УДК 539.3

Я. М. Пастернак[1], Г. Т. Сулим[2], Р. М. Пастернак[1]

УЗАГАЛЬНЕНА ТОТОЖНІСТЬ СОМІЛЬЯНИ ДЛЯ ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ

Отримано розширену тотожність Сомільяни для термомагнітоелектропружних анізотропних діелектриків, що не накладає обмежень на вимірність задачі. При цьому зумовлений ефектом взаємодії фізичних полів (внутрішнім температурним, електричним і магнітним навантаженням) об'ємний інтеграл зведено до поверхневого. З'ясовано фізичний зміст усіх ядер, які входять у побудовану інтегральну формулу. Подано диференціальні рівняння для їхнього визначення. Вплив зовнішніх чинників враховується інтегралами типу згортки, які треба обчислювати лише для точок межі тіла. Отримані результати мають поряд із загальнотеоретичним значенням широкі можливості практичного застосування при побудові інтегральних рівнянь просторових, плоских та одновимірних задач термомагнітоелектропружності анізотропних діелектриків, а отже, і відповідних числових реалізацій прямої схеми методу граничних елементів.

Вступ. Довгий час вважалося (див., наприклад, [5]), що формули Сомільяни мають лише загальнотеоретичне значення, оскільки на межі тіла крайовими умовами коректно можна задати лише половину із неоднойменних компонент крайових вектор-функцій напружень і переміщень. Проте з розвитком методів інтегральних рівнянь і, зокрема, методу граничних елементів (МГЕ) [1, 2] та теорії тонких включень [6, 7], стало зрозумілим, що на основі тотожності Сомільяни нескладно побудувати сингулярні інтегральні рівняння, у результаті розв'язування яких можна розрахувати усі невідомі крайові функції. Причому реалізовані на основі цих рівнянь прямі схеми МГЕ виявилися значно ефективнішими від непрямих (наприклад, тих, що використовують теорію потенціалів).

Прямі методи граничних елементів також ефективно використовуються при дослідженні матеріалів, у яких взаємодіють різні фізико-механічні поля, зокрема, й магнітоелектричних композитів, тобто виготовлених за керамо- чи нанотехнологіями твердих сумішей п'єзомагнітної і п'єзоелектричної компонент, у яких магнітоелектричний ефект виникає внаслідок механічної взаємодії цих двох фаз, а не безпосереднього взаємовпливу електричного і магнітного полів. Скажімо, у працях [10, 11, 17, 25] на основі методу граничних елементів розроблено низку числових підходів для аналізу фізико-механічних полів і їхньої інтенсивності в магнітоелектричних композитах із тріщинами та тонкими включеннями.

Однак при вивченні впливу теплового розширення, піроелектричного та піромагнітного ефектів на напружений стан тіл на основі застосування інтегральних формул і рівнянь типу Сомільяни слід обчислювати додатковий об'ємний інтеграл від внутрішнього взаємовпливу полів, що великою мірою нівелює усі переваги методу граничних елементів як підходу, де інтегрування здійснюється по межі, а не по об'єму тіла. У випадку ізотропного термопружного середовища цей об'ємний інтеграл внутрішнього впливу температури на поля напружень і деформацій вдалося перетворити до граничного. Відповідний підхід успішно використано у роботах [13, 14, 19] при дослідженні термопружної рівноваги ізотропних тіл із тріщинами. Тим не менше, у випадку анізотропних термопружних тіл зведення такого об'ємного інтеграла до поверхневого не було реалізоване або вимагало надмірних зусиль, тому побудова граничноелементних схем залишалася досить громіздким завданням. Скажімо, у роботах [8, 9] розроблено «particular integral approach», який передбачає розбиття зайнятої тілом області на окремі комірки, у кожній з яких температура апроксимується поліномом. У працях [21, 23] для плоских задач термопружності запропоновано алгоритм перетворення об'ємного інтеграла до контурного та побудовано відповідні інтегральні рівняння і тотожності типу Сомільяни [22]. Однак деякі з новоотриманих контурних інтегралів і тут доводиться обчислювати у певним чином відображеній області. Крім того, цей алгоритм не придатний до застосування при вивченні просторових областей.

При дослідженні двовимірних задач термомеханіки часто використовують методи теорії функцій комплексної змінної. Зокрема, у статтях [3, 4] отримано комплексні потенціали термоелектропружності типу Лехніцького та методами рядів побудовано числові розв'язки для багатозв'язних пластинок із отворами та тріщинами. У нещодавній роботі [15] на основі методів теорії функцій комплексної змінної вперше отримано двовимірні тотожності типу Сомільяни для анізотропних термопружних тіл. При цьому всі контурні інтеграли обчислюються лише уздовж дійсних, а не у якийсь спосіб відображених, меж тіла. У подальших працях [18] відповідні тотожності типу Сомільяни отримані для двовимірних задач термоелектропружності анізотропних тіл як із використанням теорії функції комплексної змінної, так і на основі теорем взаємності робіт типу Бетті – Максвелла.

Проте загального підходу, який дав би можливість отримати тотожності типу Сомільяни, а потім – інтегральні рівняння прямого методу граничних елементів, для одно-, дво- і тривимірних задач термомагнітоелектропружності досі не було побудовано. Тому у цій роботі результати праць [15, 18] узагальнено на випадок просторових задач термомагнітоелектропружності анізотропних тіл. При цьому використано лише загальні математичні методи теорії поля.

1. Основні співвідношення. Відповідно до [12, 16, 20, 24] у нерухомій прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ рівняння рівноваги, рівняння Максвелла (теорема Ґаусса для електричного й магнітного полів) і балансові співвідношення теплопровідності у стаціонарному випадку набудуть такого вигляду:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \qquad D_{i,i} - q = 0\,,$$

$$B_{i,i} + b_m = 0, \qquad h_{i,i} - f_h = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3\,. \tag{1}$$

Тут σ_{ij} – компоненти тензора напружень; h_i – компоненти вектора густини теплового потоку; D_i – електричне зміщення; B_i – індукція магнітного поля; f_i – об'ємні сили; q – густина вільних зарядів; f_h – густина розподілених джерел (стоків) тепла; b_m – об'ємна густина постійного електричного струму, яка для діелектрика є нульовою. У формулах прийнято правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома поміж індексами означає операцію диференціювання за координатою, індекс якої стоїть після коми: $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$.

Визначальні співвідношення лінійної термомагнітоелектропружності та теплопровідності відповідно до [20] мають такий вигляд:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm} u_{k,m} - e_{pij} E_p - h_{pij} H_p - \beta_{ij}\theta\,,$$

$$D_i = e_{ikm} u_{k,m} + \text{æ}_{ip} E_p + \gamma_{ip} H_p + \chi_i \theta\,,$$

$$B_i = h_{ikm} u_{k,m} + \gamma_{ip} E_p + \mu_{ip} H_p - \nu_i \theta, \qquad h_i = -k_{ij}\theta_{,j}\,, \tag{2}$$

де u_i – переміщення точок тіла; ϕ – електричний потенціал; ψ – потенціал стаціонарного магнітного поля; θ – зміна температури порівняно з відліковою; C_{ijkm} – пружні сталі; k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності; β_{ij} – модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень); e_{ijk} – п'єзоелектричні сталі; $æ_{ij}$ − діелектричні сталі матеріалу; h_{ijk} − п'єзомагнітні сталі; μ_{ij}, γ_{ij} − магнітна та електромагнітна проникності матеріалу; χ_i − піроелектричні коефіцієнти; ν_i − піромагнітні коефіцієнти. Тензори з компонентами C_{ijkm}, k_{ij}, $æ_{ij}$, μ_{ij}, γ_{ij} та β_{ij} вважаються симетричними.

Рівняння (1) і (2) зручно подати у такому уніфікованому вигляді:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{f}_i = 0, \qquad h_{i,i} - f_h = 0\,, \tag{3}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm}\tilde{u}_{k,m} - \tilde{\beta}_{ij}\theta, \qquad h_i = -k_{ij}\theta_{,j}\,, \tag{4}$$

де

$$\tilde{u}_i = u_i, \qquad \tilde{u}_4 = \phi, \qquad \tilde{u}_5 = \psi\,,$$
$$\tilde{f}_i = f_i, \qquad \tilde{f}_4 = -q, \qquad \tilde{f}_5 = b_m\,,$$
$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \qquad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j, \qquad \tilde{\sigma}_{5j} = B_j\,,$$
$$\tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}, \quad \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \quad \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -æ_{jm}\,,$$
$$\tilde{C}_{ij5m} = h_{mij}, \quad \tilde{C}_{5jkm} = h_{jkm}, \quad \tilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm}\,,$$
$$\tilde{C}_{4j5m} = -\gamma_{jm}, \qquad \tilde{C}_{5j4m} = -\gamma_{jm}\,,$$
$$\tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij}, \qquad \tilde{\beta}_{4j} = -\chi_j, \qquad \tilde{\beta}_{5j} = \nu_j, \qquad i,j,k,m = 1,2,3\,.$$

Співвідношення (3) і (4) узагальнюють відповідні балансові рівняння та конститутивні співвідношення лінійної теорії термопружності анізотропного тіла [12, 24].

2. Узагальнення другої формули Ґріна на випадок лінійних симетричних диференціальних операторів. Розглянемо таку диференціальну тотожність, яка доводиться шляхом безпосереднього диференціювання:

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(\varphi k_{pq}\psi_{,q} - \psi k_{pq}\varphi_{,q}) = \varphi k_{pq}\psi_{,pq} - \psi k_{pq}\varphi_{,pq} +$$
$$+ k_{pq}\varphi_{,p}\psi_{,q} - k_{pq}\psi_{,p}\varphi_{,q}\,. \tag{5}$$

Тут φ і ψ є довільними функціями просторових координат x_i, а k_{pq} − дійсні сталі. Якщо коефіцієнти k_{pq} утворюють симетричну матрицю, тобто $k_{pq} = k_{qp}$, то сума двох останніх членів у правій частині (5) дорівнюватиме нулеві, оскільки

$$k_{pq}\varphi_{,p}\psi_{,q} - k_{pq}\psi_{,p}\varphi_{,q} = k_{pq}\varphi_{,p}\psi_{,q} - k_{qp}\varphi_{,q}\psi_{,p} = 0\,.$$

Тому для симетричних k_{pq} рівняння (5) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(\varphi k_{pq}\psi_{,q} - \psi k_{pq}\varphi_{,q}) = \varphi k_{pq}\psi_{,pq} - \psi k_{pq}\varphi_{,pq}\,. \tag{6}$$

Інтегруючи праву та ліву частини (6) по тривимірній області $\mathfrak{B}$ і застосовуючи до результату теорему Остроградського − Ґаусса, отримаємо

$$\iiint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial}{\partial x_p}(\varphi k_{pq}\psi_{,q} - \psi k_{pq}\varphi_{,q})\,dV = \iint_{\partial\mathfrak{B}} (\varphi k_{pq}\psi_{,q} - \psi k_{pq}\varphi_{,q}) n_p\,dS =$$
$$= \iiint_{\mathfrak{B}} (\varphi k_{pq}\psi_{,pq} - \psi k_{pq}\varphi_{,pq})\,dV\,. \tag{7}$$

Тут $\partial\mathfrak{B}$ – межа області $\mathfrak{B}$; n_p – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\mathfrak{B}$. Вважаючи, що $k_{pq} = \delta_{pq}$, рівняння (7) зводиться до другої інтегральної формули Ґріна

$$\iint_{\partial\mathfrak{B}} (\varphi\psi_{,p} - \psi\varphi_{,p}) n_p \, dS = \iiint_{\mathfrak{B}} (\varphi\psi_{,pp} - \psi\varphi_{,pp}) \, dV .$$

Аналогічно для вектор-функцій із компонентами φ_i, ψ_i та симетричного тензора $C_{ijkm} = C_{kmij}$ можна довести, що

$$\iint_{\partial\mathfrak{B}} (\varphi_i C_{ijkm} \psi_{k,m} - \psi_i C_{ijkm} \varphi_{k,m}) n_j \, dS =$$

$$= \iiint_{\mathfrak{B}} (\varphi_i C_{ijkm} \psi_{k,jm} - \psi_i C_{ijkm} \varphi_{k,jm}) \, dV . \qquad (8)$$

3. Побудова розширених тотожностей типу Сомільяни.

3.1. Теплопровідність. Балансові рівняння (3) і конститутивні співвідношення (4) для задачі теплопровідності зводяться до такого диференціального рівняння:

$$k_{ij} \theta_{,ij} = - f_h . \qquad (9)$$

Тоді фундаментальний розв'язок $\Theta^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ рівняння (9) за дії у точці $\boldsymbol{\xi}$ зосередженого одиничного стоку тепла $f_h = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ задовольнятиме рівняння

$$k_{ij} \Theta^*_{,ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) , \qquad (10)$$

де $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функція Дірака. Тут і надалі похідні обчислюються за змінними x_i.

Позначивши

$$H^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = - k_{ij} n_i(\mathbf{x}) \Theta^*_{,j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \qquad (11)$$

та замінивши в (7) функції φ та ψ відповідно на θ і Θ^*, отримаємо

$$\iint_{\partial\mathfrak{B}} (-\theta(\mathbf{x}) H^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \Theta^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x})) \, dS(\mathbf{x}) =$$

$$= \iiint_{\mathfrak{B}} \left[\theta(\mathbf{x}) k_{pq} \Theta^*_{,pq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \Theta^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) k_{pq} \theta_{,pq}(\mathbf{x}) \right] dV(\mathbf{x}) , \qquad (12)$$

де $h_n = h_i n_i$.

Зважаючи на (10) і правила інтегрування узагальнених функцій [1], на основі (9) і (12) для поля температури отримаємо таке подання:

$$\theta(\boldsymbol{\xi}) = \iint_{\partial\mathfrak{B}} (\Theta^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}) H^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \, dS(\mathbf{x}) + \Theta^f(\boldsymbol{\xi}) , \qquad (13)$$

де функція впливу зовнішнього об'ємного теплового навантаження означена так:

$$\Theta^f(\boldsymbol{\xi}) = - \iiint_{\mathfrak{B}} \Theta^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f_h(\mathbf{x}) \, dV(\mathbf{x}) . \qquad (14)$$

3.2. Термомагнітоелектропружність. Відповідно до (3), (4) фундаментальний розв'язок $U_{pk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ задач магнітоелектропружності за дії у точці $\boldsymbol{\xi}$ одиничних зосереджених сил $\tilde{f}_i^p = \delta_{pi} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ задовольняє таке рівняння:

$$\tilde{C}_{ijkm}U_{pk,jm}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -\delta_{pi}\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}). \tag{15}$$

Позначивши

$$T_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \tilde{C}_{ijkm}n_j(\mathbf{x})U_{pk,m}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \tag{16}$$

та замінивши у (8) компоненти φ_i, ψ_i вектор-функцій відповідно величинами $\tilde{u}_i$ та $U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, на основі (15) і (16) отримаємо

$$\tilde{u}_p(\boldsymbol{\xi}) = \iint_{\partial\mathfrak{B}} (U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{C}_{ijkm}n_j(\mathbf{x})\tilde{u}_{k,m}(\mathbf{x}) - T_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{u}_i(\mathbf{x}))\,dS(\mathbf{x}) -$$

$$- \iiint_{\mathfrak{B}} U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{C}_{ijkm}\tilde{u}_{k,jm}(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}). \tag{17}$$

Згідно з (3) і (4) маємо

$$\tilde{C}_{ijkm}\tilde{u}_{k,jm} = \tilde{\beta}_{ij}\theta_{,j} - \tilde{f}_i, \qquad \tilde{C}_{ijkm}\tilde{u}_{k,m} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\beta}_{ij}\theta.$$

Тому (17) можемо записати у вигляді

$$\tilde{u}_p(\boldsymbol{\xi}) = \iint_{\partial\mathfrak{B}} (U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{t}_i(\mathbf{x}) - T_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{u}_i(\mathbf{x}))\,dS(\mathbf{x}) +$$

$$+ \tilde{\beta}_{ij}\iint_{\partial\mathfrak{B}} U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})n_j(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}) -$$

$$- \tilde{\beta}_{ij}\iiint_{\mathfrak{B}} U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\theta_{,j}(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}) + \iiint_{\mathfrak{B}} U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{f}_i(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}). \tag{18}$$

Інтегруючи передостанній інтеграл у (18) частинами, матимемо

$$\tilde{\beta}_{ij}\iiint_{\mathfrak{B}} U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\theta_{,j}(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}) = \tilde{\beta}_{ij}\iint_{\partial\mathfrak{B}} U_{pi}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})n_j(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}) -$$

$$- \tilde{\beta}_{ij}\iiint_{\mathfrak{B}} \theta(\mathbf{x})U_{pi,j}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,dV(\mathbf{x}). \tag{19}$$

З урахуванням (19) інтегральне подання (18) набуде такого вигляду:

$$\tilde{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = \iint_{\partial\mathfrak{B}} (U_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{u}_j(\mathbf{x}))\,dS(\mathbf{x}) + \iiint_{\mathfrak{B}} U_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{f}_j(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}) +$$

$$+ \tilde{\beta}_{jk}\iiint_{\mathfrak{B}} \theta(\mathbf{x})(x)U_{ij,k}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,dV(\mathbf{x}). \tag{20}$$

У (20) для зручності змінено іменування індексів, що, однак, жодним чином не впливає на результат.

Розглянемо у (20) останній інтеграл по області $\mathfrak{B}$ тіла. Позначивши $\psi = V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, $\varphi = \theta(\mathbf{x})$, враховуючи, що згідно з (4) $k_{pq}\theta_{,q} = -h_p$, і підставивши ці величини у формулу (7), матимемо

$$\iint_{\partial\mathfrak{B}} (\theta(\mathbf{x})k_{pq}V_{i,q}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})n_p(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})h_p(\mathbf{x})n_p(\mathbf{x}))\,dS(\mathbf{x}) =$$

$$= \iiint_{\mathfrak{B}} [\theta(\mathbf{x})k_{pq}V_{i,pq}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})h_{p,p}(\mathbf{x})]\,dV(\mathbf{x}). \tag{21}$$

На підставі балансового рівняння (3) $h_{p,p} = f_h$, а тому, переставляючи члени в (21), отримаємо

$$\iiint_{\mathfrak{B}} \theta(\mathbf{x})k_{pq}V_{i,pq}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,dV(\mathbf{x}) = \iint_{\partial\mathfrak{B}} [R_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\theta(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})h_n(\mathbf{x})]\,dS(\mathbf{x}) -$$

$$- \iiint_{\mathfrak{B}} V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})f_h(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}). \tag{22}$$

Тут

$$R_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = k_{pq}V_{i,q}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})n_p(\mathbf{x}). \tag{23}$$

Якщо вдасться знайти таку функцію $V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, що задовольняє диференціальне рівняння

$$k_{pq}V_{i,pq}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \tilde{\beta}_{jk}U_{ij,k}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), \tag{24}$$

то за допомогою співвідношень (22) термомагнітоелектропружний інтеграл по області, який у рівнянні (20) враховує внутрішній взаємовплив полів, можна перетворити до поверхневого:

$$\tilde{\beta}_{jk}\iiint_{\mathfrak{B}} \theta(\mathbf{x})U_{ij,k}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,dV(\mathbf{x}) = \iiint_{\mathfrak{B}} \theta(\mathbf{x})k_{pq}V_{i,pq}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,dV(\mathbf{x}) =$$

$$= \iint_{\partial\mathfrak{B}} [R_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\theta(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})h_n(\mathbf{x})]\,dS(\mathbf{x}) -$$

$$- \iiint_{\mathfrak{B}} V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})f_h(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}). \tag{25}$$

Внаслідок цього, підставляючи (25) у (20), отримаємо розширену тотожність Сомільяни для задач термомагнітоелектропружності:

$$\tilde{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = \iint_{\partial\mathfrak{B}} (U_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{u}_j(\mathbf{x}))\,dS(\mathbf{x}) +$$

$$+ \iint_{\partial\mathfrak{B}} [R_i\theta(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})h_n(\mathbf{x})]\,dS(\mathbf{x}) + U_i^f(\boldsymbol{\xi}) + U_i^{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \tag{26}$$

де функції впливу зовнішнього об'ємного механічного, електричного, магнітного і теплового навантажень означені такими інтегралами по області $\mathfrak{B}$:

$$U_i^f(\boldsymbol{\xi}) = \iiint_{\mathfrak{B}} U_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{f}_j(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}),$$

$$U_i^{\theta}(\boldsymbol{\xi}) = -\iiint_{\mathfrak{B}} V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})f_h(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}). \tag{27}$$

Побудова явних виразів для ядра $V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ із використанням диференціального рівняння (24) є досить складним завданням. Однак тут можна використати значно простіший підхід, заснований на фізичній інтерпретації співвідношень (26). Для цього розглянемо безмежне термомагнітоелектропружне середовище, навантажене у точці $\mathbf{x}^*$ зосередженим джерелом тепла одиничної інтенсивності. Оскільки розглядаємо безмежне середовище, то у виразі (26) усі поверхневі інтеграли та інтеграл по області від масових сил $\tilde{f}_i$ повинні дорівнювати нулеві. Єдиним членом, що залишиться, буде

$$\tilde{u}_i^*(\boldsymbol{\xi}) = -\iiint_{\mathfrak{B}} V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)\,dV(\mathbf{x}) = -V_i(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\xi}). \tag{28}$$

Тобто відповідно до (28) ядро $V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ фізично відповідає переміщенням (із протилежним знаком) у точці $\boldsymbol{\xi}$ безмежного середовища, зумовленим дією зосередженого джерела тепла одиничної інтенсивності, прикладеного у точці $\mathbf{x}$. Отже, $V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ є фундаментальним розв'язком термомагнітоелектропружності, який згідно з (3), (4) і (10) задовольняє таке диференціальне рівняння:

$$\tilde{C}_{ijkm}V_{k,jm}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + \tilde{\beta}_{ij}\Theta^*_{,j}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = 0. \tag{29}$$

Тут враховано, що $V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -V_i(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x})$.

Доведемо, що ядро $V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ задовольняє також і рівняння (24). Для цього подамо (29) у вигляді

$$\tilde{C}_{ijkm}(V_{k,jm} + \tilde{\alpha}_{km}\Theta^*_j(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})) = 0\,, \tag{30}$$

де $\tilde{\alpha}_{ij}$ – узагальнені коефіцієнти теплового розширення і напруженості поля, причому $\tilde{\beta}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm}\tilde{\alpha}_{km}$.

Диференціюючи (30) за x_i та підсумовуючи за індексом i, отримаємо

$$\tilde{C}_{ijkm}(V_{k,ijm}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + \tilde{\alpha}_{km}\Theta^*_{,ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})) = 0\,. \tag{31}$$

З огляду на те, що з урахуванням зв'язку $V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -V_i(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x})$ для деформацій, зумовлених дією поля температур Θ^*, виконується рівність

$$V_{k,m}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -\tilde{\alpha}_{km}\Theta^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,,$$

то співвідношення (31) задовольняється тотожно, оскільки кожен із виразів у дужках лівої частини (31) дорівнює нулеві, тобто

$$V_{k,ijm}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + \tilde{\alpha}_{km}\Theta^*_{,ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = 0\,. \tag{32}$$

Домноживши (32) на k_{ij}, підсумовуючи за відповідними індексами та використовуючи (10), отримаємо

$$k_{ij}V_{k,ijm}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -\tilde{\alpha}_{km}\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,. \tag{33}$$

З іншого боку,

$$\tilde{\beta}_{jk}U_{ij,k} = \tilde{C}_{jkmp}\tilde{\alpha}_{mp}U_{ij,k}\,,$$

отже, відповідно до (15)

$$\tilde{\beta}_{jk}U_{ij,km} = -\tilde{\alpha}_{im}\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,. \tag{34}$$

Порівнюючи (33) і (34), отримуємо, що

$$k_{pq}V_{i,pqs}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \tilde{\beta}_{jk}U_{ij,ks}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,. \tag{35}$$

Інтегруючи (35) за x_s та зважаючи на те, що з фізичних міркувань функції $V_i(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ та $U_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ заникають при $\mathbf{x}\to\infty$, тобто сталі інтегрування повинні бути нульовими, безпосередньо отримаємо рівняння (24). Це доводить обґрунтованість і достовірність зроблених при отриманні рівнянь (26) припущень.

У двовимірному випадку анізотропного термоелектропружного тіла співвідношення (24) були доведені авторами [18] шляхом безпосередньої підстановки в них явних виразів для відповідних ядер. Крім цього, аналогічні рівняння двовимірного випадку було отримано на основі формули Коші та комплексних потенціалів *Stroh* [15, 18]. Запропонований тут підхід не накладає обмежень на вимірність задачі, тип матеріалу (ізотропний чи анізотропний), а також є і фізично обґрунтованим.

4. Аналіз отриманих співвідношень. Аналізуючи формулу (26), варто зазначити, що її температурні члени мають чітку фізичну інтерпретацію. З огляду на (11) та (23) вони мають таку ж природу, як і $\Theta^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, $H^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ у (13), оскільки характеризують вплив розподілених джерел тепла та їхніх диполів (з огляду на анізотропію матеріалу плечі цих диполів вже не є обов'язково нормальними до поверхні, як в ізотропному матеріалі). Те ж саме стосується випадку ізотропного термопружного тіла [14], що додатково підтверджує достовірність отриманих інтегральних подань.

У більшості практично важливих задач термоелектропружності об'ємні сили, вільні заряди та внутрішні розподілені джерела тепла є відсутніми, тобто, $\tilde{f}_i \equiv 0$ та $f_h \equiv 0$. Отже, очевидним є те, що у цьому випадку функції (14), (27) є нульовими, а інтегральні подання (13), (26) містять лише інтеграли по межі $\partial\mathfrak{B}$ тіла.

У багатьох випадках масові сили та джерела тепла задані у формі розподілених дискретно зосереджених чинників, тобто

$$f_h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} h^{k*}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k*}), \qquad \tilde{f}_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{P}_i^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k*}),$$

де $\tilde{P}_j^k$ – компоненти k-ї узагальненої зосередженої сили; h^{k*} – інтенсивність k-го джерела тепла; $\mathbf{x}^{k*}$ – точка їхнього прикладання. Тоді функції (14), (27) набудуть такого вигляду:

$$\Theta^f(\boldsymbol{\xi}) = -\sum_{k=1}^{n} h^{k*}\Theta^*(\mathbf{x}^{k*}, \boldsymbol{\xi}),$$

$$U_i^f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} U_{ij}(\mathbf{x}^{k*}, \boldsymbol{\xi})\tilde{P}_i^k, \qquad U_i^\theta(\boldsymbol{\xi}) = -\sum_{k=1}^{n} h^{k*} V_i(\mathbf{x}^{k*}, \boldsymbol{\xi}).$$

У загальному випадку неперервного розподілу зовнішніх об'ємних навантажень функції (14), (27) є також повністю означеними, оскільки це навантаження є, зазвичай, відомим. При цьому в побудованих на основі інтегральних співвідношень (13), (26) тих чи інших схемах реалізації методу граничних елементів функції (14), (27) можна обчислити наперед на стадії підготовки вхідних даних для заданої при вибраній мірі дискретизації задачі множини точок колокації на межі тіла (вони будуть входити тільки у незмінювану праву частину результуючих систем алгебричних рівнянь). Тоді в основному алгоритмі методу необхідно буде обчислювати лише інтеграли по межі тіла, що є очевидною перевагою над існуючими підходами [9].

5. *Приклад.* Розглянемо задачу термомагнітоелектропружності для паралельного до площини Ox_2x_3 ортотропного шару $0 \le x_1 \le L$ завтовшки L. При цьому вважатимемо, що на поверхнях $x_1 = 0$ та $x_1 = L$ шару крайові функції θ, h_n, $\tilde{u}_i$, $\tilde{t}_i$ є сталими, а у його товщі поля переміщень, електричного і магнітного потенціалів не змінюються в напрямах осей Ox_2 та Ox_3, тобто $\tilde{u}_{i,2} = \tilde{u}_{i,3} \equiv 0$. У цьому випадку співвідношення (3), (4) набудуть значно простішого одновимірного вигляду:

$$h_1 = -k\frac{d\theta}{dx}, \qquad \tilde{\sigma}_{i1} = \tilde{C}'_{ij}\left(\frac{d\tilde{u}_j}{dx} - \tilde{\alpha}'_j\theta\right), \tag{36}$$

$$\frac{dh_1}{dx} - f_h = -\left(k\frac{d^2\theta}{dx^2} + f_h\right) = 0,$$

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{i1}}{dx} + \tilde{f}_i^\sigma = \tilde{C}'_{ij}\left(\frac{d^2\tilde{u}_j}{dx^2} - \tilde{\alpha}'_j\frac{d\theta}{dx}\right) + \tilde{f}_i^\sigma = 0, \tag{37}$$

де $x \equiv x_1$ – лінійна координата товщі шару $(0 \le x \le L)$; $\tilde{C}'_{ij} = \tilde{C}_{i1j1}$, $k = k_{11}$, $\tilde{\alpha}'_j = \tilde{\alpha}_{j1}$ – відповідно зведені коефіцієнти магнітоелектропружності, теплопровідності та теплового розширення, піроелектричного і піромагнітного ефектів для шару. Зазначимо, що аналогічні до (36), (37) рівняння можна записати і для смуги чи стрижня, щоправда у цих випадках зведені коефіцієнти слід обчислювати з урахуванням відповідних однорідних крайових умов на ненавантажених поверхнях.

Для цієї одновимірної задачі рівняння (10) набуде вигляду

$$k\frac{d^2\Theta^*(x,\xi)}{dx^2} = \delta(x-\xi),$$

розв'язок якого запишемо як

$$\Theta^*(x,\xi) = -\frac{1}{2k}(L - |x-\xi|). \tag{38}$$

Згідно з (13) зміна температури у довільній точці ξ $(0 < \xi < L)$ шару означена залежністю

$$\theta(\xi) = \Theta^*(0,\xi)h_n(0) + \Theta^*(L,\xi)h_n(L) - H^*(0,\xi)\theta(0) -$$

$$- H^*(L,\xi)\theta(L) - \int_0^L \Theta^*(x,\xi)f_h(x)\,dx, \tag{39}$$

де відповідно до (11) та (38) маємо

$$H^*(x,\xi) = -kn\frac{d}{dx}\Theta^*(x,\xi) = -\frac{n}{2}\operatorname{sgn}(x-\xi).$$

Тут n − єдина ненульова компонента вектора нормалі, що дорівнює $n=-1$ для $x=0$ і $n=1$ для $x=L$.

Спрямовуючи у (39) точку ξ послідовно до точок $x=0$ та $x=L$, отримаємо рівняння методу граничних елементів для визначення не заданих крайовими умовами початкових параметрів:

$$\theta(0) = -\frac{L}{2k}h_n(0) + \frac{1}{2}\theta(0) + \frac{1}{2}\theta(L) - \int_0^L \Theta^*(x,0)f_h(x)\,dx,$$

$$\theta(L) = -\frac{L}{2k}h_n(L) + \frac{1}{2}\theta(0) + \frac{1}{2}\theta(L) - \int_0^L \Theta^*(x,L)f_h(x)\,dx. \tag{40}$$

За аналогією з вищевикладеним, співвідношення (26) в одновимірному випадку задачі термомагнітоелектропружності набудуть вигляду

$$\tilde{u}_i(\xi) = U_{ij}(0,\xi)\tilde{t}_j(0) + U_{ij}(L,\xi)\tilde{t}_j(L) - T_{ij}(0,\xi)\tilde{u}_j(0) - T_{ij}(L,\xi)\tilde{u}_j(L) +$$

$$+ R_i(0,\xi)\theta(0) + R_i(L,\xi)\theta(L) + V_i(0,\xi)h_n(0) +$$

$$+ V_i(L,\xi)h_n(L) + U_i^f(\xi) + U_i^\theta(\xi), \tag{41}$$

де

$$U_{ij} = \frac{\tilde{C}'^{-1}_{ij}}{2}(L - |x-\xi|), \qquad T_{ij} = -\frac{n}{2}\delta_{ij}\operatorname{sgn}(x-\xi)$$

$$\tilde{C}'^{-1}_{ij}\tilde{C}'_{jk} = \tilde{C}'_{ij}\tilde{C}'^{-1}_{jk} = \delta_{jk},$$

$$R_i = \frac{\tilde{\alpha}'_i n}{2}(L - |x-\xi|), \qquad V_i = \frac{\tilde{\alpha}'_i}{2k}\left(L(x-\xi) - \int |x-\xi|\,dx\right).$$

Спрямовуючи у (41) внутрішню точку ξ до поверхонь шару, отримаємо аналогічну до (40) систему рівнянь методу граничних елементів для визначення не заданих крайовими умовами переміщень та потенціалів $\tilde{u}_i(0)$, $\tilde{u}_i(L)$ на межі шару чи зусиль, поверхневих зарядів і магнітної індукції $\tilde{t}_i(0)$, $\tilde{t}_i(L)$:

$$\frac{1}{2}\tilde{u}_i(0) = \frac{L}{2}\tilde{C}'^{-1}_{ij}\tilde{t}_j(0) + \frac{1}{2}\tilde{u}_i(L) - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}'_i L\theta(0) + \\ + \frac{1}{4}\tilde{\alpha}'_i \frac{L^2}{k} h_n(L) + U_i^f(0) + U_i^\theta(0),$$

$$\frac{1}{2}\tilde{u}_i(L) = \frac{L}{2}\tilde{C}'^{-1}_{ij}\tilde{t}_j(L) + \frac{1}{2}\tilde{u}_i(0) + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}'_i L\theta(L) - \\ - \frac{1}{4}\tilde{\alpha}'_i \frac{L^2}{k} h_n(0) + U_i^f(L) + U_i^\theta(L). \quad (42)$$

У випадку відсутності розподілених джерел тепла, рівняння (40) набудуть значно простішого вигляду:

$$h_n(0) = -\frac{k}{L}(\theta(0) - \theta(L)), \qquad h_n(L) = -\frac{k}{L}(\theta(L) - \theta(0)). \quad (43)$$

Тобто співвідношення (43) методу граничних елементів виражають у формі скінченних різниць очевидний закон теплопровідності Фур'є для шару, поверхні якого підтримуються при різних сталих температурах.

Так само у випадку відсутності масових сил і розподілених джерел тепла, попередньо домноживши (42) на $2\tilde{C}'_{ki}/L$ і підсумувавши за індексом i, отримаємо

$$\tilde{t}_i(0) = \tilde{C}'_{ij}\frac{\tilde{u}_j(0) - \tilde{u}_j(L)}{L} + \tilde{\beta}'_i\theta(0) - \frac{L}{2k}\tilde{\beta}'_i h_n(L),$$

$$\tilde{t}_i(L) = \tilde{C}'_{ij}\frac{\tilde{u}_j(L) - \tilde{u}_j(0)}{L} - \tilde{\beta}'_i\theta(L) + \frac{L}{2k}\tilde{\beta}'_i h_n(0), \quad (44)$$

де $\tilde{\beta}'_i = \tilde{C}'_{ij}\tilde{\alpha}'_j$ – зведені теплові модулі термомагнітоелектропружного шару.

Підставивши (43) у (44), матимемо

$$\tilde{t}_i(0) = \tilde{C}'_{ij}\frac{\tilde{u}_j(0) - \tilde{u}_j(L)}{L} + \tilde{\beta}'_i\frac{\theta(0) + \theta(L)}{2},$$

$$\tilde{t}_i(L) = \tilde{C}'_{ij}\frac{\tilde{u}_j(L) - \tilde{u}_j(0)}{L} - \tilde{\beta}'_i\frac{\theta(0) + \theta(L)}{2}$$

або з огляду на означення нормалі n та вектора $\tilde{t}_i = \tilde{\sigma}_{i1}n$:

$$\tilde{\sigma}_{i1}(0) = \tilde{\sigma}_{i1}(L) = \tilde{C}'_{ij}\frac{\tilde{u}_j(L) - \tilde{u}_j(0)}{L} - \tilde{\beta}'_i\frac{\theta(0) + \theta(L)}{2}. \quad (45)$$

Порівнюючи (45) і другу з формул (36), бачимо, що співвідношення (45) методу граничних елементів виражає у формі скінченних різниць лінійний закон типу Гука для одновимірної задачі термомагнітоелектропружності, причому напруження на лицьових поверхнях шару залежать лише від ґрадієнта переміщень і його середньої температури. Це додатково верифікує отримані загальні співвідношення типу Сомільяни для задач термомагнітоелектропружності.

Залежно від заданих на поверхнях шару крайових умов, формула (45) дає можливість оцінити вплив закріплення, прикладеного до поверхонь електричного та магнітного потенціалів, піроелектричного та піромагнітного ефектів на значення напружень, електричних зміщень і магнітної індукції на відповідних краях шару, оскільки вона, крім зведених коефіцієнтів $\tilde{C}'_{ij}$ магнітоелектропружності, містить ще й зведені теплові модулі $\tilde{\beta}'_i$.

Значно складнішу двовимірну задачу термопружності анізотропного тіла та відповідні фундаментальні розв'язки розглянуто у роботі [15]. Двовимірні формулювання та інтегральні рівняння задач термоелектропружності анізотропних тіл подано у праці [18].

Складність і громіздкість побудови відповідних фундаментальних розв'язків для тривимірних задач є значно більшою, ніж одновимірних чи двовимірних, і це завдання виходить за межі предмету даної роботи. Однак у зв'язку з цим все ж варто зазначити, що при отриманні тривимірних функцій Ґріна задач термомагнітоелектропружності анізотропних тіл цілком можливо використовувати інтегральні перетворення, зокрема, перетворення Радона.

Висновки. Отримані інтегральні подання розширюють сферу застосування математичного апарату термомеханіки анізотропних тіл, у яких можуть взаємодіяти поля різної фізичної природи. Додаткові члени побудованої розширеної тотожності Сомільяни, що враховують вплив температурних полів на інші (механічні, електричні, магнітні), записано в компактній формі та мають зрозумілу фізичну інтерпретацію густин розподілених джерел тепла і їхніх диполів.

Отримані співвідношення є зручними також і для практичного використання, зокрема в числових алгоритмах методу граничних елементів для розв'язування задач термомагнітоелектропружності анізотропних тіл. При цьому в основній схемі методу для врахування внутрішнього взаємовпливу полів слід обчислювати лише інтеграли по межі тіла, що дає істотні переваги порівняно з існуючими підходами.

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. – Москва: Мир, 1984. – 494 с.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – Москва: Мир, 1987. – 524 с.
3. *Калоеров С. А., Хорошев К. Г.* Термоэлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 124–133.
4. *Калоеров С. А., Хорошев К. Г.* Термоэлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 11. – С. 116–126.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
6. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
7. *Сулим Г. Т.* Применение формулы Сомильяно в задачах теории упругости для тел с тонкостенными включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып. 18. – С. 48–51.
8. *Deb A., Banerjee P. K.* BEM for general anisotropic 2D elasticity using particular integrals // Commun. Appl. Num. Meth. – 1990. – **6**, No. 2. – P. 111–119.
9. *Deb A., Henry D. P. (Jr.), Wilson E. B.* Alternate BEM formulation for 2D and 3D anisotropic thermoelasticity // Int. J. Solids Struct. – 1991. – **27**. – P. 1721–1738.
10. *Dong C. Y., Lo S. H., Antes H.* Fracture analysis in 2D magneto–electro–elastic media by the boundary element method // Comput. Mech. – 2008. – **41**, No. 2. – P. 207–217.
11. *Garcia-Sanchez F., Rojas-Diaz R., Saez A., Zhang Ch.* Fracture of magneto-electroelastic composite materials using boundary element method (BEM) // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2007. – **47**. – P. 192–204.
12. *Hwu C.* Anisotropic elastic plates. – New York–London: Springer, 2010. – 673 p.
13. *Koshelev V., Ghassemi A.* Complex variable BEM for thermo- and poroelasticity // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2004. – **28**. – P. 825–832.
14. *Mukherjee Y. X., Shah K., Mukherjee S.* Thermoelastic fracture mechanics with regularized hypersingular boundary integral equations // Eng. Anal. Bound. Elem. – 1999. – **23**. – P. 89–96.
15. *Pasternak Ia.* Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2012. – **36**, No. 12. – P. 1931–1941.
16. *Pasternak Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – **35**, No. 4. – P. 678–690.
17. *Pasternak Ia.* Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magnetoelectroelastic medium // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2012. – **36**. – P. 799–811.

18. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2013. – **37**, No. 2. – P. 419–433.
19. *Prasad N. N. V., Aliabadi M. H., Rooke D. P.* The dual boundary element method for thermoelastic crack problems // Int. J. Fract. – 1994. – **66**. – P. 255–272.
20. *Qin Q. H.* Green's function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.
21. *Shiah Y. C., Guao T. L., Tan C. L.* Two-dimensional BEM thermoelastic analysis of anisotropic media with concentrated heat sources // Comput. Model. Eng. Sci. – 2005. – **7**, No. 3. – P. 321–338.
22. *Shiah Y. C., Tan C. L.* Determination of interior point stresses in two dimensional BEM thermoelastic analysis of anisotropic bodies // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **37.** – P. 809–829.
23. *Shiah Y. C., Tan C. L.* Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity // Comput. Mech. – 1999. – **23**. – P. 87–96.
24. *Ting T. C. T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.
25. *Zhu X., Huang Z., Jiang A., Chen W. Q., Nishimura N.* Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2010. – **34**. –P. 927–933.

ОБОБЩЕННОЕ ТОЖДЕСТВО СОМИЛЬЯНЫ ДЛЯ ТЕРМОМАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Получено расширенное тождество Сомильяны для термомагнитоэлектроупругих анизотропных диэлектриков, которое не накладывает ограничений на размерность задачи. При этом обусловленный эффектом взаимодействия физических полей (внутренними температурными, электрическими и магнитными нагрузками) объемный интеграл сведен к поверхностному. Указан физический смысл всех ядер, входящих в построенную интегральную формулу. Представлены дифференциальные уравнения для их определения. Влияние внешних факторов учитывается интегралами типа свертки, которые необходимо вычислять лишь для точек границы тела. Полученные результаты имеют вместе с общетеоретическим значением широкие возможности практического применения при построении интегральных уравнений пространственных, плоских и одномерных задач термомагнитоэлектроупругости анизотропных диэлектриков, а следовательно, и соответствующих численных реализаций прямой схемы метода граничных элементов.

GENERALIZED SOMIGLIANA IDENTITY FOR THERMOMAGNETOELECTROELASTIC ANISOTROPIC SOLIDS

The paper obtains extended Somigliana identity for thermomagnetoelectroelastic anisotropic dielectric solids. This identity has no restrictions on the dimensionality of the problem. The volume integral caused by the interaction of physical fields (internal temperature, electric and magnetic load) is converted to the surface one. The paper points the physical meaning of all kernels, which arise in the obtained integral formula. Corresponding differential equations are presented for obtaining the kernels. The influence of external load is accounted by convolution type integrals to be calculated only for boundary points of the solid. The results obtained have both theoretical value and opportunities for their practical application in the development of the integral equations of spatial, plane and one-dimensional problems of thermomagnetoelectroelasticity of anisotropic dielectrics, and hence corresponding numerical implementations in the direct boundary element methods.

[1] Луцький нац. техн. ун-т, Луцьк,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
08.01.13