

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИЗМЫ С СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КРЕСТА

Строится аналитическое решение задачи об установившихся гармонических колебаниях бесконечной призмы крестообразного сечения. Известный закон сингулярности напряжений во входящих углах области дает возможность найти главный член асимптотики для неизвестных коэффициентов в общем решении задачи, что позволяет применить для их численной оценки метод улучшенной редукции. Приводятся численные примеры реализации алгоритма.

Балки крестообразного сечения являются широко распространенными элементами конструкций. В случае кручения решение данной задачи возможно построить в аналитической форме и свести к численным оценкам бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, при этом использование асимптотики неизвестных при численной реализации позволяет на порядок повысить точность [9] по сравнению с использованием простой редукции [1].

При исследовании составных акустических волноводов со сложной геометрией оказывается эффективным аналитико-численный метод частичных областей [2], являющийся модификацией метода суперпозиции [3] применительно к задачам акустики. В рамках этого метода предложена методика использования известного характера особенности на ребре волновода для исследования асимптотики неизвестных коэффициентов в общем решении задачи (реализацию данного подхода к задачам гидроакустики можно увидеть в статьях [6, 10]).

Следуя идее о возможности использования известных особенностей волновых полей для улучшения качества решения, а также результаты для упругого прямоугольника, в статье предлагается эффективный алгоритм решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях изотропной бесконечной балки крестообразного сечения (рис. 1).

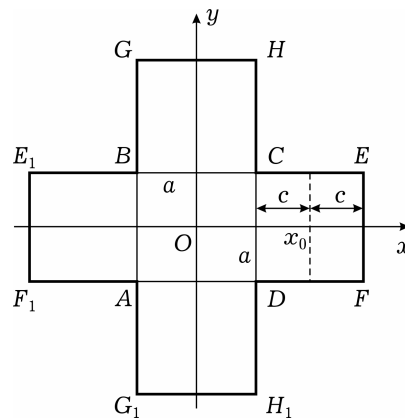


Рис. 1

Постановка задачи и общее решение уравнений Ламе. Рассмотрим задачу о плоской деформации неограниченной в направлении оси Oz балки крестообразного сечения (рис. 1) под действием симметричной граничной нагрузки. Из геометрии сечения следует, что напряженное состояние определяется напряженным состоянием областей $ABCD$ (характеристики в этой области обозначаем индексом «I») и $CEFD$ (индекс – «II»). Из симметрии задачи следует, что

– для области $BGHC$:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}^{\text{II}}(y, x), \quad \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_{xx}^{\text{II}}(y, x), \quad \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{xy}^{\text{II}}(y, x);$$

– для области F_1E_1BA :

$$\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{xx}^{\text{II}}(-x, y), \quad \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_{yy}^{\text{II}}(-x, y), \quad \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{xy}^{\text{II}}(-x, y);$$

– для области G_1ADH_1 :

$$\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}^{\text{II}}(-y, x), \quad \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_{xx}^{\text{II}}(-y, x), \quad \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{xy}^{\text{II}}(-y, x).$$

Полагая координаты (x, y) безразмерными, отнесенными к некоторому линейному размеру h , получаем, что вектор смещений $\mathbf{u} = \{u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}\} e^{-i\omega t}$ должен удовлетворять уравнениям движения Ламе

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где ν – коэффициент Пуассона материала, ρ – его плотность, G – модуль сдвига.

Граничные условия и условия сопряжения для областей $ABCD$ и $CEFD$ запишем следующим образом:

– при $y = \pm a$, $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$:

$$\frac{1}{2G} \sigma_{yy}^{\text{II}} = g(x) e^{-i\omega t} \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{II}} = 0; \quad (2)$$

– при $x = x_0 + c$, $y \in [-a, a]$:

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}^{\text{II}} = f(y) e^{-i\omega t}, \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{II}} = 0; \quad (3)$$

– условия сопряжения при $x = a$, $y \in [-a, a]$:

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}^{\text{I}} = \frac{1}{2G} \sigma_{xx}^{\text{II}}, \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{I}} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{II}}, \quad u_x^{\text{I}} = u_x^{\text{II}}, \quad u_y^{\text{I}} = u_y^{\text{II}}. \quad (4)$$

Согласно методу суперпозиции [3] общее решение уравнения (1) запишем для каждой из рассматриваемых областей:

– в области $ABCD$ – симметричное по обеим координатам:

$$u_x^{\text{I}} = C_0 \sin \Omega_1 x - \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \text{ch } p_{1m} y + \mathcal{D}_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \text{ch } p_{2m} y \right) \sin \alpha_m x + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \text{sh } p_{1m} x + \mathcal{D}_m \text{sh } p_{2m} x) \cos \alpha_m y, \quad (5)$$

$$u_y^{\text{I}} = C_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} (C_m \text{sh } p_{1m} y + \mathcal{D}_m \text{sh } p_{2m} y) \cos \alpha_m x - \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \text{ch } p_{1m} x + \mathcal{D}_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \text{ch } p_{2m} x \right) \sin \alpha_m y, \quad (6)$$

где $\alpha_m = \frac{\pi m}{a}$, $p_{\ell m}^2 = \alpha_m^2 - \Omega_{\ell}^2$, $\ell = 1, 2$, $\Omega_1 = \frac{\omega h}{c_1}$, $\Omega_2 = \frac{\omega h}{c_2}$, $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$

– скорость продольной волны, $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость сдвиговой волны;

– в области $CEFD$ – симметричное по y :

$$u_x^{\text{II}} = \bar{C}_0 \sin \Omega_1 (x - x_0) + \tilde{C}_0 \cos \Omega_1 (x - x_0) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{\mathcal{A}}_m \frac{\bar{\alpha}_m}{\bar{p}_{1m}} \text{ch } \bar{p}_{1m} y + \right. \\ \left. + \bar{\mathcal{B}}_m \frac{\bar{p}_{2m}}{\bar{\alpha}_m} \text{ch } \bar{p}_{2m} y \right) \sin \bar{\alpha}_m (x - x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tilde{\mathcal{A}}_m \frac{\tilde{\alpha}_m}{\tilde{p}_{1m}} \text{ch } \tilde{p}_{1m} y + \right. \\ \left. + \tilde{\mathcal{B}}_m \frac{\tilde{p}_{2m}}{\tilde{\alpha}_m} \text{ch } \tilde{p}_{2m} y \right) \cos \tilde{\alpha}_m (x - x_0) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{C}_m \text{sh } p_{1m} (x - x_0) + \bar{\mathcal{D}}_m \text{sh } p_{2m} (x - x_0) + \\ + \tilde{C}_m \text{ch } p_{1m} (x - x_0) + \tilde{\mathcal{D}}_m \text{ch } p_{2m} (x - x_0)) \cos \alpha_m y, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
u_y^{\text{II}} = & \bar{A}_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{A}_m \operatorname{sh} \bar{p}_{1m} y + \bar{B}_m \operatorname{sh} \bar{p}_{2m} y) \cos \bar{\alpha}_m (x - x_0) + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{A}_m \operatorname{sh} \tilde{p}_{1m} y + \tilde{B}_m \operatorname{sh} \tilde{p}_{2m} y) \sin \tilde{\alpha}_m (x - x_0) - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{C}_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{ch} p_{1m} (x - x_0) + \bar{D}_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{ch} p_{2m} (x - x_0) + \right. \\
& + \tilde{C}_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \operatorname{sh} p_{1m} (x - x_0) + \\
& \left. + \tilde{D}_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \operatorname{sh} p_{2m} (x - x_0) \right) \sin \alpha_m y, \quad (8)
\end{aligned}$$

где $\bar{\alpha}_m = \frac{\pi m}{c}$; $\tilde{\alpha}_m = \frac{\pi(m-1/2)}{c}$; $\bar{p}_{\ell m}^2 = \bar{\alpha}_m^2 - \Omega_{\ell}^2$; $\tilde{p}_{\ell m}^2 = \tilde{\alpha}_m^2 - \Omega_{\ell}^2$, $\ell = 1, 2$.

Здесь и далее для области *CEFD* величины с прямой чертой соответствуют случаю симметрии по обеим осям, с волной – случаю, кососимметричному по x и симметричному по y .

Формулы для смещений (5)–(8) позволяют найти выражения для напряжений в каждой из областей согласно известным формулам

$$\frac{\sigma_{\tau s}}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{\tau s} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\tau}}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \tau} \right), \quad (9)$$

где $\delta_{\tau s}$ – символы Кронекера.

Представленные формулы для смещений и напряжений (5)–(9) тождественно удовлетворяют уравнениям (1) и обладают достаточной полнотой для выполнения условий (2)–(4).

Сведение к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Известно [3], что при решении второй основной граничной задачи для прямоугольника для основных четырех типов симметрии форма общего решения (5)–(8) позволяет свести задачу к квазирегулярной бесконечной системе относительно неопределенных коэффициентов. Используем этот факт для сведения поставленной граничной задачи (2)–(4) к бесконечной системе. Для этого положим, что на стыке областей *ABCD* и *CEFD* нормальные и касательные напряжения являются известными величинами, для которых справедливо разложение в ряды Фурье:

$$\frac{\sigma_{xx}^{\text{I}}(a, y)}{2G} = \frac{\sigma_{xx}^{\text{II}}(x_0 - c, y)}{2G} = \sigma_{xx}(y) = X_0 + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \cos \alpha_m y, \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{\text{I}}(a, y)}{2G} = \frac{\sigma_{xy}^{\text{II}}(x_0 - c, y)}{2G} = \sigma_{xy}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \alpha_m y. \quad (11)$$

Нормальную граничную нагрузку в области *CEFD* разобьем на два слагаемых:

$$\frac{\sigma_{yy}^{\text{II}}}{2G} = g(x) = \bar{g}(x) + \tilde{g}(x),$$

где $\bar{g}(x)$ соответствует симметричному по обеим осям случаю, а $\tilde{g}(x)$ – кососимметричному по x и симметричному по y . Таким образом, можно заменить задачу (2)–(4) на три задачи для прямоугольников:

– для области *ABCD* симметричная задача
при $x = \pm a$, $y \in [-a, a]$:

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx}^{\text{I}} = \sigma_{xx}(y), \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^{\text{I}} = \sigma_{xy}(y); \quad (12)$$

– для области *CEFD* симметричная задача
при $x = x_0 \pm c$, $y \in [-a, a]$:

$$\frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{xx}^{\text{II}} = \frac{\sigma_{xx}(y) + f(y)}{2}, \quad \frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{xy}^{\text{II}} = \mp \frac{\sigma_{xy}(y)}{2}, \quad (13)$$

при $y = \pm a$, $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$:

$$\frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{yy}^{\text{II}} = \bar{g}(x), \quad \frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{xy}^{\text{II}} = 0; \quad (14)$$

– для области *CEFD* кососимметричная задача
при $x = x_0 \pm c$, $y \in [-a, a]$:

$$\frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{xx}^{\text{II}} = \pm \frac{f(y) - \sigma_{xx}(y)}{2}, \quad \frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{xy}^{\text{II}} = \frac{\sigma_{xy}(y)}{2}; \quad (15)$$

при $y = \pm a$, $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$:

$$\frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{yy}^{\text{II}} = \pm \tilde{g}(x), \quad \frac{1}{2G} \tilde{\sigma}_{xy}^{\text{II}} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, задачи (12), (13), (14) и (15), (16) в случае известных напряжений (10), (11) на стыке областей позволяют полностью найти решение задачи в каждом из прямоугольников. Используя условия сопряжения для компонентов вектора смещений при $x = \pm a$, $y \in [-a, a]$:

$$u_x^{\text{I}} = u_x^{\text{II}}, \quad u_y^{\text{I}} = u_y^{\text{II}},$$

можно замкнуть систему и определить величины X_m, Y_m .

Форма общего решения такова, что условия на касательные напряжения выполняются точно для всех трех задач (12)–(16), что приводит к следующим соотношениям между коэффициентами:

$$C_m = -\mathcal{D}_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\text{sh } p_{2m}a}{\text{sh } p_{1m}a} - \frac{Y_m}{\alpha_m \text{sh } p_{1m}a}, \quad (17)$$

$$\bar{C}_m = -\bar{\mathcal{D}}_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\text{sh } p_{2m}c}{\text{sh } p_{1m}c} + \frac{Y_m}{2\alpha_m \text{sh } p_{1m}c},$$

$$\bar{\mathcal{A}}_m = -\bar{\mathcal{B}}_m \frac{\bar{\alpha}_m^2 + \bar{p}_{2m}^2}{2\bar{\alpha}_m^2} \frac{\text{sh } \bar{p}_{2m}a}{\text{sh } \bar{p}_{1m}a}, \quad (18)$$

$$\tilde{C}_m = -\tilde{\mathcal{D}}_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\text{ch } p_{2m}c}{\text{ch } p_{1m}c} - \frac{Y_m}{2\alpha_m \text{ch } p_{1m}c},$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_m = -\tilde{\mathcal{B}}_m \frac{\tilde{\alpha}_m^2 + \tilde{p}_{2m}^2}{2\tilde{\alpha}_m^2} \frac{\text{sh } \tilde{p}_{2m}a}{\text{sh } \tilde{p}_{1m}a}. \quad (19)$$

Из равенства $u_x^{\text{I}}(a, y) = u_x^{\text{II}}(x_0 - c, y)$, записанного с учетом (5), (7):

$$\begin{aligned} C_0 \sin \Omega_1 a + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \text{sh } p_{1m}a + \mathcal{D}_m \text{sh } p_{2m}a) \cos \alpha_m y &= \\ &= -\bar{C}_0 \sin \Omega_1 c + \tilde{C}_0 \cos \Omega_1 c - \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{C}_m \text{sh } p_{1m}c + \\ &+ \bar{\mathcal{D}}_m \text{sh } p_{2m}c + \tilde{C}_m \text{ch } p_{1m}c + \tilde{\mathcal{D}}_m \text{ch } p_{2m}c) \cos \alpha_m y, \end{aligned}$$

следует, что исключая $C_m, \bar{C}_m, \tilde{C}_m$ на основе (17)–(19), получаем

$$C_0 \sin \Omega_1 a = -\bar{C}_0 \sin \Omega_1 c + \tilde{C}_0 \cos \Omega_1 c, \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_m \operatorname{sh} p_{2m} a = \bar{\mathcal{D}}_m \operatorname{ch} p_{2m} c - \tilde{\mathcal{D}}_m \operatorname{sh} p_{2m} c. \quad (21)$$

Пусть заданная граничная нагрузка допускает разложения в ряды

$$f(y) = f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos \alpha_m y,$$

$$\bar{g}(x) = \bar{g}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{g}_m \cos \bar{\alpha}_m (x - x_0),$$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{g}_m \sin \tilde{\alpha}_m (x - x_0).$$

Используя разложения [7] гиперболических функций по полной системе тригонометрических функций в соотношениях для нормальных напряжений (12)–(16) и для $u_y^I(a, y) = u_y^{II}(x_0 - c, y)$, получаем бесконечную систему уравнений относительно величин $C_0, \bar{C}_0, \tilde{C}_0, \bar{A}_0$ и $\{\mathcal{D}_m, \bar{\mathcal{D}}_m, \tilde{\mathcal{D}}_m, \bar{\mathcal{B}}_m, \tilde{\mathcal{B}}_m, X_m, Y_m\}_{m=1}^{\infty}$. Эту систему можно упростить, если исключить на основе (20), (21) неопределенные коэффициенты области $ABCD$. Кроме того, из системы исключаются $\{X_m\}_{m=0}^{\infty}$ при помощи сложения уравнений системы. Тогда, обозначив неизвестные как

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \bar{C}_0 \sin \Omega_1 c, & \tilde{x}_0 &= \tilde{C}_0 \cos \Omega_1 c, & \bar{z}_0 &= \bar{A}_0 \sin \Omega_1 a, \\ \bar{x}_m &= \frac{(-1)^m \bar{\mathcal{D}}_m \operatorname{sh} p_{2m} c}{c \alpha_m}, & \tilde{x}_m &= \frac{(-1)^m \tilde{\mathcal{D}}_m \operatorname{ch} p_{2m} c}{c \alpha_m}, \\ \bar{z}_m &= \frac{(-1)^{m+1} \bar{\mathcal{B}}_m \operatorname{sh} \bar{p}_{2m} a}{a \bar{\alpha}_m}, & \tilde{z}_m &= \frac{(-1)^m \tilde{\mathcal{B}}_m \operatorname{sh} \tilde{p}_{2m} a}{a \tilde{\alpha}_m}, \\ y_m &= (-1)^m Y_m \left(1 + \frac{v \Omega_1^2}{(1-2v) \alpha_m^2} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

получаем бесконечную систему в форме ($m = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1-v}{1-2v} \operatorname{ctg} \Omega_1 a + \frac{v}{(1-2v) \Omega_1 a} - \frac{1-v}{1-2v} \operatorname{tg} \Omega_1 c \right) \Omega_1 \tilde{x}_0 - \\ &\quad - \left(\frac{1-v}{1-2v} \operatorname{ctg} \Omega_1 a + \frac{v}{(1-2v) \Omega_1 a} + \frac{1-v}{1-2v} \operatorname{ctg} \Omega_1 c \right) \Omega_1 \bar{x}_0 - \\ &\quad - \frac{v \bar{z}_0}{(1-2v) a} = \frac{v \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2a(1-2v)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c(\tilde{x}_n - \bar{x}_n)}{\alpha_n p_{1n}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a \bar{z}_n}{\bar{\alpha}_n \bar{p}_{1n}^2} - \frac{a \tilde{z}_n}{\tilde{\alpha}_n \tilde{p}_{1n}^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{a p_{1n}^2}, \\ &-\frac{1-v}{1-2v} \Omega_1 \operatorname{tg} \Omega_1 c \tilde{x}_0 + \frac{1-v}{1-2v} \Omega_1 \operatorname{ctg} \Omega_1 c \bar{x}_0 + \frac{v \bar{z}_0}{(1-2v) a} = \\ &= -\frac{v \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2v)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{z}_n}{\bar{\alpha}_n \bar{p}_{1n}^2} + \frac{\tilde{z}_n}{\tilde{\alpha}_n \tilde{p}_{1n}^2} \right) + f_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{v\bar{x}_0}{(1-2v)c} + \frac{1-v}{1-2v} \Omega_1 \operatorname{ctg} \Omega_1 a \bar{z}_0 = \frac{v\Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_n}{\alpha_n p_{1n}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{2c p_{1n}^2} + \bar{g}_0, \\
& \Delta_m^1 \tilde{x}_m - \Delta_m^2 \bar{x}_m - \Delta_m^{y1} y_m = -\frac{c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \alpha_m)(\tilde{x}_n - \bar{x}_n) - \\
& \quad - \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\bar{\alpha}_n, \alpha_m) \bar{z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\tilde{\alpha}_n, \alpha_m) \tilde{z}_n - \\
& \quad - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{\alpha_n^2 + p_{1m}^2} + \frac{2v\Omega_1^2(\tilde{x}_0 - \bar{x}_0 - \bar{z}_0)}{(1-2v)a p_{1m}^2}, \\
& \tilde{\Delta}_m^c \tilde{x}_m + \bar{\Delta}_m^c \bar{x}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\bar{\alpha}_n, \alpha_m) \bar{z}_n + \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\tilde{\alpha}_n, \alpha_m) \tilde{z}_n - \\
& \quad - \frac{\alpha_m(\alpha_m^2 + p_{2m}^2) y_m}{2p_{1m} \left(\alpha_m^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right) \operatorname{sh} 2p_{1m} c} + \frac{2v\Omega_1^2 \bar{z}_0}{(1-2v)a p_{1m}^2} + (-1)^m f_m, \\
& \bar{\Delta}_m^a \bar{z}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \bar{\alpha}_m) \bar{x}_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \bar{p}_{1m}^2)} - \frac{2v\Omega_1^2 \bar{x}_0}{(1-2v)c \bar{p}_{1m}^2} + (-1)^{m+1} \bar{g}_m, \\
& \tilde{\Delta}_m^a \tilde{z}_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \tilde{\alpha}_m) \tilde{x}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)} - \\
& \quad - \frac{2v\Omega_1^2 \tilde{x}_0}{(1-2v)c \tilde{p}_{1m}^2} + (-1)^m \tilde{g}_m, \\
& \Delta_m^3 \bar{x}_m - \Delta_m^4 \tilde{x}_m + \Delta_m^{y2} y_m = \frac{c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} M_2(\alpha_n, \alpha_m)(\tilde{x}_n - \bar{x}_n) + \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} M_2(\bar{\alpha}_n, \alpha_m) \bar{z}_n - \sum_{n=1}^{\infty} M_2(\tilde{\alpha}_n, \alpha_m) \tilde{z}_n - \\
& \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_m^2 \alpha_n y_n}{a \left(\alpha_n^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right) (\alpha_n^2 + p_{1m}^2)} + \frac{2\alpha_m^2(\tilde{x}_0 - \bar{x}_0 - \bar{z}_0)}{a p_{1m}^2},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_1(x, y) &= \frac{\Omega_1^2}{1-2v} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2 - \Omega_1^2} \left(\frac{2y^2}{x^2 + y^2 - \Omega_2^2} - \frac{v\Omega_2^2}{x^2} \right), \\
M_2(x, y) &= \frac{\Omega_1^2}{1-2v} \cdot \frac{2y^2 x}{x^2 + y^2 - \Omega_1^2} \left(\frac{1}{x^2 + y^2 - \Omega_2^2} + \frac{1-v}{x^2} \right), \\
\Delta_m^1 &= c\alpha_m \left(p_{2m} (\operatorname{th} p_{2m} c + \operatorname{cth} p_{2m} a) - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \times \right. \\
& \quad \left. \times (\operatorname{th} p_{1m} c + \operatorname{cth} p_{1m} a) \right), \\
\Delta_m^2 &= c\alpha_m \left(p_{2m} (\operatorname{cth} p_{2m} c + \operatorname{cth} p_{2m} a) - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \times \right. \\
& \quad \left. \times (\operatorname{cth} p_{1m} c + \operatorname{cth} p_{1m} a) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_m^3 &= c\alpha_m \left(p_{2m} (\operatorname{cth} p_{2m} c + \operatorname{cth} p_{2m} a) - \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2p_{1m}} \times \right. \\ &\quad \left. \times (\operatorname{cth} p_{1m} c + \operatorname{cth} p_{1m} a) \right), \\ \Delta_m^4 &= c\alpha_m \left(p_{2m} (\operatorname{th} p_{2m} c + \operatorname{cth} p_{2m} a) - \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2p_{1m}} \times \right. \\ &\quad \left. \times (\operatorname{th} p_{1m} c + \operatorname{cth} p_{1m} a) \right), \\ \Delta_m^{y1} &= \frac{\alpha_m (\alpha_m^2 + p_{2m}^2)}{4p_{1m} \left(\alpha_m^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right)} (2\operatorname{cth} p_{1m} a + \operatorname{cth} p_{1m} c + \operatorname{th} p_{1m} c), \\ \Delta_m^{y2} &= \frac{\alpha_m^3}{2p_{1m} \left(\alpha_m^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right)} (2\operatorname{cth} p_{1m} a + \operatorname{cth} p_{1m} c + \operatorname{th} p_{1m} c) \\ \tilde{\Delta}_m^c &= c\alpha_m \left(p_{2m} \operatorname{th} p_{2m} c - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \operatorname{th} p_{1m} c \right), \\ \bar{\Delta}_m^c &= c\alpha_m \left(p_{2m} \operatorname{cth} p_{2m} c - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} c \right), \\ \tilde{\Delta}_m^a &= a\tilde{\alpha}_m \left(\tilde{p}_{2m} \operatorname{cth} \tilde{p}_{2m} a - \frac{(\tilde{\alpha}_m^2 + \tilde{p}_{2m}^2)^2}{4\tilde{\alpha}_m^2 \tilde{p}_{1m}} \operatorname{cth} \tilde{p}_{1m} a \right), \\ \bar{\Delta}_m^a &= a\bar{\alpha}_m \left(\bar{p}_{2m} \operatorname{cth} \bar{p}_{2m} a - \frac{(\bar{\alpha}_m^2 + \bar{p}_{2m}^2)^2}{4\bar{\alpha}_m^2 \bar{p}_{1m}} \operatorname{cth} \bar{p}_{1m} a \right). \end{aligned}$$

Асимптотика решения бесконечной системы. Согласно решению задачи о плоской деформации бесконечного кругового сектора [4], для входящего угла $\pi < 2\alpha < 2\pi$ (рис. 2) напряжения в вершине сектора имеют особенность порядка $O(r^{\lambda-1})$ при $r \rightarrow 0$, где r – расстояние до вершины угла, $\lambda = \frac{a_1}{2\alpha}$; $a_k + ib_k$ – корни уравнения

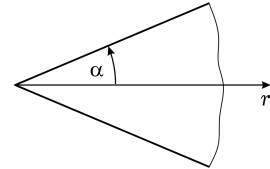


Рис. 2

$\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + \frac{\sin z}{z} = 0$, упорядоченные по возрастанию действительной части.

В случае входящего прямого угла $2\alpha = 3\pi/2$, первый корень $a_1 = 2.5658191612$ является действительным, откуда $\lambda = 0.544483736$. Тогда в окрестности вершины входящего угла C (рис. 1) напряжения имеют такой же характер особенности. В частности, для касательных напряжений на границе областей $ABCD$ и $CEFD$ найдется такая константа K , что

$$\tau_{xy}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin \alpha_n y \approx K(a-y)^{\lambda-1}, \quad y \rightarrow a-0.$$

В таком случае функция $\tau_{xy}(y) - K(a-y)^{\lambda-1}$ уже не будет иметь особенности при $y \in [0, a]$, то есть ее коэффициенты Фурье должны убывать согласно лемме Римана – Лебега [8], как $O(1/\alpha_n)$. Отсюда при $n \rightarrow \infty$ следует

$$Y_n = \frac{2K}{a} \int_0^a (a-y)^{\lambda-1} \sin \alpha_n y dy + O(1/\alpha_n). \quad (23)$$

Интеграл (23) вычисляется точно [7] при помощи гипергеометрической функции

$$Y_n = \frac{2K(-1)^{n+1} a^\lambda \alpha_n}{\lambda+1} {}_1F_2\left(\frac{1+\lambda}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3+\lambda}{2}; -\frac{a^2 \alpha_n^2}{4}\right) + O(1/\alpha_n),$$

известная асимптотика которой при $n \rightarrow \infty$ дает

$$Y_n = \frac{2K(-1)^{n+1} \Gamma(\lambda) \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{a \alpha_n^\lambda} + O(1/\alpha_n). \quad (24)$$

Таким образом, согласно (24) для введенных (22) неизвестных должно выполняться асимптотическое равенство

$$y_n = \frac{c \Omega_1^2}{1-2\nu} \frac{\mathcal{G}_y}{\alpha_n^\lambda} + O(1/\alpha_n). \quad (25)$$

Аналогично, рассматривая поведение нормальных напряжений $\sigma_{xx}(y)$, можно доказать существование такой константы \mathcal{G}_X , что

$$(-1)^n X_n = \frac{c \Omega_1^2}{1-2\nu} \frac{\mathcal{G}_X}{\alpha_n^\lambda} + O(1/\alpha_n). \quad (26)$$

Равенства (25) и (26) позволяют исследовать асимптотическое поведение неизвестных $\{\bar{x}_m, \bar{z}_m\}$ и $\{\tilde{x}_m, \tilde{z}_m\}$. Для этого отдельно рассмотрим бесконечные системы относительно этих неизвестных.

Система для четной составляющей в области $CEFD$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \operatorname{ctg} \Omega_1 c \bar{x}_0 + \frac{\nu}{(1-2\nu)a} \bar{z}_0 &= -\frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_n}{\bar{\alpha}_n \bar{p}_{1n}^2} + \frac{X_0 + f_0}{2}, \\ \frac{\nu}{(1-2\nu)c} \bar{x}_0 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \operatorname{ctg} \Omega_1 a \bar{z}_0 &= \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_n}{\alpha_n p_{1n}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{2c p_{1n}^2} + \bar{g}_0, \\ \bar{\Delta}_m^c \bar{x}_m &= \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\bar{\alpha}_n, \alpha_m) \bar{z}_n + \frac{2\nu \Omega_1^2 \bar{z}_0}{(1-2\nu)a p_{1m}^2} - \\ &\quad - \frac{\alpha_m (\alpha_m^2 + p_{2m}^2) \operatorname{cth} p_{1m} c}{4 p_{1m} (\alpha_m^2 + \nu \Omega_1^2 / (1-2\nu))} y_m + \frac{(-1)^m (X_m + f_m)}{2}, \\ \bar{\Delta}_m^a \bar{z}_m &= \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \bar{\alpha}_m) \bar{x}_n + \frac{2\nu \Omega_1^2 \bar{x}_0}{(1-2\nu)c p_{1m}^2} - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c (\alpha_n^2 + \bar{p}_{1m}^2)} + (-1)^m \bar{g}_m. \end{aligned} \quad (27)$$

Систему для нечетной составляющей в области $CEFD$ запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Omega_1 \operatorname{tg} \Omega_1 c \tilde{x}_0 \bar{z}_0 &= \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}_n}{\tilde{\alpha}_n \tilde{p}_{1n}^2} + \frac{X_0 - f_0}{2}, \\ \tilde{\Delta}_m^c \tilde{x}_m &= \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\tilde{\alpha}_n, \alpha_m) \tilde{z}_n + \frac{2\nu \Omega_1^2 \bar{z}_0}{(1-2\nu)a p_{1m}^2} + \\ &\quad + \frac{\alpha_m (\alpha_m^2 + p_{2m}^2) \operatorname{th} p_{1m} c}{4 p_{1m} (\alpha_m^2 + \nu \Omega_1^2 / (1-2\nu))} y_m - \frac{(-1)^m (X_m - f_m)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_m^a \tilde{z}_m &= \sum_{n=1}^{\infty} M_1(\alpha_n, \tilde{\alpha}_m) \tilde{x}_n - \frac{2\nu\Omega_1^2 \tilde{x}_0}{(1-2\nu)c\tilde{p}_{1m}^2} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)} + (-1)^m \tilde{g}_m. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая (25), (26), найдем асимптотическое поведение свободных членов систем (27), (28) на основе асимптотики ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n y_n}{c(\alpha_n^2 + \tilde{p}_{1m}^2)} \approx \frac{a\Omega_1^2 \alpha_m^{-\lambda} \mathcal{G}_y}{(2-4\nu) \sin \pi\lambda/2}.$$

Следовательно, свободные члены в системах (27), (28) ведут себя, как $O(\alpha_m^{-\lambda})$. Проведем замену переменных в этих системах

$$\begin{aligned} \bar{x}_m &= \bar{\mathcal{G}}_x \alpha_m^{-\lambda} + \bar{x}_m^R, & \bar{z}_m &= \bar{\mathcal{G}}_z \alpha_m^{-\lambda} + \bar{z}_m^R, \\ \tilde{x}_m &= \tilde{\mathcal{G}}_x \alpha_m^{-\lambda} + \tilde{x}_m^R, & \tilde{z}_m &= \tilde{\mathcal{G}}_z \alpha_m^{-\lambda} + \tilde{z}_m^R, \end{aligned}$$

подбирая $\bar{\mathcal{G}}_x$, $\bar{\mathcal{G}}_z$, $\tilde{\mathcal{G}}_x$, $\tilde{\mathcal{G}}_z$ таким образом, чтобы после замены свободные члены систем были порядка $O(1/\alpha_m)$.

Квазирегулярные бесконечные системы вида (27), (28) подробно исследованы при решении второй основной граничной задачи для прямоугольника [3, 5]. При свободных членах порядка $O(1/\alpha_m)$ для единственных граничных решений бесконечных систем будет справедлив асимптотический закон:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m \bar{x}_m^R &= \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_m \bar{z}_m^R = \bar{\mathcal{G}}, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m \tilde{x}_m^R &= \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_m \tilde{z}_m^R = \tilde{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при главных членах асимптотики свободных членов систем после замены, можно найти, что

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_x = -\tilde{\mathcal{G}}_x &= \frac{\sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} (\mathcal{G}_y - \mathcal{G}_X) + \lambda \mathcal{G}_y}{\lambda^2 - \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2}}, \\ \bar{\mathcal{G}}_z = -\tilde{\mathcal{G}}_z &= \frac{\sin \frac{\pi\lambda}{2} ((1+\lambda)\mathcal{G}_y + \lambda \mathcal{G}_X)}{\lambda^2 - \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, при $m \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \bar{x}_m &= \frac{\bar{\mathcal{G}}_x}{\alpha_m^\lambda} + \frac{\bar{\mathcal{G}}}{\alpha_m}, & \bar{z}_m &= \frac{\bar{\mathcal{G}}_z}{\alpha_m^\lambda} + \frac{\bar{\mathcal{G}}}{\alpha_m}, \\ \tilde{x}_m &= -\frac{\tilde{\mathcal{G}}_x}{\alpha_m^\lambda} + \frac{\tilde{\mathcal{G}}}{\alpha_m}, & \tilde{z}_m &= -\frac{\tilde{\mathcal{G}}_z}{\alpha_m^\lambda} + \frac{\tilde{\mathcal{G}}}{\alpha_m}. \end{aligned} \quad (30)$$

Численная реализация. Построенный асимптотический закон (29), (30) для неизвестных позволяет свернуть остатки рядов в бесконечной системе и свести задачу к решению конечной системы относительно первых неизвестных и предельных констант $\bar{\mathcal{G}}_x$, $\bar{\mathcal{G}}_z$, $\bar{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ согласно алгоритму улучшенной редукции.

Рассмотрим в качестве примера задачу о колебаниях креста только под воздействием нагрузки $f(y) = 1$. Выполнение граничных условий для равнобокого креста ($c/a = 1$) при частоте вынужденных колебаний $\Omega = 0.5$ и $\nu = 0.3$ дано в табл. 1.

Таблица 1

j	0	1	2	3	4	5
$\sigma_{xx}(x_0 + c, ja/5)/2G$	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	1.0019
$\sigma_{yy}(a + 2jc/5, a)/2G$	∞	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	-0.0018

Выполнение условий сопряжения областей на CD представлено в табл. 2, при этом условия на σ_{xy} и u_x выполняются тождественно, условия на σ_{xx} и u_y выполняются из решения бесконечной системы, а условие сопряжения напряжений σ_{yy} должно выполняться априорно при корректном решении задачи.

Таблица 2

j	0	1	2	3	4	5
$\sigma_{xx}^I(a, ja/5)/2G$	1.8961	1.8966	1.9069	1.9527	2.1703	∞
$\sigma_{xx}^{II}(a, ja/5)/2G$	1.8965	1.8984	1.9047	1.9545	2.1697	∞
$u_y^I(a, ja/5)$	0	0.0813	0.1686	0.2703	0.4035	0.7090
$u_y^{II}(a, ja/5)$	0	0.0813	0.1686	0.2703	0.4035	0.7051
$\sigma_{yy}^I(a, ja/5)/2G$	1.3892	1.4102	1.4824	1.6476	2.0857	∞
$\sigma_{yy}^{II}(a, ja/5)/2G$	1.3844	1.4054	1.4776	1.6428	2.0809	∞

В вычислениях удерживалась конечная система из 200 уравнений. При этом знание асимптотики (30) является существенным для качества полученного решения. В табл. 3 представлено выполнение сопряжения напряжений σ_{yy} при использовании для решения системы метода простой редукции (в системе удерживаются первые 200 уравнений и неизвестных).

Таблица 3

j	0	1	2	3	4	5
$\sigma_{yy}^I(a, ja/5)/2G$	1.4447	1.4656	1.5379	1.7032	2.1416	∞
$\sigma_{yy}^{II}(a, ja/5)/2G$	1.33014	1.3511	1.4233	1.5887	2.0273	∞

Представленный алгоритм позволяет найти решение для любых значений параметров задачи, при этом характер выполнения граничных условий остается тем же. В табл. 4 представлены значения первых собственных частот Ω_n для различной геометрии при $\nu = 0.3$. При увеличении толщины сторон креста спектр собственных частот сдвигается в более высокую область. Наличие концентраторов напряжений в области приводит к тому, что даже при малых значениях c/a собственные частоты продолжают существенно отличаться от частот бруса квадратного сечения.

Таблица 4

		Ω_n				
n		1	2	3	4	5
$c/a = 0.1$		1.808	2.342	3.506	3.950	4.836
$c/a = 0.5$		1.147	1.515	1.818	2.716	2.855
$c/a = 1.0$		0.701	1.472	1.585	2.171	2.351
$c/a = 2.0$		0.385	1.100	1.474	1.514	1.797

Распределение нормальных напряжений $\sigma_{xx}/2G$ представлено на рис. 3. для частоты колебаний $\Omega = 0.5$ и $\nu = 0.3$ для различной геометрии области.

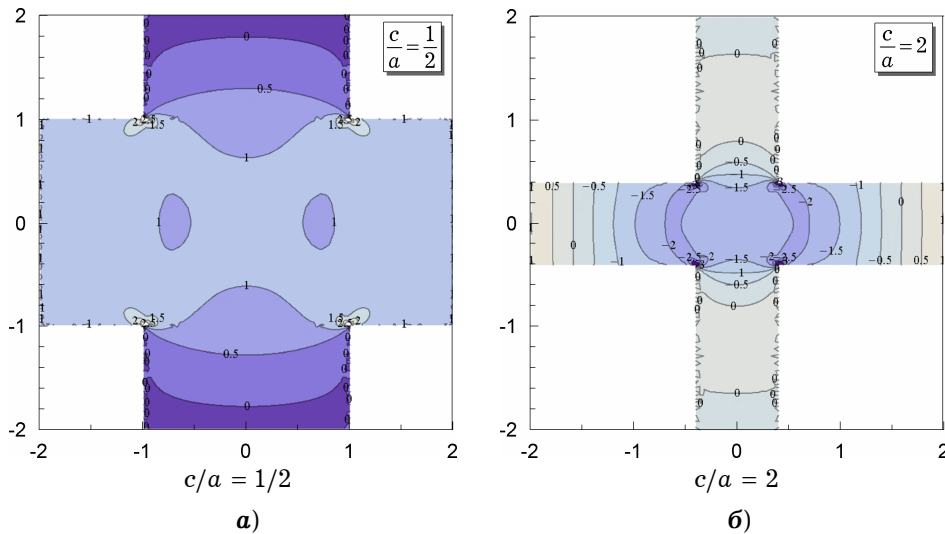


Рис. 3

Частота вынужденных колебаний $\Omega = 0.5$ расположена далеко от собственных частот креста в обоих случаях, поэтому значения напряжений сравнительно невелики. Особенности в углу носят локальный характер. Значения напряжений для случая $c/a = 1/2$ являются положительными, так как частота колебаний находится ниже первой собственной частоты, для случая $c/a = 2$ частота колебаний находится между первыми двумя собственными частотами, что приводит к противоположному знаку напряжений.

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. – Москва: Физматгиз, 1963. – 688 с.
2. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – Киев: Наук. думка, 1986. – 240 с.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
5. Папков С. О., Чехов В. Н. О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 57–62.
6. Папкова Ю. И., Папков С. О., Ярошенко А. А. Энергетические характеристики звукового поля в неоднородной морской среде с плавающим на поверхности цилиндрическим телом // Морской гидрофиз. журн. – 2006. – № 3. – С. 52–59.
То же: *Pačkova Yu. I., Pačkov S. O., Yaroshenko A. A. Energy characteristics of the hydroacoustic field in a nonuniform marine medium with a cylindrical body floating on the surface // Phys. Oceanogr. – 2006. – 16, No. 3. – P. 168–176.*

7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 800 с.
8. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
9. Чехов Вал. Н. О напряженном состоянии призмы с крестообразным основанием при кручении // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 11. – С. 79–93.
То же: Chekhov Val. N. Stress state of a cross-base prism under torsion // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, No. 11. – P. 1265–1278.
10. Luo W., Schmidt H. Three-dimensional propagation and scattering around a conical seamount // J. Acoust. Soc. Am. – 2009. – 125, No. 1. – P. 52–65.

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ ПРИЗМИ З ПЕРЕРІЗОМ У ВИГЛЯДІ ХРЕСТА

Побудовано аналітичний розв'язок задачі про усталені гармонічні коливання нескінченної призми з хрестоподібним перерізом. Відомий закон сингулярності напружень у внутрішніх кутах області дає можливість знайти головний член асимптотики для невідомих коефіцієнтів у загальному розв'язку задачі, що дозволяє застосувати для їх чисельної оцінки метод покращеної редуції. Наведено числові приклади реалізації алгоритму.

HARMONIC VIBRATIONS OF A CROSS-BASE PRISM

The analytical solution for a problem of steady-state harmonic vibrations of an infinite cross-base prism is constructed. The known law of stress singularity in the internal angles of a domain allows to find the main term of the asymptotics for unknown coefficients in the general solution of the problem what makes it possible to use the method of improved reduction for numerical estimating the unknowns. The numerical examples of algorithm realization are given.

Севастопольск. нац. техн. ун-т, Севастополь

Получено
07.10.12