

ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНИЙ МЕТОД ТЕРМОПРУЖНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПОРОЖНИНИ В ДОВГОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ТІЛІ

Розглядається задача визначення геометричних параметрів циліндричної тунельної теплоізолюваної порожнини у довгому циліндричному тілі за вимірними поверхневими переміщеннями, зумовленими стаціонарним нагріванням тіла зосередженими тепловими потоками, в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. На основі методу граничних інтегральних рівнянь побудовано двовимірну математичну модель термопружного зондування тіла, в межах якої сформульовано пряму та обернену задачі ідентифікації параметрів порожнини. За допомогою методу граничних елементів досліджено термопружні переміщення поверхні тіла та встановлено характеристики полів нормальних і тангенціальних переміщень поверхні, які можна приймати як інформативні параметри для оберненої задачі. З використанням цих параметрів сформульовано обернену задачу ідентифікації геометричних параметрів порожнини. Запропоновано гранично-елементний алгоритм її розв'язування.

Вступ. Останнім часом значну увагу спеціалістів у галузі технічної діагностики та суміжних дисциплін привертає проблема розробки неруйнівних безконтактних методів ідентифікації внутрішньої структури твердих тіл. У публікаціях [2, 3, 4] запропонований гранично-елементний метод ідентифікації геометричних параметрів тунельної порожнини у довгому циліндричному тілі з використанням даних, отриманих шляхом вимірювання стаціонарного температурного поля поверхні тіла за його зондування зосередженими тепловими потоками. Цей метод можна реалізувати безконтактно за допомогою техніки ІЧ-термографії [1, 10].

Проте слід зазначити, що при дії зосереджених теплових потоків у тілі виникають температурні напруження. Ці напруження залежать від внутрішньої структури тіла, зокрема, – від наявності дефектів (порожнин, включень тощо). Тому за інформативні параметри для виявлення та ідентифікації таких дефектів можна вибрати характеристики термопружного стану, наприклад, поверхневі переміщення, зумовлені неоднорідним нагрівом. З використанням цих даних сумісно із гранично-елементною моделлю термопружного стану можна сформулювати обернені задачі ідентифікації дефектів. Такий підхід можна реалізувати цілком безконтактно за допомогою оптичних методів вимірювання переміщень поверхні [9].

Можливість застосування методу граничних елементів разом із даними вимірювання переміщень точок поверхні для ідентифікації неоднорідностей у твердих тілах розглянута, зокрема, у статті [7]. Для отримання апостеріорної інформації щодо структури об'єкта автори пропонують створювати в ньому напружено-деформований стан, діючи поверхневими зусиллями одновісного розтягу. Відомі також інші публікації, у яких поверхневі переміщення, які виникають за силового навантаження об'єкта, використовують як вхідні дані для задач ідентифікації порожнин і включень (див., наприклад, [6, 8]). Проте такий підхід складно реалізувати безконтактно, оскільки створення зондувального напруженого стану в об'єкті все ж вимагає застосування механічних навантажувальних пристроїв. До того ж, елементи навантажувальних пристроїв, які перебувають у контакті із поверхнею об'єкта, можуть створювати перешкоди для безконтактного вимірювання поверхневих переміщень.

Метою цієї статті є розробка математичних основ методу ідентифікації геометричних параметрів тунельної порожнини у довгому циліндричному тілі за даними про поверхневі термопружні переміщення, зумовлені стаціонарним нагріванням тіла зосередженими тепловими потоками. Із викорис-

танням граничних інтегральних рівнянь побудовано математичну модель термопружного зондування тіла і сформульовано пряму та обернену задачі ідентифікації. Методом граничних елементів проведено кількісне дослідження прямих задач. На цій основі виявлено характеристики полів нормальних і тангенціальних переміщень поверхні, які можна використовувати як інформативні параметри в оберненій задачі. Розроблено гранично-елементний метод розв'язування оберненої задачі. Ефективність методу досліджено для випадку довгого кругового циліндра з круговою тунельною порожниною.

1. Математична модель термопружного зондування. Розглядається безмежне термопружне тіло, обмежене замкненою циліндричною поверхнею $\Gamma_0 \otimes \mathbf{v}$, де Γ_0 – плоский достатньо гладкий опуклий контур, \mathbf{v} – одинична нормаль до площини \mathcal{S} , в якій лежить контур Γ_0 . У тілі розміщена тунельна порожнина, обмежена циліндричною поверхнею $\Gamma_1 \otimes \mathbf{v}$, де $\Gamma_1 \subset \mathcal{S}$ – достатньо гладкий опуклий контур. Геометрію контуру Γ_1 визначає функція $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, параметр $s \in \mathbb{R}$, яка залежить від скінченної кількості дійсних параметрів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тут \mathbf{x} – радіус-вектор довільної точки в \mathbb{R}^2 .

Тіло нагріває зовнішній тепловий потік, інтенсивність якого не залежить від координати в напрямку \mathbf{v} осі циліндра: $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$. Охолодження тіла відбувається внаслідок конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура T_m якого є задана. Поверхня порожнини є теплоізолювана.

За таких умов стаціонарне температурне поле $T(\mathbf{x})$, яке виникає в тілі, нормальні $u_\nu(\mathbf{x})$ і тангенціальні $u_\tau(\mathbf{x})$ термопружні переміщення, зумовлені нагрівом, залежить лише від координат x_1, x_2 у площині \mathcal{S} . Стаціонарне температурне поле та термопружні переміщення точок поверхні тіла у безрозмірних координатах $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/R$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y}/R$, де R – характерний розмір контуру Γ_0 , визначає така система граничних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \theta(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_0} (\Phi(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}) + \mu\Theta(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi}))\theta(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_1} \Phi(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi})\theta(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) = \\ = \int_{\Gamma_0} \Theta(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\xi})(J(\boldsymbol{\xi}) + \mu\theta_m) d\ell(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w_i(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma} A_{ij}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) w_j(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} H_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) + \\ + \int_{\Gamma} P_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \theta(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})} d\ell(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\boldsymbol{\eta} \in \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Тут $\theta = T/T_0$ – безрозмірна температура, нормована характерним значенням $T_0 = Rj_0/\alpha$, де α – коефіцієнт теплопровідності матеріалу; $J = \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{n}/j_0$ – безрозмірна функція інтенсивності зондувального потоку, нормована характерним значенням j_0 , \mathbf{n} – зовнішня нормаль до поверхні тіла; $\mu = R(h/\alpha)$ – зведений коефіцієнт теплообміну, де h – коефіцієнт конвективного теплообміну; $\theta_m \equiv T_m/T_0 = \alpha T_m/(Rj_0)$ – зведена температура середовища;

$$\begin{aligned}
\Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) &\equiv \frac{1}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})} \right) - \ln R \right), \quad \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \equiv |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}|, \quad \Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \equiv \frac{\Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})}, \\
A_{ij}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)\rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})} \left(\left(\frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})} \right) \left((1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} \right) + \right. \\
&\quad \left. + (2\nu-1) \left(\frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} n_i(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} n_j(\boldsymbol{\xi}) \right) \right), \\
&\quad n_i = \partial x_i / \partial \mathbf{n}, \quad i, j = x_1, x_2, \\
H_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) &= -\beta \left((2 \ln \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \ln R) - 1 \right) n_i(\boldsymbol{\xi}) + 2 \frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})}, \\
P_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) &= \beta \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} (2 \ln \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \ln R) - 1, \quad \beta = \frac{(1+\nu)}{(8\pi(1-\nu))},
\end{aligned}$$

ν – коефіцієнт Пуассона.

Декартові компоненти термопружних переміщень u_i нормовано величиною $u_0 = R\alpha T_0$: $w_i = u_i/u_0$, де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення тіла.

Зазначимо, що введені тут характерні величини T_0 та u_0 мають прозорий фізичний зміст: T_0 визначає перепад температури, який створює потік тепла густини j_0 на відстані R у матеріалі із теплопровідністю α , а u_0 визначає абсолютне видовження волокна довжини R в матеріальному континуумі з коефіцієнтом температурного розширення α при зростанні його температури на величину T_0 .

За відсутності порожнини стаціонарне температурне поле та термопружні переміщення точок поверхні тіла визначає система граничних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \bar{\theta}(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_0} (\Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \mu \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) &= \\
&= \int_{\Gamma_0} \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) (J(\boldsymbol{\xi}) + \mu \theta_m) d\ell(\boldsymbol{\xi}), \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \bar{w}_i(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_0} A_{ij}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \bar{w}_j(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma_0} H_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) + \\
&+ \int_{\Gamma_0} P_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})} d\ell(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\eta} \in \Gamma_0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Зумовлене наявністю порожнини збурення температурного поля поверхні $\tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \theta(\boldsymbol{\xi}) - \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ і поля термопружних переміщень $\tilde{w}_i(\boldsymbol{\xi}) = w_i(\boldsymbol{\xi}) - \bar{w}_i(\boldsymbol{\xi})$, де $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_0$, задовольняє систему граничних інтегральних рівнянь, яка випливає із систем рівнянь (1)–(4):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \tilde{\theta}(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_0} (\Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \mu \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) \tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_1} \Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) &= \\
&= - \int_{\Gamma_1} \Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \hat{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}), \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \tilde{w}_i(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma} A_{ij}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{w}_j(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} H_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_1} H_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \hat{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) - \\
&- \int_{\Gamma_1} A_{ij}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \hat{w}_j(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_0} P_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \tilde{\theta}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})} d\ell(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\eta} \in \Gamma, \quad (6)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\boldsymbol{\eta}) &= - \int_{\Gamma_0} \Phi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_0} \Theta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})} d\ell(\boldsymbol{\xi}), \\ \bar{w}_i(\boldsymbol{\eta}) &= \int_{\Gamma_0} H_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_0} P_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})} d\ell(\boldsymbol{\xi}) - \\ &\quad - \int_{\Gamma_0} A_{ij}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \bar{w}_j(\boldsymbol{\xi}) d\ell(\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

$\bar{\theta}(\boldsymbol{\xi})$ – розв’язок рівняння (3), $\bar{w}(\boldsymbol{\xi})$ – розв’язок рівняння (4).

Системи рівнянь (3)–(6) складають математичну модель опису термопружного зондування поверхні тіла.

2. Гранично-елементна модель термопружного зондування. Нехай задано: контури Γ_0 та Γ_1 , функцію просторового розподілу інтенсивності зондувального теплового потоку $J_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$, температуру T_m зовнішнього середовища, коефіцієнти конвективного теплообміну h , теплопровідності κ , лінійного температурного розширення α та Пуассона ν . Тоді пряма задача термопружного зондування полягає у знаходженні поля поверхневих термопружних переміщень на Γ_0 . Вона зводиться до послідовного розв’язування граничних інтегральних рівнянь (3)–(6).

Розв’язування прямої задачі для різних значень параметрів $\beta_1, \beta_2, \dots, \dots, \beta_n$, які визначають геометрію контуру Γ_1 , та різних функцій просторового розподілу густини зондувального теплового потоку $J_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$, дає можливість виявити параметри F_1, F_2, \dots, F_m , які є достатньо чутливими до змін геометричних параметрів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, і їх можна використовувати як вхідні дані для оберненої задачі ідентифікації порожнини.

Для розв’язування систем (3)–(6) застосуємо метод граничних елементів [5].

Дискретизуючи контури Γ_0 та Γ_1 вузловими точками ξ_i , які утворюють множину лінійних елементів E_i , $i \in [1, N_\Gamma]$, $N_\Gamma \in \mathbb{Z}$, системи інтегральних рівнянь (3), (4) та (5), (6) зведемо відповідно до таких СЛАР:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{(11)} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} &= \mathbf{B}_{(1)}, \\ \mathbf{N}_{(11)} \bar{\mathbf{w}}_{(1)} &= \mathbf{C}_{(1)}; \\ \mathbf{M}_{(11)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} + \mathbf{M}_{(12)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)} &= \mathbf{B}_{(2)}, \\ \mathbf{M}_{(21)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} + \mathbf{M}_{(22)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)} &= \mathbf{B}_{(3)}, \\ \mathbf{N}_{(11)} \tilde{\mathbf{w}}_{(1)} + \mathbf{N}_{(12)} \tilde{\mathbf{w}}_{(2)} &= \mathbf{C}_{(11)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} + \mathbf{C}_{(12)} (\partial \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} / \partial \mathbf{n}) + \mathbf{C}_{(2)} + \mathbf{C}_{(3)}, \\ \mathbf{N}_{(21)} \tilde{\mathbf{w}}_{(1)} + \mathbf{N}_{(22)} \tilde{\mathbf{w}}_{(2)} &= \mathbf{C}_{(21)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} + \mathbf{C}_{(4)} + \mathbf{C}_{(5)}.\end{aligned}\tag{7}$$

Тут $\tilde{\mathbf{w}}_{(1)}$, $\tilde{\mathbf{w}}_{(2)}$ – вектори вузлових значень збурень поверхневих переміщень на контурах Γ_0 та Γ_1 відповідно; $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$, $\bar{\mathbf{w}}_{(1)}$ – вектори вузлових значень безрозмірної температури та поверхневих переміщень на зовнішній поверхні тіла без порожнини; $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$ та $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)}$ – вектори вузлових значень збурення безрозмірних температур на зовнішній поверхні тіла і на поверхні порожнини відповідно; $\mathbf{M}_{(11)}$, $\mathbf{M}_{(12)}$, $\mathbf{M}_{(21)}$ та $\mathbf{M}_{(22)}$ – матриці розмірностей

$N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_0}$, $N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_1}$, $N_{\Gamma_1} \times N_{\Gamma_0}$ та $N_{\Gamma_1} \times N_{\Gamma_1}$; $\mathbf{N}_{(11)}$, $\mathbf{N}_{(12)}$, $\mathbf{N}_{(21)}$ та $\mathbf{N}_{(22)}$ – матриці розмірностей $2N_{\Gamma_0} \times 2N_{\Gamma_0}$, $2N_{\Gamma_0} \times 2N_{\Gamma_1}$, $2N_{\Gamma_1} \times 2N_{\Gamma_0}$ та $2N_{\Gamma_1} \times 2N_{\Gamma_1}$; $(\mathbf{C}_{(11)}, \mathbf{C}_{(12)})$ та $(\mathbf{C}_{(21)}, \mathbf{C}_{(22)})$ – матриці розмірностей $N_{\Gamma_0} \times 2N_{\Gamma_0}$ та $N_{\Gamma_1} \times 2N_{\Gamma_1}$; $\mathbf{B}_{(1)}$, $\mathbf{B}_{(2)}$ та $\mathbf{B}_{(3)}$ – вектори розмірностей $1 \times N_{\Gamma_0}$, $1 \times N_{\Gamma_1}$ та $1 \times N_{\Gamma_1}$ відповідно, а вектори $(\mathbf{C}_{(1)}, \mathbf{C}_{(2)}, \mathbf{C}_{(3)})$ та $(\mathbf{C}_{(4)}, \mathbf{C}_{(5)})$ – $1 \times 2N_{\Gamma_0}$ та $1 \times 2N_{\Gamma_1}$, де $N_{\Gamma_0} \in \mathbb{Z}$ – кількість елементів на границі Γ_0 , $N_{\Gamma_1} \in \mathbb{Z}$ – кількість елементів на границі Γ_1 .

Елементи $m_{\ell k}$ матриць $\mathbf{M}_{(11)}$, $\mathbf{M}_{(12)}$, $\mathbf{M}_{(21)}$ та $\mathbf{M}_{(22)}$ визначаються інтегралами вигляду $\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha}(t)(A_{ij}(\eta_{\ell}, \xi_k(t))) dt$; елементи $n_{\ell k}$ матриць $\mathbf{N}_{(11)}$, $\mathbf{N}_{(12)}$, $\mathbf{N}_{(21)}$ та $\mathbf{N}_{(22)}$ – інтегралами $\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha}(t)(A_{ij}(\eta_{\ell}, \xi_k(t))) dt$, а елементи $c_{\ell k}$ матриць $\mathbf{C}_{(11)}$, $\mathbf{C}_{(21)}$ та $\mathbf{C}_{(12)}$ – інтегралами $\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha}(t)(H_i(\eta_{\ell}, \xi_k(t))) dt$, $\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha}(t)(P_i(\eta_{\ell}, \xi_k(t))) dt$, $\alpha = 1, 2$, $i, j = x_1, x_2$, $\varphi_1(t) = \frac{1-t}{2}$, $\varphi_2(t) = \frac{1+t}{2}$ – кусково-лінійні базисні функції; η_{ℓ} , ξ_k , $\ell, k = 1, \dots, N_{\Gamma}$, – координати вузлів на Γ .

Елементи вектора $\mathbf{B}_{(1)}$ визначаються через вузлові значення зондувального теплового потоку $J(\eta_{\ell})$ та температуру середовища θ_m , а елементи векторів $\mathbf{B}_{(2)}$ та $\mathbf{B}_{(3)}$ – через $J(\eta_i)$, θ_m і вузлові значення температурного поля $\bar{\theta}(\eta_{\ell})$ на поверхні тіла без порожнини; елементи вектора $\mathbf{C}_{(1)}$ – через вузлові значення температурного поля $\bar{\theta}(\eta_{\ell})$ і потоків $(\partial \bar{\theta}_{(1)} / \partial \mathbf{n})$ на поверхні тіла без порожнини, а $\mathbf{C}_{(2)}$, $\mathbf{C}_{(3)}$, $\mathbf{C}_{(4)}$ та $\mathbf{C}_{(5)}$ – через вузлові значення температурного поля $\bar{\theta}(\eta_{\ell})$ і поверхневих переміщень $\bar{w}(\eta_{\ell})$.

3. Дослідження інформативних параметрів термопружного зондування. Розв'язування прямих задач ідентифікації і дослідження інформативних параметрів проведемо для випадку, коли тіло має форму кругового циліндра радіуса R . У цьому випадку напрямний контур Γ_1 поверхні порожнини в декартових координатах визначається як $x_1(s) = r_0 \cos(s) + \rho_0 \cos \varphi_0$, $x_2(s) = r_0 \sin(s) + \rho_0 \sin \varphi_0$, $s \in [0, 2\pi]$, і залежить від трьох параметрів: радіуса порожнини r_0 і полярних координат ρ_0 та φ_0 її центра (рис. 1а).

Нехай зондувальний тепловий потік \mathbf{J}_0 падає на область бічної поверхні тіла, якій відповідає дуга $\Gamma_{\omega} \subset \Gamma_0$. Зовнішня нормаль \mathbf{n}_{ω} середини дуги Γ_{ω} поверхні нагрівання орієнтована під полярним кутом ω . Змінюючи просторовий розподіл густини зондувального теплового потоку $J(\varphi)$, $\varphi \in \Gamma_{\omega}$, на поверхні нагрівання і ширину області нагрівання $a \equiv |\Gamma_{\omega}|$ і скануючи потоком по поверхні об'єкта (змінюючи кут ω), отримуватимемо щораз різні поверхневі розподіли температури $\tilde{\theta}$, а також нормальної $w_{\nu} = w_{x_1} \cos \varphi + w_{x_2} \times \sin \varphi$ і тангенціальної $w_{\tau} = w_{x_2} \cos \varphi - w_{x_1} \sin \varphi$ компонент поверхневих переміщень (рис. 1б).

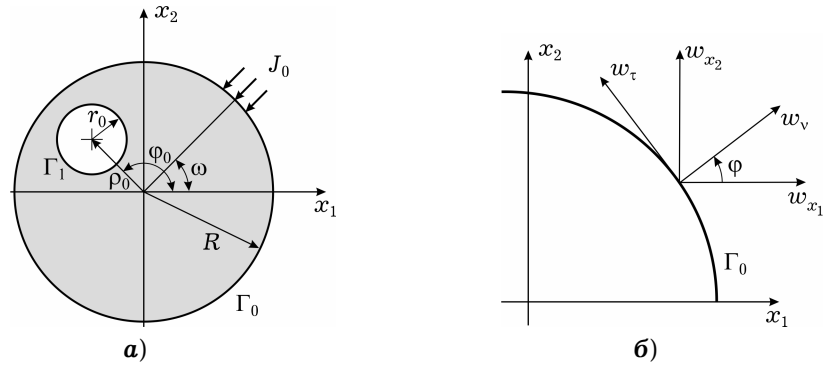


Рис. 1

Вплив порожнини на температурне поле поверхні циліндра для різних напрямків зондування детально досліджено у статтях [2–4]. Тому зупинимось тут на дослідженні поверхневих термопружних переміщень.

На рис. 2 наведено розподіли збурень нормальних $\tilde{w}_v(\varphi)$ і тангенціальних $\tilde{w}_\tau(\varphi)$ поверхневих термопружних переміщень на Γ_0 для різних напрямків $\omega_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k$ (рис. 2а, рис. 2б) і $\omega_k = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k$ (рис. 2б, рис. 2г), дії зондувального потоку у випадку порожнини, геометрію якої визначають параметри $\bar{r}_0 = r_0/R = 0.1$, $\bar{\rho}_0 = \rho_0/R = 0.5$, $\varphi_0 = \pi$.

Графіки на рис. 2 отримали розв'язуванням систем (7), (8) при таких значеннях параметрів: $R = 0.1$ м, $\alpha = 1.15$ Вт/(м · К), $h = 5$ Вт/(м² · К), $T_m = 300$ К, $j_0 = 2000$ Вт/м², $a = \pi/60$, $\varphi_0 = \pi$, $r_0 = 0.01$ м, $\rho_0 = 0.05$ м.

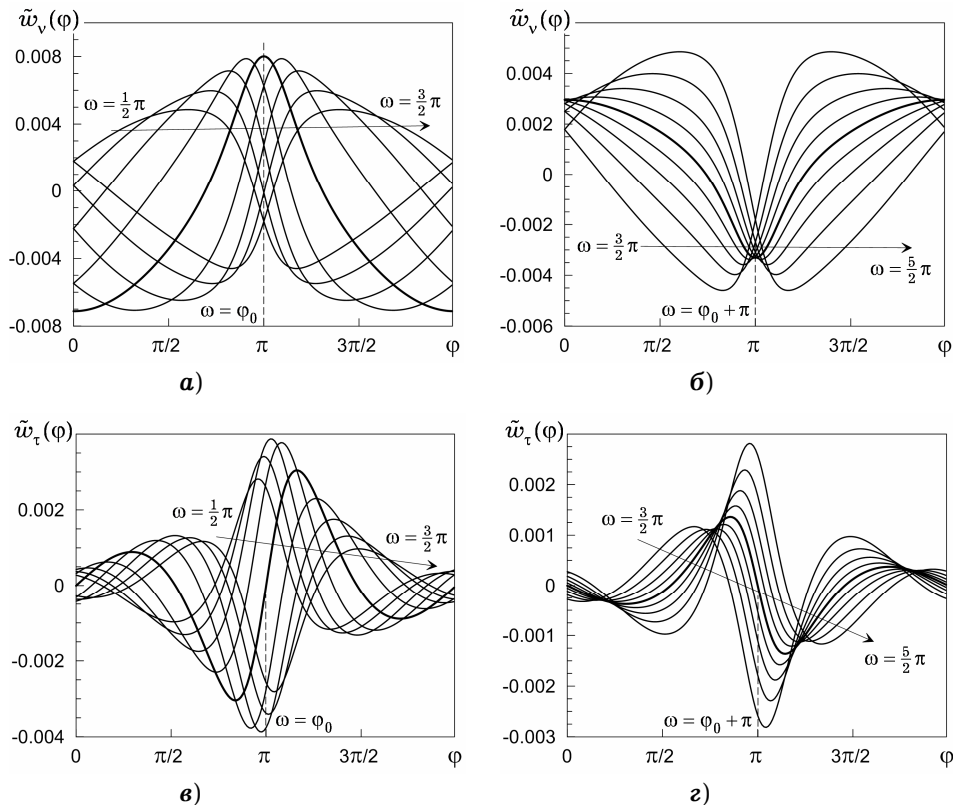


Рис. 2

Як бачимо з графіків на рис. 2, при зондуванні в діапазоні азимутів $\omega \in (\varphi_0 - \pi/2, \varphi_0 + \pi/2)$ параметр φ_0 однозначно визначається азимутом $\omega = \omega_0$ зондувального потоку, для якого максимум функції $\tilde{w}_v(\varphi, \omega_0)$ за змінною $\varphi \in$ максимальним: $\varphi_0 = \omega_0 \equiv \arg \{ \max_{\omega} \{ \max_{\xi} (\tilde{w}_v(\varphi, \omega)) \} \}$, а функція $\tilde{w}_\tau(\varphi, \omega_0)$ є непарною: $\varphi_0 = \omega_0 \mid \tilde{w}(-\varphi, \omega_0) = -\tilde{w}(\varphi, \omega_0)$. При зондуванні в діапазоні азимутів $\omega \in (\varphi_0 + \pi/2, \varphi_0 + 3\pi/2)$ параметр φ_0 однозначно визначається азимутом $\omega = \omega_0$ зондувального потоку, для якого мінімум функції $\tilde{w}_v(\varphi, \omega_0)$ є максимальним: $\varphi_0 - \pi = \omega_0 \equiv \arg \{ \max_{\omega} \{ \min_{\xi} (\tilde{w}_v(\varphi, \omega)) \} \}$, а функція $\tilde{w}_\tau(\varphi, \omega_0)$ є непарною: $\varphi_0 - \pi = \omega_0 \mid \tilde{w}(-\varphi, \omega_0) = -\tilde{w}(\varphi, \omega_0)$. Таким чином, параметр φ_0 порожнини можна ідентифікувати незалежно від двох інших.

Для ідентифікації параметрів $\bar{\rho}_0$ та $\bar{\tau}_0$ слід взяти не менше двох незалежних інформативних ознак поверхневих переміщень. За такі ознаки можна вибирати певні функціонали полів $\tilde{w}_v(\varphi, \varphi_0)$ і $\tilde{w}_\tau(\varphi, \varphi_0)$, наприклад, їх значення у точках екстремумів:

$$F_1 = \max_{\varphi} \{ \tilde{w}_v(\varphi, \varphi_0) \}, \quad F_2 = \min_{\varphi} \{ \tilde{w}_v(\varphi, \varphi_0) \},$$

$$F_3 = \max_{\varphi} \{ \tilde{w}_\tau(\varphi, \varphi_0) \} \equiv - \min_{\varphi} \{ \tilde{w}_\tau(\varphi, \varphi_0) \},$$

$$F_4 = \max_{\varphi} \{ \tilde{w}_v(\varphi, \varphi_0 - \pi) \}, \quad F_5 = \min_{\varphi} \{ \tilde{w}_v(\varphi, \varphi_0 - \pi) \},$$

$$F_6 = \max_{\varphi} \{ \tilde{w}_\tau(\varphi, \varphi_0 - \pi) \} \equiv - \min_{\varphi} \{ \tilde{w}_\tau(\varphi, \varphi_0 - \pi) \}.$$

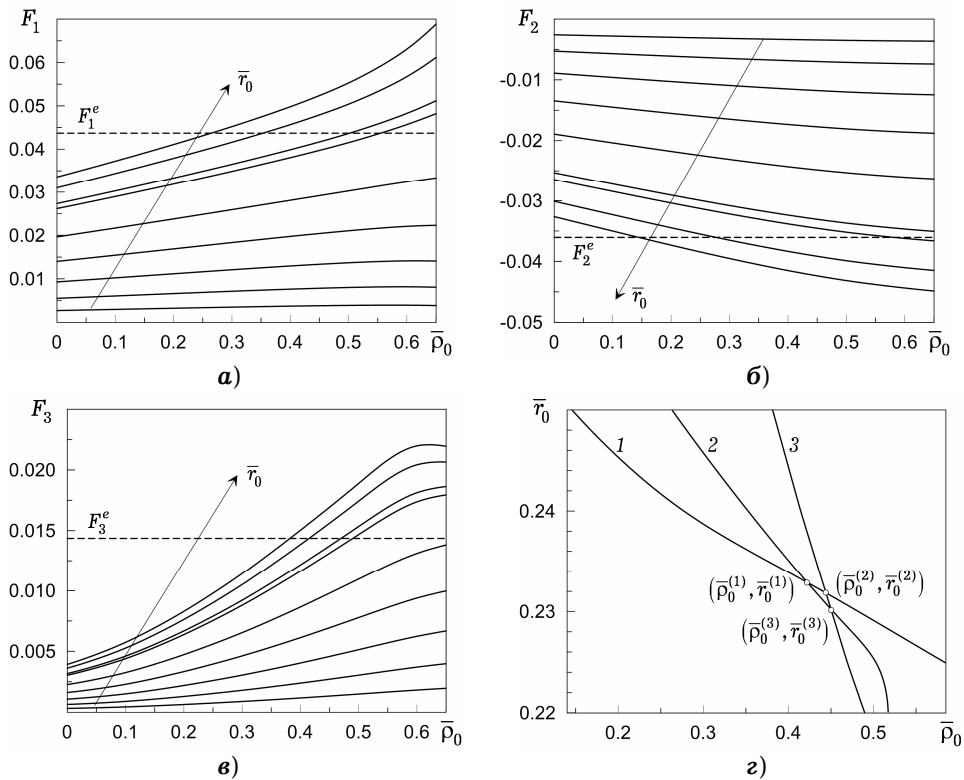


Рис. 3

На рис. 3а, рис. 3б, рис. 3в для прикладу наведено результати розрахунку залежностей функціоналів F_1 , F_2 , F_3 , від параметра $\bar{\rho}_0$ для різних значень параметра $\bar{\tau}_0 = 0.07, 0.1, 0.13, 0.16, 0.19, 0.22, 0.225, 0.24, 0.25$, отримані внаслідок розв'язування прямої задачі для відповідних наборів значень пари параметрів $\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0$ за фіксованого азимуту кута зондування $\omega = \varphi_0$.

Як бачимо, значення функціоналів F_1 , F_2 та F_3 істотно залежать від параметрів $\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0$ які підлягають ідентифікації. Тому нижче використаємо їх для формулювання оберненої задачі.

4. Методика розв'язування оберненої задачі. Здійснені кількісні дослідження інформативних параметрів F_1 , F_2 та F_3 , визначених внаслідок зондування об'єкта відомим тепловим потоком з азимутами $\omega = \varphi_0$, підтверджують можливість їх використання в ролі вхідних даних для оберненої задачі. Позначимо через $F_1^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0)$, $F_2^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0)$ та $F_3^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0)$ залежності функціоналів F_1 , F_2 та F_3 від значень параметрів $\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0$, які підлягають ідентифікації. Аналітична структура цих функцій є невизначеною, проте значення кожної з них можна розрахувати для будь-яких заданих значень $\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0$ з використанням розробленого алгоритму розв'язування прямої задачі.

Нехай F_1^e, F_2^e та F_3^e – емпіричні значення інформативних параметрів, отримані внаслідок фізичних вимірювань на реальному об'єкті. Тоді обернена задача зводиться до розв'язування переозначеної системи неявно заданих нелінійних рівнянь (9) стосовно параметрів $\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0$:

$$\begin{aligned} F_1^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0) &= F_1^e, \\ F_2^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0) &= F_2^e, \\ F_3^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0) &= F_3^e. \end{aligned} \quad (9)$$

Для оцінки ефективності запропонованого методу проведено числовий експеримент. Вхідні дані для оберненої задачі (значення функціоналів F_1^e, F_2^e, F_3^e) визначали як розв'язки прямої задачі із заданими значеннями безрозмірних радіуса порожнини $\bar{r}_0^e = 0.23$ та відстані $\bar{\rho}_0^e = 0.45$ її осі від осі циліндра. Потім розв'язували пряму задачу (7), (8) для азимуту зондувального потоку $\omega = \varphi_0$. На основі отриманого розв'язку обчислювали значення функціоналів F_1^c, F_2^c та F_3^c . Знайдені у такий спосіб числові значення $F_1^c = 0.0437$, $F_2^c = -0.0361$ та $F_3^c = 0.0143$ підставляли у праву частину системи (9), яку розв'язували графічно. Функції $F_1^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0) - F_1^e$, $F_2^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0) - F_2^e$ та $F_3^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0) - F_3^e$ задають у неявному вигляді три залежності $\bar{\rho}_0 = f_1(\bar{\tau}_0)$, $\bar{\rho}_0 = f_2(\bar{\tau}_0)$ та $\bar{\rho}_0 = f_3(\bar{\tau}_0)$. Для їх побудови використовували результати, наведені на рис. 3а, рис. 3б, рис. 3в. Штриховими лініями на цих рисунках показано «емпіричні» значення F_1^e, F_2^e та F_3^e . Точки перетину цих ліній з кривими $F_1^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0)$, $F_2^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0)$ та $F_3^c(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0)$ визначають три дискретні множини пар параметрів $(\bar{\rho}_0, \bar{\tau}_0)$ для функцій $\bar{\rho}_0 = f_1(\bar{\tau}_0)$, $\bar{\rho}_0 = f_2(\bar{\tau}_0)$, $\bar{\rho}_0 = f_3(\bar{\tau}_0)$ відповідно. На рис. 3г ці пари зображено точками. Точки перетину кривих 1, 2 з координатами $(\bar{\rho}_0^{(1)}, r_0^{(1)})$, кривих 1, 3 з координатами $(\bar{\rho}_0^{(2)}, r_0^{(2)})$ і кри-

вих 2, 3 з координатами $(\bar{\rho}_0^{(3)}, r_0^{(3)})$ визначають наближений розв'язок оберненої задачі ідентифікації параметрів $\bar{\rho}_0$ та \bar{r}_0 як середнє арифметичне: $\bar{\rho}_0 \approx (\bar{\rho}_0^{(1)} + \bar{\rho}_0^{(2)} + \bar{\rho}_0^{(3)})/3$ та $\bar{r}_0 \approx (r_0^{(1)} + r_0^{(2)} + r_0^{(3)})/3$. Отримано значення $\bar{\rho}_0 = 0.4389$, $\bar{r}_0 = 0.2316$, за якими встановлюємо апостеріорну похибку: $\Delta\bar{\rho}_0 = |0.4389 - 0.45| = 0.0111$, $\Delta\bar{r}_0 = |0.2316 - 0.23| = 0.0016$.

Для підвищення точності результату у випадку розв'язування перерахованої системи неявно заданих нелінійних рівнянь (9) слід згущувати сітку кривих на рис. 3, яким відповідають залежності параметрів F_1 , F_2 та F_3 від відносного полярного радіуса центру порожнини $\bar{\rho}_0$ за фіксованих значень її відносного радіуса \bar{r}_0 , тобто вибирати більшу дискретну множину параметрів $(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)$ для обчислення цих залежностей.

Для розв'язування цієї оберненої задачі можна застосувати ітераційний підхід, який базується на методі Гаусса – Ньютона. Приклад такого підходу розглянуто у статті [3], де розроблено ітераційний алгоритм розв'язування оберненої задачі теплової ідентифікації порожнини.

Висновок. Запропоновано теоретичні засади та математичний апарат неруйнівного безконтактного методу визначення параметрів тунельної порожнини в довгому циліндричному тілі за результатами його термопружного зондування шляхом дії зосередженими стаціонарними тепловими потоками в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Визначення параметрів порожнини зведено до розв'язування оберненої задачі, вхідними даними для якої є параметри термопружних переміщень поверхні тіла, які можна вимірювати із застосуванням безконтактних методів.

1. *Ищук И. Н., Фесенко А. И., Громов Ю. Ю.* Идентификация свойств скрытых подповерхностных объектов в инфракрасном диапазоне волн. – Москва: Машиностроение, 2008. – 184 с.
2. *Чекурін В., Сінькевич О.* Гранично-елементний метод для задач ідентифікації порожнин у циліндричному тілі з використанням локального нагріву та даних ІЧ-термографії // Електроніка та інформ. технології. – 2013. – Вип. 3. – С. 122–132.
3. *Чекурін В. Ф., Сінькевич О. О.* Гранично-елементний метод розв'язування двовимірних стаціонарних задач теплової ідентифікації тунельної порожнини у довгому циліндрі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 108–117.
4. *Чекурін В., Сінькевич О.* Двовимірні стаціонарні задачі ідентифікації порожнин у циліндричних тілах на основі даних ІЧ-термографії // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 105–115.
5. *Becker A. A.* The boundary element method in engineering: a complete course. Singapore: McGraw-Hill, 1992. – xiv + 337 p.
6. *Dang Dinh Ang, Dang Duc Trong, Masahiro Yamamoto.* Identification of cavities inside two-dimensional heterogeneous isotropic elastic bodies // J. Elasticity. – 1999. – 56, No. 3. – P. 199–212.
7. *Khodadad M., Ardakani M. D.* Inclusion identification by inverse application of boundary element method, genetic algorithm and conjugate gradient method // Am. J. Appl. Sci. – 2008. – 5, No. 9. – P. 1158–1166.
8. *Morassi A., Rosset E., Vessella S.* Recent results about the detection of unknown boundaries and inclusions in elastic plates // J. Inverse Ill-posed probl. – 2013. – 21, No. 2. – P. 311–352.
9. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic waves in solids. II: generation, acousto-optic interaction, applications. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – xiii+446 p.
10. *Souza M. P. V., Rebello J. M. A., Soares S.D., Freitas G. A. C.* Defect detection in fiberglass reinforced epoxy composite pipes reproducing field inspection conditions // QIRT 2008: 9th Int. Conf. Quantitative InfraRed Thermography (July 2–5, 2008, Krakow, Poland). – P. 477–483.

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ МЕТОД ТЕРМОУПРУГОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОЛОСТИ В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

Рассматривается задача определения геометрических параметров цилиндрической туннельной теплоизолированной полости в длинном цилиндрическом теле по измеренным поверхностным перемещениям, обусловленным стационарным нагревом тела сосредоточенными тепловыми потоками, в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. На основе метода граничных интегральных уравнений построена двумерная математическая модель термоупругого зондирования тела, в рамках которой сформулированы прямая и обратная задачи идентификации параметров полости. С использованием метода граничных элементов проведено исследование термоупругих перемещений поверхности тела и выявлены характеристики полей нормальных и тангенциальных перемещений поверхности, которые можно выбрать как информативные параметры для обратной задачи. С использованием этих параметров сформулирована обратная задача идентификации геометрических параметров полости. Предложен гранично-элементный алгоритм ее решения.

BOUNDARY-ELEMENT METHOD FOR THERMOELASTIC IDENTIFICATION OF CAVITY IN A LONG CYLINDRICAL BODY

A problem for determination geometric parameters of a cylindrical cavity in the long cylindrical body is considered in the paper. Displacements of body's external surface, caused by its heating by concentrated stationary heat fluxes under convective heat exchange of the body with environment, are used as input data for the identification problem. A 2D mathematical model for stationary thermoelastic sounding of the object is built with the use of the boundary integral equations. The direct and inverse problems for cavity's parameters identification are formulated within the model. With the use of the boundary-element method thermoelastic displacements of body's external surface are studied. On this basis a set of informative parameters is detected. A boundary-element algorithm for solving the inverse problem has been developed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.08.13