

**СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СЛОЯ**

*Получены аналитические решения задач стационарной теплопроводности и теории упругости для полубесконечного слоя при выполнении условий гладкого контакта на торце. Метод решения основан на приведении уравнений Ламе к двум совместно и одному отдельно решаемым уравнениям. Применение интегральных преобразований к полученным уравнениям равновесия позволило получить точное решение задачи в пространстве трансформант. Разработана методика вычисления кратных интегралов, содержащих осциллирующие функции. Исследованы поля температуры и напряжений в полубесконечном слое в зависимости от параметров площадки, по которой приложена нагрузка, и условий на нижней грани слоя.*

**Введение.** Ряд методов исследования трехмерных задач теории упругости основывается на представлении решений однородных уравнений Ламе с помощью гармонических и бигармонических функций. Такие представления даны Буссинеском, Кельвиным и Тайтом [16]. Б. Г. Галеркин выразил общее решение однородных уравнений равновесия для изотропного тела через три бигармонических функции. В работах П. Ф. Папковича [11] и Г. Нейбера [8] предложено решение, содержащее четыре гармонические функции, что сводит решение уравнений Ламе к решению последовательности гармонических уравнений с неразделенными граничными условиями. Вопрос о возможности уменьшения числа гармонических функций до трех был рассмотрен в работах [18, 21].

С помощью функций комплексного переменного и интегралов типа Коши в монографиях Г. В. Колосова [5] и Н. И. Мусхелишвили [7] разработан эффективный метод решения плоских граничных задач теории упругости, ставший впоследствии классическим. Хотя этот метод непосредственно неприменим к пространственным задачам теории упругости, аппарат функций комплексной переменной используется и при решении задач данного класса. Так, в работе Г. Н. Положения [12] предложен метод решения осесимметричных пространственных задач теории упругости, связанный с использованием двух  $P$ -аналитических функций, являющийся аналогом метода комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили.

Еще одним методом исследования трехмерных задач теории упругости является метод интегральных уравнений, с помощью которого доказаны теоремы существования и единственности решения краевых задач статики. Этот метод часто служит основой для разработки алгоритмов численного решения задач теории упругости [6].

Широко применяется в задачах пространственной теории упругости метод интегральных преобразований. С помощью соответствующего интегрального преобразования осуществляется переход к более простой задаче в пространстве трансформант. Основная трудность при решении задач таким способом заключается в проведении обращения интегральных преобразований. Обширная библиография работ по использованию этого метода в задачах теории упругости приведена в монографии [20].

Необходимо отметить высокую эффективность и при решении пространственных задач теории упругости метода  $R$ -функций В. Л. Рвачева [17]. Применение этого метода позволяет на аналитическом уровне учесть содержащуюся в постановке краевой задачи геометрическую информацию.

Одним из основных методов, применяемых при решении пространственных задач теории упругости, является метод Фурье, который основан на применении криволинейных ортогональных систем координат, допуска-

ющих разделение переменных в трехмерном уравнении Лапласа для задач статики. При решении задач методом разделения переменных используются различные представления решений уравнений равновесия через функции напряжений. С помощью таких представлений исходная задача приводится к решению дифференциальных уравнений более простой структуры. Каждая функция напряжений в этих уравнениях не связана с другими, но в граничные условия она при этом входит совместно с остальными. Чаще других используется решение в форме Папковича – Нейбера, поскольку оно позволяет применять при решении граничных задач теории упругости классические решения теории потенциала, представляемые в форме рядов и интегралов, содержащих специальные функции.

Метод исследования пространственных задач математической физики – метод собственных вектор-функций, который является векторным аналогом метода Фурье, предложен в [19]. Он заключается в построении собственных функций векторной структуры на граничной поверхности тел. С помощью этого метода были получены решения сложных трехмерных задач теории упругости.

В монографии [4] разработан метод двумерных сингулярных интегральных уравнений для трехмерных задач стационарной теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами, благодаря которому решены ряд задач для полубесконечного тела с трещинами.

В данной работе используется новый подход, предложенный Г. Я. Поповым [14]. Метод основан на приведении уравнений Ламе к одному независимо и двум совместно решаемым уравнениям. При этом граничные условия также разделяются, что существенно упрощает технику вычислений по сравнению с традиционными методами решений.

**Постановка задачи стационарной теплопроводности.** Изучение температурного распределения в слое является важным как с практической, так и с теоретической точки зрения. Задачи теплопроводности для полубесконечного слоя исследовались многими авторами в статической и динамической постановках [3, 9, 10, 22–27]. Зачастую численный расчет по полученным формальным решениям являлся проблематичным в связи с наличием входящих в формулы интегралов от осциллирующих функций.

Рассмотрим упругий полубесконечный слой (рис. 1), описываемый в декартовой системе координат соотношениями

$$0 < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < h. \quad (1)$$

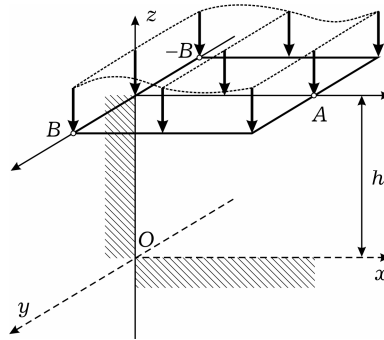


Рис. 1

Грани  $x = 0$  и  $z = 0$  предполагаются теплоизолированными:

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (2)$$

здесь  $T$  – температура слоя. На грани  $z = h$  по участку  $x \in [0, A]$ ,  $y \in [-B, B]$  задана температура:

$$T(x, y, h) = f(x, y), \quad x \in [0, A], \quad y \in [-B, B]. \quad (3)$$

Требуется построить в области (1) убывающее на бесконечности решение уравнения Лапласа

$$\Delta T(x, y, z) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4)$$

удовлетворяющее краевым условиям (2), (3).

**Построение решения задачи методом интегральных преобразований.** Применим к краевой задаче (2)–(4) косинус-преобразование Фурье по переменной  $x$  и полное преобразование Фурье по переменной  $y$ . В пространстве трансформант этих интегральных преобразований исходная задача запишется в форме

$$T''_{\alpha\beta}(z) - N^2 T_{\alpha\beta}(z) = 0, \quad z \in (0, h), \quad (5)$$

$$T'_{\alpha\beta}(0) = 0, \quad T_{\alpha\beta}(h) = f_{\alpha\beta}, \quad N^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad (6)$$

где  $\alpha, \beta$  – параметры преобразования Фурье. Зная общее решение уравнения (5) и удовлетворяя граничным условиям (6), найдем решение задачи в трансформантах:

$$T_{\alpha\beta}(z) = f_{\alpha\beta} \cdot F_N(z), \quad F_N(z) = \frac{\operatorname{ch} Nz}{\operatorname{ch} Nh}. \quad (7)$$

Применяя последовательно обратные преобразования Фурье к формуле (7), построим решение исходной задачи

$$T(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_{\alpha\beta} \cdot F_N(z) \cdot \cos \alpha x \cdot e^{-i\beta y} d\alpha d\beta.$$

С использованием формулы (1.314(3)) из [2] построенное решение запишем в виде

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) \left( \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F_N(z) [\cos \alpha(x - \xi) + \cos \alpha(x + \xi)] e^{-i\beta(y - \eta)} d\alpha d\beta \right) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Учитывая тот факт, что подынтегральная функция является четной по переменной  $\alpha$ , и используя формулу Эйлера, преобразуем правую часть равенства (8). Применение известной формулы [13]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta = \int_0^\infty t F(t) J_0(t\sqrt{x^2 + y^2}) dt,$$

где  $J_0(t)$  – функция Бесселя, позволяет записать решение задачи в виде

$$T(x, y, z) = \frac{C}{2\pi} \int_0^A \int_{-B}^B \left( \int_0^\infty t F_t(z) \cdot \tilde{J}_0(t, x, y, \xi, \eta) dt \right) d\xi d\eta. \quad (9)$$

Здесь в качестве функции  $f(x, y)$  выбрано  $f(x, y) = C$ ,  $C = \text{const}$ , а

$$\tilde{J}_0(t, x, y, \xi, \eta) = J_0(t\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) + J_0(t\sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2}).$$

**Методика вычисления кратных интегралов в полученном решении.** Опишем подробно методику вычисления полученных интегралов. С этой целью поменяем порядок интегрирования в интеграле (9) и воспользуемся интегральным представлением функции Бесселя [1]

$$\begin{aligned} J_0(t\sqrt{(x \pm \xi)^2 + (y - \eta)^2}) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos [t \cos \psi (x \pm \xi)] \cos [t \sin \psi (y - \eta)] d\psi, \end{aligned}$$

которое подставим в формулу (9) и вычислим входящие туда повторные интегралы. После элементарных преобразований получим

$$T(x, y, z) = C \frac{4AB}{\pi^2} \times \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} t F_t(z) S_t^{A,B}(\psi) \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) d\psi dt, \quad (10)$$

где

$$S_t^{A,B}(\psi) = (tA \cos \psi)^{-1} \sin(tA \cos \psi) (tB \sin \psi)^{-1} \sin(tB \sin \psi).$$

Рассмотрим интеграл

$$J_t^{A,B}(x, y) = \frac{4AB}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} S_t^{A,B}(\psi) \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) d\psi. \quad (11)$$

Функция  $S_t^{A,B}(\psi)$  – бесконечно дифференцируемая по переменной  $\psi$ . Кроме того она является четной, что позволяет путь интегрирования в интеграле принять равным  $(-\pi/2, \pi/2)$ , уменьшив его значение в 2 раза. Выбрав замену переменной  $\sin \psi = \tau$ , преобразуем соотношение (11) к виду

$$J_t^{A,B}(x, y) = \frac{2AB}{\pi^2} \int_{-1}^1 F_{t,\tau}^{A,B}(x, y) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad (12)$$

$$F_{t,\tau}^{A,B}(x, y) = \frac{\sin(tA\sqrt{1-\tau^2}) \sin(tB\tau)}{tA\sqrt{1-\tau^2} tB\tau} \cos(tx\sqrt{1-\tau^2}) \cos(ty\tau).$$

Интеграл в (12) вычисляли на основании квадратурной формулы Гаусса. Окончательно решение (10) примет вид

$$T(x, y, z) = \frac{2C}{\pi N} \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} t \frac{\text{ch}(tz)}{\text{ch}(ht)} \cdot F_{t,\tau_k}^{A,B}(x, y) dt, \quad (13)$$

где  $\tau_k$  – нули многочлена Чебышева 1-го рода.

**Результаты численных расчетов.** В табл. 1 приведены значения температуры, рассчитанные по формуле (13), вдоль боковой грани слоя при толщине слоя  $h = 1$ . Три рассмотренных случая соответствуют участкам температурной нагрузки, выбранным в форме: квадрата (при  $B = A/2$ ); прямоугольника, вытянутого вдоль оси  $y$  (при  $B = 2A$ ); прямоугольника, вытянутого вдоль оси  $x$  (при  $B = A/4$ ). Как следует из анализа полученных данных, максимальные значения температуры достигаются при размере участка нагрева  $B/A = 2$ . При распределении температуры по прямоугольнику, вытянутому вдоль оси  $x$ , достигаются минимальные значения температуры. Для всех трех случаев характерно расположение экстремальных значений на границе области.

При увеличении толщины слоя  $h$  общая картина распределения температуры сохраняется при уменьшении ее абсолютных значений.

Таблица 1

$z$	$T(0,0,z)$					
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$B = A/2$	0.3601	0.3799	0.4432	0.5634	0.7629	0.9887
$B = 2A$	0.7090	0.7220	0.7608	0.8255	0.9215	0.9998
$B = A/4$	0.1944	0.2076	0.2526	0.3515	0.5735	0.9675

**Постановка задачи теории упругости для полуслоя и сведение ее к одномерной.** Упругий слой (см. рис. 1)  $0 \leq x$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 < z < h$  (с модулем сдвига  $G$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$ ) загружен нормальной сжимающей нагрузкой по грани  $z = h$ . На гранях  $x = 0$  и  $z = 0$  заданы условия гладкого контакта. Требуется определить смещения  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  точек упругой среды. С целью решить поставленную задачу при произвольном нормальном сжимающем нагружении получим сперва решение для единичной нормальной сжимающей силы, приложенной в произвольной точке с координатами  $(a, b, h)$ . Постановку задачи в этом случае формулируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta(u_0 \ v_0 \ w_0)^\top + \mu_0(\Theta' \ \Theta^\bullet \ \Theta')^\top &= 0, \\ \sigma_z|_{z=h} &= -\delta(x-a)\delta(y-b), \quad \tau_{zx}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=h} = 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad \tau_{xz}|_{x=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{x=0} = 0, \\ w|_{z=0} &= 0, \quad \tau_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Штрихом здесь и далее обозначаем производную по переменной  $x$ , точкой – по переменной  $y$ , запятой – по переменной  $z$ ;  $\Theta = u' + v^\bullet + w'$  – объемное расширение;  $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$ ;  $\delta(\xi)$  – дельта-функция Дирака.

Переформулируем краевые условия (14) в терминах смещений, учитывая известные формулы связи смещений и напряжений [10] и введем неизвестные функции, связанные с исходными соотношениями [14]

$$\begin{aligned} Z(x, y, z) &= u'(x, y, z) + v^\bullet(x, y, z), \\ \tilde{Z}(x, y, z) &= v'(x, y, z) - u^\bullet(x, y, z). \end{aligned} \quad (15)$$

В обозначениях (15) исходная краевая задача запишется в форме

$$\begin{aligned} \Delta Z + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w') &= 0, \quad \Delta w + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w')' = 0, \\ \mu Z(x, y, h) + (1 - \mu)w'(x, y, h) &= -\delta(x-a)\delta(y-b)/(2G\mu_0), \\ \nabla_{xy}w(x, y, h) + Z'(x, y, h) &= 0, \quad \tilde{Z}'(x, y, h) = 0, \\ Z'(0, y, z) = 0, \quad w'(0, y, z) = 0, \quad \tilde{Z}(0, y, z) &= 0, \\ \nabla_{xy}w(x, y, 0) + Z'(x, y, 0) &= 0, \quad w(x, y, 0) = 0, \\ \tilde{Z}'(x, y, 0) = 0, \quad \nabla_{xy} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Дальнейшее применение преобразования Фурье по переменной  $y$  и косинус-преобразования по переменной  $x$  сводит задачу (16), (17) к одномерным задачам, одна из которых содержит два совместно решаемых уравнения

$$\begin{aligned} w''_{\beta\alpha}(z) - \mu_*^{-1}N^2w_{\beta\alpha}(z) + \mu_*^{-1}\mu_0Z'_{\beta\alpha}(z) &= 0, \quad 0 < z < h, \\ Z''_{\beta\alpha}(z) - N^2[\mu_*Z_{\beta\alpha}(z) + \mu_0w'_{\beta\alpha}(z)] &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} -N^2 w_{\beta\alpha}(h) + Z'_{\beta\alpha}(h) &= 0, \\ \mu Z_{\beta\alpha}(h) + (1 - \mu)w'_{\beta\alpha}(h) &= -(2G\mu_0)^{-1} \cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}, \\ w_{\beta\alpha}(0) = 0, \quad -N^2 w_{\beta\alpha}(0) + Z'_{\beta\alpha}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Вторая краевая задача формулируется относительно неизвестной функции  $\tilde{Z}_{\beta\alpha}(z)$  и является однородной, следовательно,  $\tilde{Z}(x, y, z) = 0$ .

Для записи системы однородных уравнений (18) в векторном виде введем в рассмотрение вектор и матрицы

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} w_{\beta\alpha}(z) \\ Z_{\beta\alpha}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mu_*^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ -N^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях система (18) формулируется в форме векторного уравнения

$$L_2[\mathbf{y}(z)] = 0, \quad 0 < z < h, \quad (20)$$

где  $L_2 \equiv \mathbf{I}\mathbf{y}''(z) + \mu_0 \mathbf{Q}\mathbf{y}'(z) - N^2 \mathbf{P}\mathbf{y}(z)$ ;  $\mathbf{I}$  – единичная матрица второго порядка.

Прежде чем построить решение векторного уравнения (20), требуется найти решение матричного уравнения

$$L_2[\mathbf{Y}(z)] = 0, \quad 0 < z < h. \quad (21)$$

Метод получения решения матричного уравнения (21) подробно изложен в [15], где также указан способ построения фундаментальной матричной системы решений уравнения (21)  $\mathbf{Y}_-(z)$ ,  $\mathbf{Y}_+(z)$ . С ее помощью решение векторного уравнения (20) строим как комбинацию матриц

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(z) &= \mathbf{Y}_-(z)(C_0^1 \ C_0^0)^\top + \mathbf{Y}_+(z)(C_1^1 \ C_1^0)^\top, \\ \mathbf{Y}_\mp(z) &= \mu_0 e^{\mp Nz} \begin{pmatrix} -Nz \mp \alpha & \pm \mu_*^{-1} z \\ \mp N^2 z & \mu_*^{-1}(Nz \mp \alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha = 3 - 4\mu, \quad \mu_* = 1 + \mu_0. \end{aligned}$$

Неизвестные постоянные  $C_i^j$ ,  $i, j = 0, 1$ , находим из граничных условий (19).

Трансформанты искомым функций примут вид

$$\begin{aligned} w_{\beta\alpha}(z) &= \frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2GD_N} \cdot F_1(N, z), \\ Z_{\beta\alpha}(z) &= \frac{\cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{2GD_N} \cdot F_2(N, z), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(N, z) &= (z + h)(\operatorname{sh} N(h - z)) - (h - z)(\operatorname{ch} N(h + z)) + \\ &\quad + \mu_1^{-1} \frac{1}{N} (-\operatorname{ch} N(h + z) + \operatorname{ch} N(h - z)), \\ F_2(N, z) &= N(z + h) \operatorname{ch} N(h - z) + N(h - z) \operatorname{ch} N(h + z) - \\ &\quad - \mu_0^{-1} (\operatorname{sh} N(h + z) + \operatorname{sh} N(h - z)), \\ D_N &= 4Nh + 2 \operatorname{sh}(2Nh). \end{aligned}$$

Трансформанты исходных смещений отыскиваются по формулам

$$u_{\beta\alpha}(z) = \alpha N^{-2} Z_{\beta\alpha}(z), \quad v_{\beta\alpha}(z) = i\beta N^{-2} Z_{\beta\alpha}(z). \quad (23)$$

Чтобы найти оригиналы смещений, применим к (22), (23) обратные преобразования Фурье

$$\begin{aligned} w_0(x, y, z) &= \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F_1(N, z)}{D_N} \cdot e^{-i\beta(y-b)} \cos \alpha a \cdot \cos \alpha x \, d\beta \, da, \\ u_0(x, y, z) &= \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \cdot \cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{N^2 D_N} \cdot F_2(N, z) e^{-i\beta y} \cdot \sin \alpha x \, d\beta \, da, \\ v_0(x, y, z) &= \frac{1}{2G\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{i\beta \cdot \cos \alpha a \cdot e^{i\beta b}}{N^2 D_N} \cdot F_2(N, z) e^{-i\beta y} \cdot \sin \alpha x \, d\beta \, da. \end{aligned} \quad (24)$$

В соотношении для  $w_0(x, y, z)$  из (24) воспользуемся формулой Эйлера, формулой (1.314.1)) из [2], четностью подынтегральной функции по переменной  $\alpha$ , а также формулой [13]

$$w_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi G} \int_0^{\infty} t \cdot \frac{\tilde{J}_0(t, x, y, a, b)}{D_t} F_1(t, z) \, dt.$$

Построенное смещение от единичной нормальной сжимающей силы позволяет найти смещение в слое при произвольной сжимающей нагрузке с интенсивностью  $p(a, b)$ , приложенной по площадке  $0 < x < A$ ,  $-B < y < B$ :

$$w(x, y, z, A, B) = \int_0^A \int_{-B}^B p(a, b) w_0(x, y, z; a, b) \, da \, db. \quad (25)$$

Заметим, что при такой постановке задача эквивалентна задаче для бесконечного слоя  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 < z < h$  с распределенной по участку  $-A < x < A$ ,  $-B < y < B$  нагрузкой.

Приведем формулу (25) к виду, удобному для численной реализации, используя описанную выше методику:

$$w(x, y, z) = \frac{2}{\pi^2 G} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} S_t^{A, B}(\psi) \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) \frac{F_1(t, z)}{t D_t} \, d\psi \, dt. \quad (26)$$

Выражения для смещений  $u(x, y, z)$  и  $v(x, y, z)$  найдем аналогично, как и для смещения  $w(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \\ &= \frac{2}{\pi^2 G} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} S_t^{A, B}(\psi) \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) \frac{F_2(t, z)}{t D_t} \, d\psi \, dt, \\ v(x, y, z) &= \\ &= \frac{2}{\pi^2 G} \left( -\frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} S_t^{A, B}(\psi) \cos(tx \cos \psi) \cos(ty \sin \psi) \frac{F_2(t, z)}{t D_t} \, d\psi \, dt. \end{aligned}$$

Совершим замену переменных и введем обозначения (далее штрихи над символами опускаем)  $z = z'h$ ,  $z' \in [0, 1]$ ,  $A_h = A/h$ ,  $B_h = B/h$ . Тогда формула смещения (26) примет вид

$$w(x, y, z) = \frac{h}{\pi G N} \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \frac{F_{t, \tau_k}^{A/h, B/h}(x, y)}{t \sqrt{1 - \tau_k^2} \tau_k} F_1(t, z) \, dt.$$

Воспользовавшись известной формулой, связывающей напряжения и смещения, запишем окончательное выражение для напряжения:

$$\sigma_x^{(1)}(x, y, z) = \frac{2}{\pi N} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{1-\tau_k^2}}{\tau_k} \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{D_t^{(1)}} \cdot \{(z+1) \operatorname{ch} t(1-z) + (1-z) \operatorname{ch} t(1+z)\} dt + \sum_{k=1}^N \frac{\mu_0^{-1} \tau_k^2 - 1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{D_t^{(1)} \cdot t} \cdot \{\operatorname{sh} t(1+z) + \operatorname{sh} t(1-z)\} dt \right],$$

где

$$F(t, \tau_k) = \sin(tA_h \sqrt{1-\tau_k^2}) \sin(tB_h \tau_k) \cos(tx \sqrt{1-\tau_k^2}) \cos(ty \tau_k),$$

$$D_t^{(1)} = \operatorname{sh} 2t + 2t.$$

В случае, когда нижняя грань  $z = 0$  жестко закреплена, соотношение для напряжения запишется так:

$$\sigma_x^{(2)}(x, y, z) = \frac{2}{\pi N} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{1-\tau_k^2}}{\tau_k} \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{D_t^{(2)}} \cdot \left\{ (1-z) \operatorname{sh} t(1+z) + \frac{2}{x} tz \cdot \operatorname{ch} t(1-z) + \left( \frac{1}{x} z - 1 \right) \operatorname{sh} t(1-z) \right\} dt + \sum_{k=1}^N \frac{\mu_0^{-1} \tau_k^2 - 1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{D_t^{(2)} \cdot t} \cdot \{\operatorname{ch} t(1+z) - \operatorname{ch} t(1-z)\} dt + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau_k \sqrt{1-\tau_k^2}} \int_0^\infty \frac{F(t, \tau_k)}{\tilde{D}_t^{(2)}} \cdot \left\{ \gamma_2 \frac{1}{t} \operatorname{ch} t(1-z) + \mu_0 \mu \frac{2}{x} \operatorname{sh} t(1-z) \right\} dt \right],$$

где  $D_t^{(2)} = \operatorname{ch} 2t + \frac{1}{x} \left( 2t^2 + \frac{x^2 + 1}{2} \right)$ ,  $\gamma_2 = \mu_0 \mu (x^{-1} - \mu_1^{-1}) - \mu$ ,  $\mu_1 = (2 - 2\mu)^{-1}$ .

**Результаты численных расчетов.** В результате расчетов (они проводились для упругих материалов двух видов – стекло:  $\mu = 1/4$ ,  $G = 26.2$  ГПа и медь:  $\mu = 1/3$ ,  $G = 44.7$  ГПа), выявлено, что величина нормального напряжения на боковой стенке слоя по абсолютному значению существенно больше, когда нижняя грань жестко закреплена, по сравнению со случаем, когда на нижней грани заданы условия гладкого контакта. В табл. 2 приведены значения нормального напряжения  $\sigma_x^{(2)}(x, y, z)$  на боковой грани для случая, когда нижняя грань полуслоя жестко закреплена. Исследована зависимость величины напряжений от формы участка распределения нагрузки и материала среды. Как видно, значения нормальных напряжений для материала с коэффициентом Пуассона  $\mu = 1/3$  выше, чем для материала с  $\mu = 1/4$ . Для случая  $\mu = 1/3$  при распределении нагрузки по квадратному участку и по прямоугольной площадке, вытянутой вдоль оси  $x$ , наблюдаются положительные значения нормального напряжения, что означает отрыв полуслоя от стенки. Значения растягивающих напряжений выше, когда участок распределения нагрузки имеет форму квадрата. Значения сжимающих напряжений увеличиваются при прямоугольной форме участка приложения нагрузки, влияние нагрузки начинает существенно сказываться на абсолютной величине напряжений примерно при  $2/3$  высоты слоя  $h$ . Максимального значения, равного  $-0.7138$ , напряжение достигает в случае, когда нагрузка распределена по прямоугольнику, вытянутому вдоль оси  $x$ , при  $\mu = 1/3$ .



Таблица 2

		$\sigma_x^{(2)}(0, 0, z)$					
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$B = A/2$	$\mu = 1/4$	-0.0055	-0.0185	-0.0606	-0.1402	-0.2624	-0.4844
	$\mu = 1/3$	0.0816	0.0278	-0.0471	-0.1587	-0.3174	-0.5777
$B = 2A$	$\mu = 1/4$	-0.0914	-0.0632	-0.0789	-0.1342	-0.2171	-0.4159
	$\mu = 1/3$	-0.0540	-0.0393	-0.0703	-0.1415	-0.2402	-0.4552
$B = A/4$	$\mu = 1/4$	0.0024	-0.0098	-0.0394	-0.1001	-0.2236	-0.5639
	$\mu = 1/3$	0.0578	0.0177	-0.0336	-0.1179	-0.2804	-0.7138

**Заключение.** В работе получено аналитическое решение задач стационарной теплопроводности и упругости для полуслоя, на торце которого заданы условия гладкого контакта. Установлено, что закрепление нижней грани существенно влияет как на абсолютные значения напряжений на боковой стенке слоя, так и на появление зон растягивающих напряжений. Полученные в работе формулы смещений и напряжений могут быть использованы в задачах несвязанной термоупругости, а также при решении контактных задач о вдавливании штампа в упругое основание в виде толстой полубесконечной плиты, нижняя грань которой либо закреплена, либо лежит на твердом основании.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 296 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1100 с.
3. Кит Г. С. Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 120–128.  
Te same: Кит Н. S. Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with heat release on a circular domain (crack) // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 2. – P. 141–153.
4. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
5. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. – Ленинград–Москва: ОНТИ, 1935. – 224 с.
6. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейивили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – Москва: Наука, 1976. – 664 с.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
8. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – Москва: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
9. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Решение стационарной задачи теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин методом начальных функций // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 2. – С. 222–238.
10. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
11. Папкович П. Ф. Представление общего интеграла основных дифференциальных уравнений теории упругости через гармонические функции // Изв. АН СССР. Отд.-ние. мат. и естеств. наук. – 1932. – № 10. – С. 1425–1435.
12. Положий Г. Н. О краевых задачах осесимметричной теории упругости. Метод  $p$ -аналитических функций комплексного переменного // Укр. мат. журн. – 1963. – **15**, № 1. – С. 25–45.
13. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
14. Попов Г. Я. О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям // Докл. РАН. – 2002. – **384**, № 2. – С. 193–196.

15. Попов Г. Я., Абдыманов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Рауан, 1999. – 113 с.
16. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1967. – № 279. – С. 31–46.
17. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. – Киев: Наук. думка, 1974. – 259 с.
18. Слободянский М. Г. Об общих и полных формах решений уравнений упругости. Прикл. математика и механика. – 1959. – **23**, № 3. – С. 468–482.
19. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 261 с.
20. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
21. Юбенкс Р., Стернберг Е. О полноте функций напряжений Буссинеска–Папковича // Механика: Период. сб. пер. иностр. статей. – 1957. – Вып. 6(46). – С. 99–109.  
То же: Eubanks R. A., Sternberg E. On the completeness of the Boussinesq–Papkovitch stress functions // J. Rat. Mech. and Anal. – 1956. – **5**. – P. 735–748.
22. Haji-Sheikh A., Amos Donald E., Beck J. V. Temperature field in a moving semi-infinite region with a prescribed wall heat flux // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2009. – **52**, No. 7. – P. 2092–2101.
23. Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J. On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2005. – **32**, No. 7. – P. 123–132.
24. Matysiak S. J., Perkowski D. M. On heat conduction in a semi-infinite laminated layer. Comparative results for two approaches // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2010. – **37**, No. 4. – P. 343–349.
25. Povstenko Y. Z. Thermoelasticity which uses fractional heat conduction equation // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 2. – С. 239–246.
26. Rabinovich A., Dagan G., Miloh T. Heat conduction in a semi-infinite medium with a spherical inhomogeneity and time-periodic boundary temperature // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2012. – **55**. – P. 618–628.
27. Takhar H. S., Chamkha A. J., Nath G. Unsteady flow and heat transfer on a semi-infinite flat plate with an aligned magnetic field // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – **37**, No. 13. – P. 1723–1736.

#### ЗМІШАНІ ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ І ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НАПІВНЕСКІНЧЕНОГО ШАРУ

Отримано аналітичні розв'язки задач стаціонарної теплопровідності і теорії пружності для напівнескінченного шару за умов гладкого контакту на торці. Метод розв'язування базується на зведенні системи рівнянь Ляме до двох спільно розв'язуваних рівнянь і одного окремо розв'язуваного рівняння. Подальше використання інтегральних перетворень до трансформованих рівнянь рівноваги дозволило отримати точний розв'язок задач у просторі трансформант. Наведено методику обчислення кратних інтегралів, що містять осцилюючі функції. Досліджено поля температур і напружень у шарі залежно від параметрів області навантаження та умов на нижній грані шару.

#### MIXED STATIONARY HEAT CONDUCTION AND ELASTICITY THEORY PROBLEMS FOR A SEMI-INFINITE LAYER

Analytical solutions of stationary heat conduction and elasticity theory problems for a semi-infinite layer under the conditions of smooth contacts at the end-wall is obtained. The method of solution is based on the reducing Lamé equations to two jointly and one separately solvable equations. Application of integral transforms to transformed equilibrium equations allowed to obtain exact solution to the problem in the space of transforms. The methods of calculation of multiple integrals containing oscillating functions is developed. The temperature and stress fields in a semi-infinite layer are studied, depending on parameters of the area where the load is applied, and conditions on the bottom boundary layer.

Одесс. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено  
21.08.13