей двовимірних неперервних дробів відіграватимуть їх залишки.

Скінченні звичайні неперервні дроби, що задовольняють рекурентні співвідношення

$$Q_{i+k,i}^{(0)} = b_{i+k,i}, \qquad Q_{i+k,i}^{(m+1)} = b_{i+k,i} + \frac{a_{i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i}^{(m)}},$$
$$i, m = 0,1,\ldots, \qquad k = 1,2,\ldots,$$
$$Q_{i,i+k}^{(0)} = b_{i,i+k}, \qquad Q_{i,i+k}^{(m+1)} = b_{i,i+k} + \frac{a_{i,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1}^{(m)}},$$
$$i, m = 0,1,\ldots, \qquad k = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

називають одновимірними i-ми залишками скінченного двовимірного неперервного дробу (1), а двовимірний неперервний дріб

$$Q_i^{(0)} = b_{i,i},$$
$$Q_i^{(m+1)} = \Phi_i^{(m+1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{m+1} \frac{a_{j,j}}{\Phi_j^{(m+1-j)}} = b_{i,i} + \frac{a_{i+1,i}}{Q_{i+1,i}^{(m)}} + \frac{a_{i,i+1}}{Q_{i,i+1}^{(m)}} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(m)}},$$
$$i, m = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

називають його загальним i-м залишком [4].

Основні результати. Дослідимо властивості двовимірного неперервного дробу (1).

Сформулюємо та доведемо лему про відносну похибку при обчисленні двовимірного неперервного дробу (1) з додатними елементами та з частинними чисельниками, що дорівнюють одиниці.

Лема. *Нехай*

$$f_k = \mathop{D}_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\Phi_i^{(k-i-1)}}, \qquad \Phi_i^{(m)} = b_{i,i} + \mathop{D}_{j=1}^{m} \frac{1}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}_{j=1}^{m} \frac{1}{b_{i,i+j}} \tag{5}$$

– скінченний двовимірний неперервний дріб із додатними елементами. Нехай елементи $b_{i,j}$, $i,j = 0,1,\dots$, *обчислено з відносними похибками* $\delta_{i,j}$. *Якщо* $\hat{b}_{i,j} > 0$ *– наближені значення* $b_{i,j}$, *то абсолютна величина відносної похибки при обчисленні дробу* (4) *не перевищує величини*

$$\left|\delta(f_k)\right| \le \max\left\{\left|\delta^*_{i,j}\right|,\ 0 \le i,j \le k-1\right\},$$

де $\delta^*_{i,j} = \delta_{i,j}$, *якщо* $\max(i,j)$ *є непарним, і* $\delta^*_{i,j} = \dfrac{\delta_{i,j}}{1+\delta_{i,j}}$, *якщо* $\max(i,j)$ *є парним числом.*

Д о в е д е н н я. Якщо ввести позначення

$$\delta_{i,j} = \frac{b_{i,j} - \hat{b}_{i,j}}{b_{i,j}}, \qquad \hat{\delta}_{i,j} = \frac{b_{i,j} - \hat{b}_{i,j}}{\hat{b}_{i,j}},$$

тоді

$$\left|\delta_{1/b_{i,j}}\right| \le \left|\hat{\delta}_{i,j}\right|, \qquad \left|\hat{\delta}_{1/b_{i,j}}\right| \le \left|\delta_{i,j}\right|, \qquad \left|\hat{\delta}_{b_{i,j}}\right| = \left|\frac{\delta_{i,j}}{1+\delta_{i,j}}\right|.$$

Дійсно,

$$\left|\delta_{1/b_{i,j}}\right| = \frac{\left|\dfrac{1}{b_{i,j}} - \dfrac{1}{\hat{b}_{i,j}}\right|}{\dfrac{1}{b_{i,j}}} = \left|\frac{b_{i,j} - \hat{b}_{i,j}}{\hat{b}_{i,j}}\right| = \left|\hat{\delta}_{ij}\right| = \frac{\dfrac{\left|b_{i,j} - \hat{b}_{i,j}\right|}{b_{i,j}}}{\left|1 - \dfrac{\hat{b}_{i,j} - b_{i,j}}{b_{i,j}}\right|} =$$

$$= \left|\frac{\delta_{b_{i,j}}}{1+\delta_{b_{i,j}}}\right| = \left|\frac{\delta_{i,j}}{1+\delta_{i,j}}\right|.$$

Також нескладно отримати, що

$$\left|\delta_{b_{i-1,j} + \frac{1}{b_{i,j}}}\right| \le \max_{i,j}\left\{\left|\delta_{i-1,j}\right|, \left|\frac{\delta_{i,j}}{1+\delta_{i,j}}\right|\right\},$$

$$\left|\hat{\delta}_{b_{i-1,j} + \frac{1}{b_{i,j}}}\right| \le \max_{i,j}\left\{\left|\hat{\delta}_{i,j}\right|, \left|\frac{\hat{\delta}_{i,j}}{1+\hat{\delta}_{i,j}}\right|\right\}.$$

Ці співвідношення справджуються і при перестановці індексів i, j.

При згортанні кожного з дробів у $\Phi_i^{(m)}$ зверху, використовуючи доведені вище співвідношення, отримуємо, що

$$\left|\delta\left(\mathop{D}_{j=1}^{m} \frac{1}{b_{i+j,i}}\right)\right| \le \max\left\{\left|\frac{\delta_{2,r}}{1+\delta_{2,r}}\right|,\ \left|\delta_{2,r+1}\right|,\ i+j=r,\ 1 \le r \le \left[\frac{(m-1)}{2}\right]\right\}.$$

Тоді модуль відносної похибки $\left|\delta(\Phi_i^{(m)})\right|$ при обчисленні $\Phi_i^{(m)}$ задовольняє співвідношення

$$\left|\delta(\Phi_i^{(m)})\right| \le \max_i\left\{\left|\delta\left(\mathop{D}_{j=1}^{m} \frac{1}{b_{i+j,i}}\right)\right|, \left|\delta\left(\mathop{D}_{j=1}^{m} \frac{1}{b_{i,i+j}}\right)\right|\right\}.$$

Позначимо через $\delta_i^{(k-1-i)}$ модуль відносної похибки при обчисленні двовимірного неперервного дробу

$$\Phi_i^{(k-1-i)} + \cfrac{1}{\Phi_{i+1}^{(k-2-i)} + \cfrac{1}{\Phi_{i+2}^{(k-3-i)} + \ddots \cfrac{1}{+\Phi_{k-1}^{(0)}}}},$$

де

$$\Phi_i^{(k-1-i)} = b_{i,i} + \mathop{D}_{j=1}^{k-1-i} \frac{1}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}_{j=1}^{k-1-i} \frac{1}{b_{i,i+j}}.$$

Тоді модуль відносної похибки при обчисленні двовимірного неперервного дробу (5) не перевищує величини

$$\left|\delta(f_k)\right| \le \max_i \left\{ \left|\delta_i^{(k-1-i)}\right|, \left| \frac{\delta_i^{(k-1-i)}}{1+\delta_i^{(k-1-i)}} \right| \right\} \le \max_{i,j} \left\{ \left|\delta_{i,j}^*\right|,\ 0 \le i, j \le k-1 \right\},$$

де

$$\delta_{i,j}^* = \begin{cases} \delta_{i,j}, & \max(i,j) = 2r+1, \\ \dfrac{\delta_{i,j}}{1+\delta_{i,j}}, & \max(i,j) = 2r, \end{cases} \qquad 1 \le r = [(k-1)/2].$$

Лему доведено. ♦

Твердження. *Нехай елементи двовимірного неперервного дробу* (1) *– додатні дійсні числа. Розглянемо два його* n *-ні наближення:*

$$f_n = \mathop{D}_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-1-i)}},$$

$$\Phi_i^{(n-1-i)} = b_{i,i} + \mathop{D}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{D}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \qquad \Phi_{n-1}^{(0)} = b_{n-1,n-1},$$

і

$$\hat{f}_n = \mathop{D}_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{\hat{\Phi}_i^{(n-1-i)}},$$

$$\hat{\Phi}_i^{(n-1-i)} = \hat{b}_{i,i} + \mathop{D}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i+j,i}}{\hat{b}_{i+j,i}} + \mathop{D}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i,i+j}}{\hat{b}_{i,i+j}}, \qquad \hat{\Phi}_{n-1}^{(0)} = \hat{b}_{n-1,n-1},$$

$$n = 1, 2, \ldots.$$

У наближенні $\hat{f}_n$ *при деякому* r, $1 \le r \le n-1$, *усі* $\hat{b}_{r,r} \ge b_{r,r}$, $\hat{b}_{r,j} \ge b_{r,j}$, $\hat{b}_{j,r} \ge b_{j,r}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *а при всіх решта наборах індексів* $\hat{b}_{i,j} = b_{i,j}$.

Тоді

$$(-1)^{r+1}(\hat{f}_n - f_n) \ge 0.$$

Д о в е д е н н я. Запишемо для наближень f_n і $\hat{f}_n$ їх залишки за формулами (3), (4):

$$Q_{i+k,i}^{(n-1-i)} = b_{i+k,i} + \frac{a_{i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i}^{(n-1-i)}}, \qquad Q_{i,i+k}^{(n-1-i)} = b_{i,i+k} + \frac{a_{i,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1}^{(n-1-i)}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1-i,$$

$$Q_{n-1,i}^{(n-1-i)} = b_{n-1,i}, \qquad Q_{i,n-1}^{(n-1-i)} = b_{i,n-1},$$

$$\hat{Q}_{i+k,i}^{(n-i)} = \hat{b}_{i+k,i} + \frac{a_{i+k+1,i}}{\hat{Q}_{i+k+1,i}^{(n-1-i)}}, \qquad \hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i)} = \hat{b}_{i,i+k} + \frac{a_{i,i+k+1}}{\hat{Q}_{i,i+k+1}^{(n-1-i)}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1-i,$$

$$\hat{Q}_{s-1,i}^{(s-1-i)} = \hat{b}_{s-1,i}, \qquad \hat{Q}_{i,s-1}^{(s-1-i)} = \hat{b}_{i,s-1}, \tag{6}$$

$$Q_i^{(n-1-i)} = \Phi_i^{(n-1-i)} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(n-2-i)}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad Q_{n-1}^{(0)} = \Phi_{n-1}^{(0)} = b_{n-1,n-1},$$

$$\hat{Q}_i^{(n-1-i)} = \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)} + \frac{a_{i+1,i+1}}{\hat{Q}_{i+1}^{(n-2-i)}}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \hat{Q}_{n-1}^{(0)} = \hat{\Phi}_{n-1}^{(0)} = \hat{b}_{n-1,n-1}. \tag{7}$$

Тоді

$$f_n - \hat{f}_n = \frac{a_{0,0}}{Q_0^{(n-1)}} - \frac{a_{0,0}}{\hat{Q}_0^{(n-1)}} = -\frac{a_{0,0}}{Q_0^{(n-1)}\hat{Q}_0^{(n-1)}}\left(Q_0^{(n-1)} - \hat{Q}_0^{(n-1)}\right).$$

Продовжуючи цей процес аналогічно, як і для одержання формули різниці між двома наближеннями двовимірного неперервного дробу [4], і враховуючи (7) та рівність $Q_r^{(n-1-r)} - \hat{Q}_r^{(n-1-r)} = b_{r,r} - \hat{b}_{r,r}$, маємо

$$f_n - \hat{f}_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^i \left(\hat{\Phi}_i^{(n-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)}\right) \prod_{j=0}^{i} a_{j,j}}{\prod_{j=0}^{i} Q_j^{(n-1-j)} \hat{Q}_j^{(n-1-j)}} + \frac{(-1)^r \left(\hat{b}_{r,r} - b_{r,r}\right) \prod_{j=0}^{r} a_{j,j}}{\prod_{j=0}^{r} Q_j^{(n-1-j)} \hat{Q}_j^{(n-1-j)}}. \tag{8}$$

Подібно, враховуючи одновимірні залишки (6) і те, що

$$Q_{r,j}^{(n-1-j)} - \hat{Q}_{r,j}^{(n-1-j)} = b_{r,j} - \hat{b}_{r,j}, \qquad Q_{j,r}^{(n-1-j)} - \hat{Q}_{j,r}^{(n-1-j)} = b_{j,r} - \hat{b}_{j,r},$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

одержимо формулу для різниці $\hat{\Phi}_i^{(n-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)}$:

$$\hat{\Phi}_i^{(n-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)} =$$

$$= (-1)^{r+i} \left(\left(\hat{b}_{r,i} - b_{r,i}\right) \prod_{j=1}^{r-i} \frac{a_{i+j,i}}{Q_{i+j,i}^{(n-1-i)}} + \left(\hat{b}_{i,r} - b_{i,r}\right) \prod_{j=1}^{r-i} \frac{a_{i,i+j}}{Q_{i,i+j}^{(n-1-i)}} \right). \tag{9}$$

Використовуючи (8), (9), маємо

$$f_n - \hat{f}_n = (-1)^r \sum_{i=0}^{r} \frac{\left(\left(\hat{b}_{r,i} - b_{r,i}\right) \prod_{j=1}^{r-i} \frac{a_{i+j,i}}{Q_{i+j,i}^{(n-1-i)}} + \left(\hat{b}_{i,r} - b_{i,r}\right) \prod_{j=1}^{r-i} \frac{a_{i,i+j}}{Q_{i,i+j}^{(n-1-i)}} \right) \prod_{j=0}^{i} a_{j,j}}{\prod_{j=0}^{i} Q_j^{(n-1-j)} \hat{Q}_j^{(n-1-j)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^r \left(\hat{b}_{r,r} - b_{r,r}\right) \prod_{j=0}^{r} a_{j,j}}{\prod_{j=0}^{r} Q_j^{(n-1-j)} \hat{Q}_j^{(n-1-j)}}.$$

Твердження доведено. ♦

Розглянемо скінченні двовимірні неперервні дроби

$$f = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}} = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{b_{i,i} + \Phi_i^{(n-1-i)}}, \tag{10}$$

$$\Phi_i^{(n-1-i)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}$$

і

$$\hat{f} = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{n-1} \frac{\hat{a}_{i,i}}{\hat{b}_{i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-1-i} \frac{\hat{a}_{i+j,i}}{\hat{b}_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-1-i} \frac{\hat{a}_{i,i+j}}{\hat{b}_{i,i+j}}} = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{n-1} \frac{\hat{a}_{i,i}}{\hat{b}_{i,i} + \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)}}, \tag{11}$$

$$\hat{\Phi}_i^{(n-1-i)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{\hat{a}_{i+j,i}}{\hat{b}_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{\hat{a}_{i,i+j}}{\hat{b}_{i,i+j}},$$

для яких область $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ є областю елементів [1, 4].

Позначимо через $\Delta a_{i,j}$, $\Delta b_{i,j}$ абсолютні похибки елементів $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\Delta a_{i,j} = a_{i,j} - \hat{a}_{i,j}, \qquad \Delta b_{i,j} = b_{i,j} - \hat{b}_{i,j}. \tag{12}$$

Нехай

$$\Delta f = f - \hat{f},$$

$$\Delta = \max\{\Delta_a, \Delta_b, \Delta_{a_1}, \Delta_{a_2}, \Delta_{b_1}, \Delta_{b_2}\}, \quad \Delta_a = \max_i |\Delta a_{i,i}|, \quad \Delta_b = \max_i |\Delta b_{i,i}|,$$

$$\Delta_{a_1} = \max_i \max_p |\Delta a_{p+i,i}|, \qquad \Delta_{a_2} = \max_i \max_p |\Delta a_{i,p+i}|,$$

$$\Delta_{b_1} = \max_i \max_p |\Delta b_{p+i,i}|, \qquad \Delta_{b_2} = \max_i \max_p |\Delta b_{i,p+i}|,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad p = 1, 2, \ldots, n-1-i.$$

Встановимо формулу для обчислення абсолютної похибки $\Delta f = f - \hat{f}$ двовимірного неперервного дробу (10), враховуючи (12) і методику роботи [1]. Для цього знову використаємо позначення залишків типу (6), (7) для дробів (10), (11):

$$Q_i^{(n-1-i)} = b_{i,i} + \Phi_i^{(n-1-i)} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(n-2-i)}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$Q_{n-1}^{(0)} = \Phi_{n-1}^{(0)} = b_{n-1,n-1},$$

$$\hat{Q}_i^{(n-1-i)} = \hat{b}_{i,i} + \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)} + \frac{\hat{a}_{i+1,i+1}}{\hat{Q}_{i+1}^{(n-2-i)}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\hat{Q}_{n-1}^{(0)} = \hat{\Phi}_{n-1}^{(0)} = \hat{b}_{n-1,n-1},$$

$$Q_{i+k,i}^{(n-1-i)} = b_{i+k,i} + \frac{a_{i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i}^{(n-1-i)}}, \qquad Q_{i,i+k}^{(n-1-i)} = b_{i,i+k} + \frac{a_{i,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1}^{(n-1-i)}},$$

$$\hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i)} = \hat{b}_{i+k,i} + \frac{\hat{a}_{i+k+1,i}}{\hat{Q}_{i+k+1,i}^{(n-1-i)}}, \qquad \hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i)} = \hat{b}_{i,i+k} + \frac{\hat{a}_{i,i+k+1}}{\hat{Q}_{i,i+k+1}^{(n-1-i)}},$$

з початковими умовами

$$Q_{n-1,i}^{(n-1-i)} = b_{n-1,i}, \quad Q_{i,n-1}^{(n-1-i)} = b_{i,n-1}, \quad \hat{Q}_{n-1,i}^{(n-1-i)} = \hat{b}_{n-1,i}, \quad \hat{Q}_{i,n-1}^{(n-1-i)} = \hat{b}_{i,n-1}.$$

Нехай

$$Q_i^{(n-1-i)} \neq 0, \quad \hat{Q}_i^{(n-1-i)} \neq 0, \quad Q_{i+k,i}^{(n-1-i)} \neq 0, \quad Q_{i,i+k}^{(n-1-i)} \neq 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1-i$. Тоді на першому кроці отримаємо

$$\Delta f = f - \hat{f} = \frac{a_{0,0}}{Q_0^{(n-1)}} - \frac{\hat{a}_{0,0}}{\hat{Q}_0^{(n-1)}} = \frac{\Delta a_{0,0}}{\hat{Q}_0^{(n-1)}} - a_{0,0}\,\frac{Q_0^{(n-1)} - \hat{Q}_0^{(n-1)}}{Q_0^{(n-1)}\hat{Q}_0^{(n-1)}} =$$

$$= \frac{\Delta a_{0,0}}{\hat{Q}_0^{(n-1)}} - \frac{a_{0,0}\Delta b_{0,0}}{Q_0^{(n-1)}\hat{Q}_0^{(n-1)}} - a_{0,0}\cdot\frac{\Phi_0^{(n-1)} - \hat{\Phi}_0^{(n-1)}}{Q_0^{(n-1)}\hat{Q}_0^{(n-1)}} -$$

$$- a_{0,0}\cdot\frac{a_{1,1}\hat{Q}_1^{(n-2)} - \hat{a}_{1,1}Q_1^{(n-2)}}{Q_0^{(n-1)}\hat{Q}_0^{(n-1)}Q_1^{(n-2)}\hat{Q}_1^{(n-2)}}. \qquad (13)$$

З урахуванням того, що

$$a_{i,i}\hat{Q}_i^{(n-1-i)} - \hat{a}_{i,i}Q_i^{(n-1-i)} = \Delta a_{i,i}Q_i^{(n-1-i)} - a_{i,i}\Delta b_{i,i} - a_{i,i}(\Phi_i^{(n-1-i)} - \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)}) -$$

$$- a_{i,i}\cdot\frac{a_{i+1,i+1}\hat{Q}_{i+1}^{(n-2-i)} - \hat{a}_{i+1,i+1}Q_{i+1}^{(n-2-i)}}{Q_{i+1}^{(n-2-i)}\hat{Q}_{i+1}^{(n-2-i)}}, \quad i = 0,1,\dots,n-1, \qquad (14)$$

і підставляючи (14) у (13), для абсолютної похибки отримаємо

$$\Delta f = f - \hat{f} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\prod_{p=0}^{i-1}\frac{a_{p,p}}{Q_p^{(n-1-p)}\hat{Q}_p^{(n-1-p)}}\cdot\frac{\Delta a_{i,i}Q_i^{(n-1-i)} - a_{i,i}\Delta b_{i,i}}{Q_i^{(n-1-i)}\hat{Q}_i^{(n-1-i)}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\prod_{p=0}^{i}\frac{a_{p,p}}{Q_p^{(n-1-p)}\hat{Q}_p^{(n-1-p)}}\cdot(\Phi_i^{(n-1-i)} - \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)}). \qquad (15)$$

При цьому вважаємо, що $\prod_{i=0}^{n} a = 1$, якщо $n < 0$.

Аналогічно до (14) маємо

$$a_{i+k,i}\hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i)} - \hat{a}_{i+k,i}Q_{i+k,i}^{(n-1-i)} = \Delta a_{i+k,i}Q_{i+k,i}^{(n-1-i)} - a_{i+k,i}\Delta b_{i+k,i} -$$

$$- a_{i+k,i}(a_{i+k+1,i}\hat{Q}_{i+k+1,i}^{(n-1-i)} - \hat{a}_{i+k+1,i}Q_{i+k+1,i}^{(n-1-i)})$$

і

$$a_{i,i+k}\hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i)} - \hat{a}_{i,i+k}Q_{i,i+k}^{(n-1-i)} = \Delta a_{i,i+k}Q_{i,i+k}^{(n-1-i)} - a_{i,i+k}\Delta b_{i,i+k} -$$

$$- a_{i,i+k}(a_{i,i+k+1}\hat{Q}_{i,i+k+1}^{(n-1-i)} - \hat{a}_{i,i+k+1}Q_{i,i+k+1}^{(n-1-i)}),$$

$$i = 0,1,\dots,n-1, \qquad k = 1,2,\dots,n-1-i.$$

Розпишемо тепер різницю $\Phi_i^{(n-1-i)} - \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)}$, враховуючи формули для одновимірних залишків:

$$\Phi_i^{(n-1-i)} - \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)} =$$

$$= \frac{a_{i+1,i}\hat{Q}_{i+1,i}^{(n-1-i)} - \hat{a}_{i+1,i}Q_{i+1,i}^{(n-1-i)}}{Q_{i+1,i}^{(n-1-i)}\hat{Q}_{i+1,i}^{(n-1-i)}} + \frac{a_{i,i+1}\hat{Q}_{i,i+1}^{(n-1-i)} - \hat{a}_{i,i+1}Q_{i,i+1}^{(n-1-i)}}{Q_{i,i+1}^{(n-1-i)}\hat{Q}_{i,i+1}^{(n-1-i)}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1-i}\prod_{\ell=1}^{k-1}\frac{(-a_{i+\ell,i})}{Q_{i+\ell,i}^{(n-1-i)}\hat{Q}_{i+\ell,i}^{(n-1-i)}}\cdot\frac{\Delta a_{i+k,i}Q_{i+k,i}^{(n-1-i)} - a_{i+k,i}\Delta b_{i+k,i}}{Q_{i+k,i}^{(n-1-i)}\hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i)}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1-i}\prod_{\ell=1}^{k-1}\frac{(-a_{i,i+\ell})}{Q_{i,i+\ell}^{(n-1-i)}\hat{Q}_{i,i+\ell}^{(n-1-i)}}\cdot\frac{\Delta a_{i,i+k}Q_{i.i+k}^{(n-1-i)} - a_{i,i+k}\Delta b_{i,i+k}}{Q_{i,i+k}^{(n-1-i)}\hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i)}}. \qquad (16)$$

Підставляючи формулу різниці (16) у формулу для абсолютної похибки (15), маємо

$$\Delta f = f - \hat{f} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \prod_{p=0}^{i-1} \frac{a_{p,p}}{Q_p^{(n-1-p)} \hat{Q}_p^{(n-1-p)}} \cdot \frac{\Delta a_{i,i} Q_i^{(n-1-i)} - a_{i,i} \Delta b_{i,i}}{Q_i^{(n-1-i)} \hat{Q}_i^{(n-1-i)}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \prod_{p=0}^{i} \frac{a_{p,p}}{Q_p^{(n-1-p)} \hat{Q}_p^{(n-1-p)}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{n-1-i} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{(-a_{i+\ell,i})}{Q_{i+\ell,i}^{(n-1-i)} \hat{Q}_{i+\ell,i}^{(n-1-i)}} \cdot \frac{\Delta a_{i+k,i} Q_{i+k,i}^{(n-1-i)} - a_{i+k,i} \Delta b_{i+k,i}}{Q_{i+k,i}^{(n-1-i)} \hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1-i} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{(-a_{i,i+\ell})}{Q_{i,i+\ell}^{(n-1-i)} \hat{Q}_{i,i+\ell}^{(n-1-i)}} \cdot \frac{\Delta a_{i,i+k} Q_{i.i+k}^{(n-1-i)} - a_{i,i+k} \Delta b_{i,i+k}}{Q_{i,i+k}^{(n-1-i)} \hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i)}} \right\}. \quad (17)$$

Означення [**1**]. Область елементів Ω називається *областю абсолютної стійкості двовимірного неперервного дробу* (10), якщо існує дійсна додатна стала C, що залежить від області Ω і не залежить від n, така, що

$$\Delta f = \left| f - \hat{f} \right| \le C\Delta .$$

Теорема. *Область*

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \le \frac{t(1-t)}{2}, \ \ 0 < t < \frac{1}{2} \right\}$$

є областю абсолютної стійкості двовимірного неперервного дробу

$$f = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-1-i)}} , \quad (18)$$

$$\Phi_i^{(n-1-i)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-1-i} \frac{a_{i,i+j}}{1} ,$$

причому

$$C \le \frac{2(1-t)\sqrt{1-2t(1-t)} - (1-2t)}{(1-2t)\sqrt{1-2t(1-t)}} .$$

Д о в е д е н н я. Для двовимірного неперервного дробу з частинними знаменниками, що дорівнюють одиниці, формула (17) має вигляд

$$\Delta f = f - \hat{f} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \prod_{p=0}^{i-1} \frac{a_{p,p}}{Q_p^{(n-1-p)} \hat{Q}_p^{(n-1-p)}} \cdot \frac{\Delta a_{i,i}}{\hat{Q}_i^{(n-1-i)}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \prod_{p=0}^{i} \frac{a_{p,p}}{Q_p^{(n-1-p)} \hat{Q}_p^{(n-1-p)}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{n-1-i} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{(-a_{i+\ell,i})}{Q_{i+\ell,i}^{(n-1-i)} \hat{Q}_{i+\ell,i}^{(n-1-i)}} \cdot \frac{\Delta a_{i+k,i}}{\hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1-i} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{(-a_{i,i+\ell})}{Q_{i,i+\ell}^{(n-1-i)} \hat{Q}_{i,i+1}^{(n-1-i)}} \cdot \frac{\Delta a_{i,i+k}}{\hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i)}} \right\} .$$

Оцінимо Δf за абсолютною величиною:

$$|\Delta f| = \left| f - \hat{f} \right| \le \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{p=0}^{i-1} \frac{|a_{p,p}|}{\left| Q_p^{(n-1-p)} \right| \left| \hat{Q}_p^{(n-1-p)} \right|} \cdot \left| \frac{\Delta a_{i,i}}{\hat{Q}_i^{(n-1-i)}} \right| +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{p=0}^{i}\frac{\left|a_{p,p}\right|}{\left|Q_p^{(n-1-p)}\right|\left|\hat{Q}_p^{(n-1-p)}\right|}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{n-1-i}\prod_{\ell=1}^{k-1}\frac{\left|a_{i+\ell,i}\right|}{\left|Q_{i+\ell,i}^{(n-1-i)}\right|\left|\hat{Q}_{i+\ell,i}^{(n-1-i)}\right|}\cdot\frac{\left|\Delta a_{i+k,i}\right|}{\left|\hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i)}\right|}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1-i}\prod_{\ell=1}^{k-1}\frac{\left|a_{i,i+\ell}\right|}{\left|Q_{i,i+\ell}^{(n-1-i)}\right|\left|\hat{Q}_{i,i+\ell}^{(n-1-i)}\right|}\cdot\left|\frac{\Delta a_{i,i+k}}{\hat{Q}_{i,i+k}^{(n-1-i)}}\right|\right\}. \tag{19}$$

Використовуючи техніку доведення оцінок для залишків двовимірних неперервних дробів у [5], легко встановлюються оцінки знизу для залишків дробу (18):

$$\left|Q_i^{(n-1-i)}\right|\ge -t+\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-2t(1-t)})\,,$$

$$\left|Q_{i+k,i}^{(n\text{-}1\text{-}i)}\right|\ge\ \hat{Q}_{i+k,i}^{(n-1-i)}\ge\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-2t(1-t)})\,,$$

$$\left|Q_{i,i+k}^{(n\text{-}1\text{-}i)}\right|\ge\hat{Q}_{i,i+k}^{(n\text{-}1\text{-}i)}\ge\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-2t(1-t)}),\quad i=0,\ldots,n-1,\quad k=1,2,\ldots,n-1-i\,.$$

Підставимо ці оцінки залишків двовимірного неперервного дробу (18) у нерівність (19) і матимемо

$$|\Delta f|\le\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2t(1-t)}{(1-2t+\sqrt{1-2t(1-t)})^2}\right)^i\cdot\frac{2\Delta_a}{1-2t+\sqrt{1-2t(1-t)}}+$$

$$+2\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2t(1-t)}{(1-2t+\sqrt{1-2t(1-t)})^2}\right)^{i+1}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n-1-i}\left(\frac{2t(1-t)}{(1+\sqrt{1-2t(1-t)})^2}\right)^{k-1}\cdot\frac{(\Delta_{a_1}+\Delta_{a_2})}{1+\sqrt{1-2t(1-t)}}\le$$

$$\le\frac{\Delta_a}{1-2t}+\frac{\sqrt{1-2t(1-t)}-(1-2t)}{2(1-2t)\sqrt{1-2t(1-t)}}(\Delta_{a_1}+\Delta_{a_2})\,.$$

Виберемо $\Delta=\max\{\Delta_a,\Delta_{a_1},\Delta_{a_2}\}$. Тоді

$$|\Delta f|\le\left(\frac{1}{1-2t}+\frac{\sqrt{1-2t(1-t)}-(1-2t)}{(1-2t)\sqrt{1-2t(1-t)}}\right)\Delta=$$

$$=\frac{2(1-t)\sqrt{1-2t(1-t)}-(1-2t)}{(1-2t)\sqrt{1-2t(1-t)}}\Delta\,.$$

Теорему доведено. ♦

Примітка. Якщо покласти $\frac{1}{2}t(1-t)=\beta$, тоді

$$C\le\frac{\sqrt{1-4\beta}-\sqrt{1-8\beta}}{\sqrt{1-4\beta}\,\sqrt{1-8\beta}},\qquad 0\le\beta<\alpha\le\frac{1}{8}\,.$$

Висновки. Отримані результати можна використати при дослідженні збіжності двовимірних неперервних дробів та встановленні похибок наближення двовимірними неперервними дробами.

1. *Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О. М.* Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 3–7.

2. *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Про стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комолексними елементами // Мат. студії. − 2006. − **25**, № 2. − С. 207−212.
3. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. − Москва: Мир, 1985. − 414 с.

   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. − Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. − xxii + 428 p. − Encyclopedia of Mathematics and its Applications / Ed. G.-C. Rota. − Vol. 11.
4. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. − Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2010. − 218 с.
5. *Кучмінська Х. Й.* Про теореми типу Ворпіцького для двовимірного неперервного дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2010. − **53,** № 3. − С. 17−26.
6. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. − 1984. − Вып. 20. − С. 27−31.
7. *Сусь О. М.* Деякі питання аналітичної теорії двовимірних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. − Львів, 1996. − 123 с.
8. *Jones W. B., Thron W. J.* Numerical stability in evaluating continued fractions // Math. Comput. − 1974. − **28**, No. 127. − P. 795−810.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

С использованием свойств остатков двумерной непрерывной дроби установлены относительная и абсолютная погрешности при вычислении двумерных непрерывных дробей, а также область их абсолютной устойчивости.

STABILITY IN EVALUATING TWO-DIMENSION CONTINUED FRACTIONS

Using tail properties of a two-dimensional continued fraction the relative and absolute errors in evaluating two-dimensional continued fractions and their absolute stability domain are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.04.13