УДК 539.3

Б. М. Калиняк

РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА 2-ГО РОДУ ВІДНОСНО РАДІАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ДОВГОГО ЦИЛІНДРА

Задачу термопружності у напруженнях для неоднорідного порожнистого довгого циліндра з довільною залежністю фізико-механічних характеристик матеріалу від радіальної координати зведено до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіального напруження. Це рівняння отримано шляхом безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги і суцільності та розв'язано зведенням до системи алгебричних рівнянь. Результати обчислень порівнюються з відомими точними розв'язками задачі термопружності для окремих залежностей характеристик матеріалу від радіальної координати. Визначено характеристики матеріалів, температурне поле і навантаження, які забезпечують нульове радіальне напруження в циліндрі.

Останнім часом зросла кількість досліджень напружено-деформованого стану тіл простої форми, виготовлених з функціонально-ґрадієнтних матеріалів, що обумовлено дедалі більшим їх практичним використанням [8–10]. Такі задачі зводяться до розв'язування диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [3]. Важливе місце серед багатьох праць займають напіваналітичні методи, які дозволяють записати наближені формули для визначення напружено-деформованого стану таких тіл. Це суттєво підвищує ефективність розв'язування обернених задач термопружності, які отримуються при розв'язуванні задач оптимального за швидкодією керування нагріванням тіл за обмежень на напруження чи температуру та задач ідентифікації температури, напружень і деформацій за даними, отриманими на частині поверхні [2, 7].

Одним із методів, який добре себе зарекомендував при дослідженні термонапруженого стану термочутливих тіл і тіл, виготовлених з функціонально-ґрадієнтних матеріалів, є метод безпосереднього інтегрування рівнянь руху та суцільності в напруженнях з подальшим зведенням відповідної задачі термопружності до сукупності інтегральних рівнянь та інтегральних умов [3–5, 10]. При цьому виникає проблема вибору визначальних напружень, відносно яких будуються відповідні інтегральні рівняння [6].

Для визначення термопружного стану довгого порожнистого із залежними від радіальної координати характеристиками і (або) термочутливого циліндра при сталих тисках на його обмежуючих поверхнях та відомими масовими силами й розподілом температури, залежним від радіальної координати і, можливо, часу як параметра, побудовано інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду, у якому враховано також граничні умови. На відміну від попередніх робіт [3, 4, 10], де за визначальне напруження вибирали суму радіального та колового напружень, у цій роботі за визначальне вибрано радіальне напруження.

Формулювання задачі. Розглянемо довгий циліндр з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім – R_2 в умовах плоского деформованого стану (осьова деформація $e_z = \text{const}$) з відомим радіальним розподілом температури, який перебува під дією сталих тисків на обмежуючих поверхнях, масових сил, залежних від радіальної координати r. Циліндр виготовлений з матеріалу, фізико-механічні характеристики якого залежать від радіальної координати, включаючи, можливо, і залежність через температуру.

При цих припущеннях для визначення радіальних напружень σ_r, колових σ_φ, осьових σ_z напружень і, відповідно, деформацій e_r, e_φ, e_z та переміщень u_r використаємо [3–5] рівняння рівноваги

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2\sigma_r(\rho)) = \rho\sigma(\rho) - \rho^2 F(\rho)\,, \tag{1}$$

зв'язки між деформаціями і напруженнями

$$e_r(\rho) = \frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}\sigma_r(\rho) - \frac{\nu(\rho)(1+\nu(\rho))}{E(\rho)}\sigma(\rho) - e_z\nu(\rho) + (1+\nu(\rho))\Phi(\rho)\,,$$

$$e_\varphi(\rho) = -\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}\sigma_r(\rho) + \frac{1-\nu^2(\rho)}{E(\rho)}\sigma(\rho) - e_z\nu(\rho) + (1+\nu(\rho))\Phi(\rho)\,,$$

$$e_z = \frac{1}{E(\rho)}[\sigma_z(\rho) - \nu(\rho)\sigma(\rho)] + \Phi(\rho)\,, \tag{2}$$

рівняння сумісності в напруженнях, отримане з урахуванням рівняння рівноваги (1) та зв'язків (2):

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-\nu^2(\rho)}{E(\rho)}\sigma(\rho) - e_z\nu(\rho) + (1+\nu(\rho))\Phi(\rho)\right] =$$

$$= \sigma_r(\rho)\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}\right] - \frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}F(\rho)\,, \tag{3}$$

а також граничні умови

$$\sigma_r(\rho_1) = -p_1, \qquad \sigma_r(1) = -p_2, \qquad \int_{p_1}^{1}\eta\sigma_z(\eta)\,d\eta = p\,. \tag{4}$$

У рівняннях, виразах та умовах (1)–(4) $\rho = r/R_2$ – безрозмірна радіальна координата; $E(\rho)$ – модуль пружності матеріалу; $\nu(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона; $F(\rho)$ – густина масових сил; $T(\rho)$ – задане температурне поле; $\alpha_t(\rho, T(\rho))$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення; T_0 – вибрана за відлікову стала температура, при якій за відсутності деформацій напруження дорівнюють нулеві, p_1, p_2, p – відомі навантаження; $\sigma(\rho) = \sigma_r(\rho) + \sigma_\varphi(\rho)$ – сумарні напруження,

$$\Phi(\rho) = \int_{T_0}^{T(\rho)}\alpha_t(\rho,\tau)\,d\tau\,,$$

$$\sigma_z(\rho) = e_z E(\rho) + \nu(\rho)\sigma(\rho) - E(\rho)\Phi(\rho)\,.$$

Зведення задачі до інтегрального рівняння. Якщо диференціальне рівняння сумісності (3) проінтегрувати за радіальною змінною, то отримуємо інтегральне рівняння, яке пов'язує сумарні та радіальні напруження [4, 5]

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\sigma_r\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)d\eta + A\frac{E}{1-\nu^2} + e_z\frac{E}{1-\nu^2}\nu -$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta\frac{1+\nu}{E}F\,d\eta - \frac{E}{1-\nu^2}(1+\nu)\Phi(T)\,. \tag{5}$$

Якщо визначити $\sigma(\rho)$ з рівняння рівноваги (1) та підставити його у вираз (5), повторно проінтегрувати отримане рівняння з використанням формули інтегрування частинами у повторних інтегралах, то отримуємо таке інтегральне рівняння Вольтерра відносно радіальних напружень:

$$\sigma_r(\rho) - \frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}[V(\rho) - V(\eta)]\sigma_r(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)d\eta =$$

$$= A\frac{V(\rho)}{\rho^2} + e_z\frac{W(\rho)}{\rho^2} + f(\rho), \qquad (6)$$

де

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta\left\{\frac{E(\eta)}{1-\nu^2(\eta)}(1+\nu(\eta))\Phi(T(\eta)) + \right.$$

$$\left. + \left[(V(\rho) - V(\eta))\frac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)} + \eta\right]F(\eta)\right\}d\eta - \frac{1}{\rho^2}\rho_1^2 p_1,$$

$$V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho}\frac{E\eta}{1-\nu^2}d\eta, \qquad W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho}\eta\nu\frac{E}{1-\nu^2}d\eta,$$

A і e_z – сталі, які визначаємо з такої системи двох лінійних алгебричних рівнянь:

$$AV(1) + e_z W(1) = d_1 - \int_{\rho_1}^{1}[V(1) - V(\eta)]\sigma_r(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)d\eta,$$

$$AW(1) + e_z V(1) = d_2 - \int_{\rho_1}^{1}[W(1) - W(\eta)]\sigma_r(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)d\eta, \qquad (7)$$

отриманої з рівняння (6) при $\rho = 1$ і крайових умов (4). Тут

$$d_1 = -p_2 - f(1),$$

$$d_2 = p + \int_{\rho_1}^{1}\eta E\Phi(T)\,d\eta + \int_{\rho_1}^{1}[W(1) - W(\eta)]\frac{1+\nu}{E}\eta F\,d\eta +$$

$$+ \int_{\rho_1}^{1}\frac{\eta E\nu}{1-\nu^2}(1+\nu)\Phi(T)\,d\eta. \qquad (8)$$

Розв'язок системи рівнянь (7) має вигляд

$$A = \frac{d_1 V(1) - d_2 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} - \int_{\rho_1}^{1}\sigma_r(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left\{1 - \frac{V(1)V(\eta) - W(1)W(\eta)}{V^2(1) - W^2(1)}\right\}d\eta,$$

$$e_z = \frac{d_2 V(1) - d_1 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} - \int_{\rho_1}^{1}\sigma_r(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\frac{W(1)V(\eta) - V(1)W(\eta)}{V^2(1) - W^2(1)}d\eta. \qquad (9)$$

Якщо в інтегральне рівняння (6) підставити вирази (9) для сталих A і e_z, то отримаємо таке рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіального напруження $\sigma_r(\rho)$:

$$\sigma_r(\rho) + \int_{\rho_1}^{1}\mathcal{K}(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)\,d\eta = Q(\rho), \qquad (10)$$

де

$$\mathcal{K}(\rho,\eta) = \begin{cases}\mathcal{K}_1(\rho,\eta), & \eta < \rho,\\ \mathcal{K}_2(\rho,\eta), & \eta > \rho,\end{cases} \qquad (11)$$

$$\mathcal{K}_1(\rho,\eta) = \left[-\frac{V(\rho) - V(\eta)}{\rho^2} + \frac{V(\rho) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)}{\rho^2}\right]\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$\mathcal{K}_2(\rho,\eta) = \left[\frac{V(\rho) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)}{\rho^2}\right]\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$\mathcal{K}_1(\rho,\rho) = \mathcal{K}_2(\rho,\rho) = \left[\frac{V(\rho) - V(\rho)Z_1(\rho) + W(\rho)Z_2(\rho)}{\rho^2}\right]\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu}{E}\right), \qquad (12)$$

$$Z_1(\rho) = \frac{V(1)V(\rho) - W(1)W(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)}, \qquad Z_2(\rho) = \frac{W(1)V(\rho) - V(1)W(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)},$$

$$Q(\rho) = \frac{V(\rho)}{\rho^2}\frac{d_1V(1) - d_2W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + \frac{W(\rho)}{\rho^2}\frac{d_2V(1) - d_1W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + f(\rho). \qquad (13)$$

Як випливає з (11), (12), ядро інтегрального рівняння (10) є неперервним. Інтегральне рівняння (10) є рівнянням Фредгольма 2-го роду і дозволяє визначити радіальні напруження з урахуванням крайових умов. Тоді сумарні напруження можна визначити з рівняння (5), колові напруження – з формули $\sigma_\varphi(\rho) = \sigma(\rho) - \sigma_r(\rho)$, осьові напруження – з фізичних співвідношень (2) при використанні формул (7), деформації – з формул (2), радіальне переміщення – з виразу Коші для деформацій і переміщень у циліндричній системі координат

$$e_\varphi = \frac{u_r(\rho)}{\rho},$$

де $u_r(\rho) = \bar{u}_r(\rho R_2)/R_2$ – безрозмірне переміщення, $\bar{u}_r(r) = \bar{u}_r(\rho R_2)$ – розмірне переміщення.

Розв'язування інтегрального рівняння. Інтегральне рівняння (11) запишемо у вигляді

$$\sigma_r(\rho) + \int_{\rho_1}^{\rho} \mathcal{K}_1(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)\,d\eta + \int_{\rho}^{1} \mathcal{K}_2(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)\,d\eta = Q(\rho).$$

Розіб'ємо інтервал $[\rho_1, 1]$ на n відрізків, в результаті матимемо $n+1$ точку розбиття. Ядро $\mathcal{K}(\rho,\eta)$ інтегрального рівняння запишемо у вигляді

$$\mathcal{K}_1(\rho,\eta) = \frac{1 - Z_1(\rho)}{\rho^2}V(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) + \\ + \frac{Z_2(\rho)}{\rho^2}W(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$\mathcal{K}_2(\rho,\eta) = \frac{V(\rho)}{\rho^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) - \frac{Z_1(\rho)}{\rho^2}V(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) + \\ + \frac{Z_2(\rho)}{\rho^2}W(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right).$$

Для обчислення інтегралів використано метод трапецій. Після згрупування членів біля $\sigma_r(\rho_i)$, $i = 1,\ldots,n+1$, отримаємо систему $n+1$ лінійних алгебричних рівнянь для визначення $\sigma_r(\rho_i)$. Цю систему лінійних рівнянь розв'язано методом Ґаусса. Інтегральне рівняння можна розв'язувати й іншими методами, зокрема, методами сплайнів, резольвенти [1].

Для практики важливим є наявність методу швидкого і точного обчислення напружень у неоднорідних і термочутливих тілах. Розглянемо два приклади. Перший приклад вибрано для перевірки точності запропонованого підходу, а другий приклад показує можливість отримання нульових температурних радіальних напружень за рахунок підбору осьових навантажень p та радіальної залежності характеристик матеріалу при заданому температурному полі.

Приклад 1. Вважаємо, що циліндр знаходиться при заданих навантаженнях $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p = 0$, відсутності температурного поля і масових сил і виготовлений з матеріалу зі степеневою залежністю модуля пружності від координати $E = E_0\rho^s$ при сталому коефіцієнті Пуассона $\nu = 0.25$, $\rho_1 = 0.5$. У цьому випадку задача термопружності має точний розв'язок, який не залежить від E_0 [4]

$$\sigma_r^{\text{exact}}(\rho) = D_1\rho^{\lambda_1 - 2} + D_2\rho^{\lambda_2 - 2},$$

$$\sigma^{\text{exact}}(\rho) = D_1\lambda_1\rho^{\lambda_1 - 2} + D_2\lambda_2\rho^{\lambda_2 - 2},$$

де

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(s + 2 + \sqrt{(s+2)^2 - 4s\frac{1}{1-\nu}}\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(s + 2 - \sqrt{(s+2)^2 - 4s\frac{1}{1-\nu}}\right),$$

$$D_1 = \frac{-p_1 + p_2\rho_1^{\lambda_2 - 2}}{\rho_1^{\lambda_1 - 2} - \rho_1^{\lambda_2 - 2}}, \qquad D_2 = \frac{p_1 - p_2\rho_1^{\lambda_1 - 2}}{\rho_1^{\lambda_1 - 2} - \rho_1^{\lambda_2 - 2}}.$$

Результати обчислень подані у табл. 1 для різних значень радіусів ρ та показника неоднорідності s.

Таблиця 1

ρ	$s = 10, N = 10$			$s = 5, N = 10$		
	$\frac{\sigma_r^{\text{exact}}}{\rho_1^2 p_1}$	$\frac{\sigma_r^{IE}}{\rho_1^2 p_1}$	$\frac{\sigma_r^{\text{exact}} - \sigma_r^{IE}}{\sigma_r^{\text{exact}}}$ %	$\frac{\sigma_r^{\text{exact}}}{\rho_1^2 p_1}$	$\frac{\sigma_r^{IE}}{\rho_1^2 p_1}$	$\frac{\sigma_r^{\text{exact}} - \sigma_r^{IE}}{\sigma_r^{\text{exact}}}$ %
0.5	−1.0000	−1.00000	0	−0.999999	−1.00000	0.0001
0.55	−0.931341	−0.930663	−0.0728	−0.9378978	−0.9375801	−0.03387
0.6	−0.874306	−0.873200	−0.1265	−0.8919810	−0.8914993	−0.054
0.65	−0.827668	−0.826308	−0.16432	−0.8603542	−0.8598060	−0.06372
0.7	−0.791416	−0.789928	−0.18802	−0.8419106	−0.8413600	−0.0654
0.75	−0.766836	−0.765326	−0.19691	−0.8360927	−0.8355829	−0.06097
0.8	−0.756764	−0.755328	−0.18976	−0.8427413	−0.8423019	−0.05214
0.85	−0.765990	−0.764728	−0.16475	−0.8619955	−0.8616475	−0.04037
0.9	−0.801834	−0.800856	−0.12197	−0.8942266	−0.8939849	−0.02703
0.95	−0.874892	−0.874326	−0.06469	−0.9399915	−0.9398668	−0.01327
1	−0.999999	−0.999999	0	−1.000000	−1.000000	0

При сталих характеристиках матеріалу інтегральне рівняння (10) перетворюється у розв'язок задачі Ляме. Значення радіальних і колових напружень у цьому випадку дорівнюють -1.0 по всій товщині циліндра. Неоднорідність матеріалу зі степеневою залежністю модуля пружності приводить до зміни значень радіальних напружень на $25\,\%$ при його зміні по товщині на $75\,\%$.

Приклад 2. Розглянемо порожнистий циліндр з геометричними параметрами з *прикладу 1*, виготовлений з двокомпонентного функціонально-ґрадієнтного металокерамічного матеріалу, характеристики якого виражаються при нульовій пористості через характеристики компонент за формулами [9]:

$$E(\rho)=\frac{E_c[E_c+(E_m-E_c)V_m^{2/3}(\rho)]}{E_c+(E_m-E_c)(V_m^{2/3}(\rho)-V_m(\rho))},$$

$$\alpha(\rho)=\frac{\alpha_m K_m V_m(\rho)+\alpha_c K_c V_c(\rho)}{K_m V_m(\rho)+K_c V_c(\rho)},$$

$$\nu=\nu_m V_m+\nu_c V_c,\quad K_m=\frac{E_m}{2(1-\nu_m)},\quad K_c=\frac{E_c}{2(1-\nu_c)},\quad V_c(\rho)=1-V_m(\rho).$$

Тут індекс « m » стосується металу, а індекс « c » – кераміки; $V_m(\rho)$, $V_c(\rho)$ – об'ємна концентрація металу в кераміці і кераміки в металі, значення яких лежать в інтервалі $[0,1]$. Фізико-механічні характеристики матеріалів є такими:

кераміка: $E=151.0$ ГПа, $\alpha=10.0\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$, $\nu=1/3$;

метал: $E=100.7$ ГПа, $\alpha=3.95\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$, $\nu=1/3$.

Приймемо, що циліндр знаходиться під дією нульових навантажень на зовнішній і внутрішній поверхнях $(p_1=p_2=0)$ та осьового навантаження $p=7.222488122\cdot10^7$ Па, температурного поля $T(\rho)=T_2-\dfrac{(T_2-T_1)\ln\rho}{\ln\rho_1}$, $T_1=$ $=400$ К, $T_2=600$ К, $T_0=273$ К,

$$V_m(\rho)=[-1.74805878\cdot10^{-3}K_c+(1+\nu_m)\alpha_c K_c(\rho)(T-T_0)]\times$$
$$\times[1.74805878\cdot10^{-3}(K_m-K_c)-(1+\nu_m)(T(\rho)-T_0)(\alpha_m K_m-\alpha_c K_c)]^{-1}.$$

При такому виборі характеристик отримуємо $Q(\rho)=0$, а, отже, і $\sigma_r(\rho)=0$.

Висновки. Задача термопружності у довгому порожнистому циліндрі з залежними від радіальної координати характеристиками матеріалу та відомим температурним полем при заданих навантаженнях на його поверхнях і вздовж осі зведена до одного інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду відносно визначального радіального напруження, у якому враховано і граничні умови.

Запропонований алгоритм розв'язування отриманого інтегрального рівняння на основі квадратурних формул і зведення до системи алгебричних рівнянь є достатньо точним для різних товщин циліндра та залежностей характеристик матеріалу від радіальної координати, про що свідчать відносні похибки значень радіальних напружень відносно точних аналітичних розв'язків, які є меншими від 0.2% для значення показника степеня $s=10$ та менші 0.065% для значення показника степеня $s=5$ у випадку залежності модуля пружності $E=E_0\rho^s$.

Результати прикладу 2 вказують на можливість керування температурними напруженнями шляхом визначення характеристик неоднорідних матеріалів відповідно до розподілу температури або розподілу температури при заданій залежності характеристик матеріалів від координат.

Граничні умови задовольняються точно в обох прикладах.

Формулювання задачі термопружності у вигляді рівняння Фредгольма другого роду є основою для розв'язання обернених задач щодо визначення характеристик матеріалу, силових та теплових навантажень у неоднорідному довгому циліндрі, які приводять до заданого розподілу напружень, зокрема, нульового. Підставою для такого твердження є те, що побудоване рівняння (10), яке містить повну інформацію про термопружний стан тіла, можна трактувати як інтегральне рівняння Фредгольма відносно будь-якої фізико-механічної характеристики, масових сил, силового чи температурного навантаження, які входять у $Q(\rho)$.

1. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
3. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. *Вігак В. С.* Розв'язок задач пружності та термопружності у напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Т. 9. – С. 34–131.
4. *Калиняк Б. М.* Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 2. – С. 79–86.
5. *Калиняк Б. М., Попович В. С.* Напружений стан багатошарового термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму //Машинознавство. – 2005. – № 2. – С. 22–30.
7. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термомеханіка термочутливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 2.)
6. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.)
8. *Hetnarski R. B., Eslami M. R.* Thermal stresses – Advanced theory and applications. – New York: Springer, 2008. – 559 p. – Ser. Solid Mechanics and Applications. – Vol. 158 / Ser. Ed. G. M. L. Gladwell.
9. *Obata Y., Noda N.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. – 1994. – **17**, No. 3. – P. 471–487.
10. *Tokovyy Yu. V., Ma Chien-Ching.* Analysis of 2D non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for radially inhomogeneous hollow cylinders // J. Eng. Math. – 2008. – **61,** No. 2-4. – P. 171–184.

УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА 2-ГО РОДА ОТНОСИТЕЛЬНО РАДИАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛОГО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

Задача термоупругости в напряжениях для длинного полого неоднородного цилиндра с произвольной зависимостью физико-механических свойств материала от радиальной координаты сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно радиального напряжения. Это уравнение получено непосредственным интегрированием уравнений равновесия и сплошности и решено сведением к системе алгебраических уравнений. Результаты вычислений сравниваются с известными точными решениями для отдельных зависимостей характеристик материала от радиальной координаты. Определены характеристики материалов, температурное поле и нагрузки, обеспечивающие нулевое радиальное напряжение в полом цилиндре.

FREDHOLM INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND RELATIVE TO THE RADIAL STRESSES FOR DETERMINING THE THERMOELASTIC STATE OF THE HOLLOW LONG INHOMOGENEOUS CYLINDER

The thermo-elasticity problem in terms of stresses in a long inhomogeneous hollow cylinder with arbitrary dependence of the physical characteristics of material on the radial coordinate or on the temperature is reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind. This integral equation relative to the radial stress is obtained through direct integration of the equilibrium and compatibility equations and is solved by reduction to the set of linear algebraic equations. Numerical results are compared with those, obtained from exact analytical solution of the problem. The material characteristics, temperature field and loading are determined to obtain zero radial stress in a hollow cylinder.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.12.12