УДК 539.3

В. Л. Богданов

ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА РУЙНУВАННЯ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ З ПРИПОВЕРХНЕВОЮ ТРІЩИНОЮ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

На основі співвідношень лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла досліджено просторову задачу про руйнування попередньо напруженого напівобмеженого композита з приповерхневою дископодібною тріщиною кручення (Mode III crack). З використанням подань загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції та інтегральних перетворень Ганкеля задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь, а потім – до розв'язуючого інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. З аналізу розподілу напружень в околі тріщини отримано значення коефіцієнтів інтенсивності напружень і досліджено їх залежність від початкових напружень, механічних характеристик компонентів композита та геометричних параметрів задачі.

Вступ. Початкові (залишкові) напруження і деформації практично завжди існують в реальних конструкційних матеріалах та елементах конструкцій внаслідок технологічних процесів їх виготовлення (що особливо характерно для композиційних матеріалів, у яких часто виникають залишкові напруження вздовж армуючих елементів) та з'єднання [17], в геологічних породах, судинах живих організмів тощо і суттєво впливають на процес руйнування тіл з тріщинами. В галузі механіки композитних матеріалів і механіки матеріалів з покриттям (теплоізоляційним, антикорозійним і т. п.) досить розповсюджені явища приповерхневого відшарування при дії напружень, спрямованих уздовж дефектів (тріщин, розшарувань, непроклеїв). У той же час, в рамках класичної механіки руйнування неможливо врахувати вплив початкових напружень, що діють уздовж поверхонь тріщин, на параметри руйнування, зокрема, на коефіцієнти інтенсивності напружень і величини розкриття тріщин [6, 10, 12, 14, 21].

Останнім часом для ефективного дослідження таких проблем використовують запропонований в роботах [8, 10, 12] підхід, відповідно до якого напружено-деформований стан попередньо напруженого матеріалу з тріщинами визначається в рамках лінеаризованої теорії пружності [10, 20]. Ключовим в обґрунтуванні цього підходу є той факт, що використання лінеаризованих співвідношень, на відміну від підходів лінійної теорії пружності, дозволяє описати явище, пов'язане з впливом компонент зусиль, що діють уздовж поверхонь тріщин, на параметри руйнування матеріалів. При цьому запропоновані у роботах [10–12] критерії руйнування матеріалів з початковими напруженнями є аналогами енергетичного критерію Ґріффітса та силового критерію Ірвіна.

В [1, 3, 5, 7, 9, 22, 24] з використанням вказаного підходу розглянуто окремі класи статичних і динамічних задач для ізольованих та взаємодіючих тріщин у попередньо напружених тілах. У [13] досліджено лінеаризовану задачу про кручення однорідного ізотропного пружного півпростору з початковими напруженнями, що діють уздовж приповерхневої дископодібної тріщини. Аналіз впливу початкових напружень на руйнування композитів з приповерхневими дископодібними тріщинами нормального відриву (Mode I) та радіального зсуву (Mode II) здійснено у [2, 4, 18, 19].

У цій роботі розглянуто осесиметричну задачу про руйнування попередньо напруженого композитного матеріалу, що містить приповерхневу кругову тріщину кручення (Mode III), розміщену паралельно до вільної поверхні матеріалу. При цьому розглядається випадок, коли радіус тріщини істотно більший від розмірів структурних елементів композита, і досліджуються лише процеси руйнування, при яких не проявляються властивості композита як кусково-однорідного середовища (типу руйнування на межі

розділу середовищ). За таких припущень можна застосовувати континуальну модель композита зі зведеними ефективними фізико-механічними характеристиками [16]. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини та досліджено їх залежність від значень початкових напружень. Для шаруватого (з ізотропними шарами) композита, який моделюється трансверсально-ізотропним тілом, площини ізотропії якого паралельні до площини розміщення тріщини, досліджено вплив механічних характеристик композита на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

1. Постановка задачі. Будемо використовувати лаґранжеві координати y_j, які в початковому стані (зумовленому дією початкових напружень S_{ij}^0) збігаються з декартовими координатами. Ці координати пов'язані з декартовими координатами недеформованого стану x_j, $j = 1,2,3$, співвідношеннями $y_j = \lambda_j x_j$, де λ_j – коефіцієнти подовження (чи скорочення) вздовж координатних осей, що визначаються початковими розтягуючими (чи стискаючими) напруженнями S_{ij}^0 (S_{ij}^0 є компонентами симетричного тензора напружень, віднесеними до одиниці площі тіла в недеформованому стані).

Розглянемо кругову тріщину радіуса a, що розташована у верхньому півпросторі $y_3 \geq -h$ у площині $y_3 = 0$ з центром на осі Oy_3 (рис. 1). Нехай початкові (залишкові) напруження $S_{11}^0 = S_{22}^0$ спрямовано строго вздовж площини розміщення тріщини, що призводить до виникнення в тілі однорідного початкового стану у вигляді

$$S_{33}^0 = 0, \qquad S_{11}^0 = S_{22}^0 = \text{const} \neq 0, \qquad u_j^0 = \lambda_j^{-1}(\lambda_j - 1)y_j,$$

$$\lambda_j = \text{const}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \qquad j = 1,2,3, \tag{1}$$

де u_j^0 – компоненти вектора переміщень, що відповідає початковим напруженням S_{ij}^0. У подальшому будемо також використовувати такі позначення: Q'_{ij} – компоненти несиметричного тензора напружень Піоли – Кірхоффа 1-го роду, віднесені до одиничних площинок тіла в початковому деформованому стані; u_j – компоненти відповідного їм вектора переміщень.

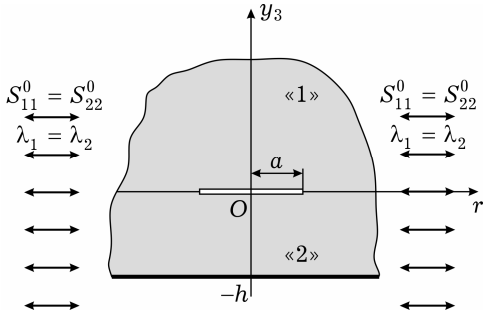

Рис. 1

Нехай до берегів тріщини антисиметрично відносно площини розміщення тріщини прикладено достатньо малі порівняно з S_{11}^0 дотичні скручувальні навантаження $Q'_{3\theta} = -\tau_\theta(r)$. У цьому випадку відмінними від нуля будуть лише компоненти вектора переміщень u_θ та тензора напружень $Q'_{3\theta}$, причому з огляду на осесиметричноість задачі ці компоненти будуть залежати лише від координат r та x_3:

$$u_r = 0, \qquad u_\theta = u_\theta(r, y_3), \qquad u_3 = 0,$$

$$Q'_{3r} = 0, \qquad Q'_{3\theta} = Q'_{3\theta}(r, y_3), \qquad Q'_{33} = 0. \tag{2}$$

Припускаючи, що границя півпростору вільна від зусиль, і враховуючи (2), маємо такі граничні умови задачі:

$$Q'_{3\theta} = -\tau_\theta(r), \qquad y_3 = \pm 0, \qquad 0 \le r < a,$$

$$Q'_{3\theta} = 0, \qquad y_3 = -h, \qquad 0 \le r < \infty. \tag{3}$$

Умови щодо малості додаткового навантаження порівняно з величинами початкових напружень і, відповідно, малості викликаних його дією збурень компонент початкового напружено-деформованого стану дають змогу застосовувати для дослідження поставленої задачі співвідношення лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла [10, 20]. Лінеаризовані співвідношення пружності та умови рівноваги для стисливого тіла у випадку однорідного початкового стану (1) мають вигляд [10, 12]

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta}, \qquad \omega'_{ij\alpha\beta} = \text{const}, \qquad i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

$$L'_{m\alpha} u_\alpha = 0, \qquad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta}, \tag{4}$$

де

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left[\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha})\mu_{ij}\right] + \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} S^0_{\beta\beta},$$

а величини $A_{i\beta}$, μ_{ij} залежать від характеристик матеріалу [10, 12].

У [10, 12] записано подання загальних рівнянь рівноваги (4) через потенціальні гармонічні функції, які з урахуванням співвідношень (2) набувають вигляду

$$u_r = 0, \qquad u_\theta = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \qquad u_3 = 0,$$

$$Q'_{3r} = 0, \qquad Q'_{3\theta} = C_{44} n_3^{-1/2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3}, \qquad Q'_{33} = 0, \tag{5}$$

де $z_3 \equiv n_3^{-1/2} y_3$. Потенціальна функція φ_3 задовольняє рівняння Лапласа

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\right)\varphi_3(r, z_3) = 0,$$

а величини C_{44}, n_3 залежать від початкових напружень і характеристик матеріалу [10, 12]. Зокрема, для лінійної моделі трансверсально-ізотропного матеріалу, яку будемо в подальшому використовувати, маємо

$$n_3 = G_{13}(G_{12} + S^0_{11})^{-1}, \qquad C_{44} = G_{13}, \tag{6}$$

де G_{12} і G_{13} – модулі зсуву відповідно у площині ізотропії та в перпендикулярному до неї напрямі.

Умовно розділимо тіло, що розглядається, на дві підобласті: «1» – півпростір $y_3 \ge 0$ і «2» – шар $-h \le y_3 \le 0$. Переформулюємо задачу, враховуючи, що на границі цих областей поза тріщиною переміщення і напруження мають бути неперервні, та беручи до уваги граничні умови (3):

$$Q'^{(2)}_{3\theta}(r, y_3) = -\tau_\theta(r), \qquad y_3 = 0, \qquad 0 \le r \le a, \tag{7}$$

$$Q'^{(2)}_{3\theta}(r, y_3) = 0, \qquad y_3 = -h, \qquad 0 \le r < \infty, \tag{8}$$

$$Q'^{(1)}_{3\theta}(r, y_3) = Q'^{(2)}_{3\theta}(r, y_3), \qquad y_3 = 0, \qquad 0 \le r < \infty, \tag{9}$$

$$u^{(1)}_{\theta}(r, y_3) = u^{(2)}_{\theta}(r, y_3), \qquad y_3 = 0, \qquad a < r < \infty. \tag{10}$$

Враховуючи подання компонент тензора напружень і вектора переміщень у вигляді (5), із (7)–(10) отримуємо остаточно наступну граничну задачу для потенціальної гармонічної функції $\varphi_3(r, z_3)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3^{(2)}}{\partial r \partial z_3} = 0, \qquad y_3 = -h, \quad 0 \le r < \infty, \tag{11}$$

$$C_{44} n_3^{-1/2} \frac{\partial^2 \varphi_3^{(2)}}{\partial r \partial z_3} = -\tau_{\theta}(r), \qquad y_3 = 0, \qquad 0 \le r \le a, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3^{(1)}}{\partial r \partial z_3} = \frac{\partial^2 \varphi_3^{(2)}}{\partial r \partial z_3}, \qquad y_3 = 0, \qquad 0 \le r < \infty, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_3^{(2)}}{\partial r}, \qquad y_3 = 0, \qquad a < r < \infty. \tag{14}$$

2. Зведення задачі до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Запишемо потенціальну функцію $\varphi_3(r, z_3)$ у кожній з підобластей «1» і «2» у вигляді інтегральних розкладів Ганкеля нульового порядку:

$$\varphi_3^{(1)}(r, z_3) = \int_0^{\infty} C(\lambda) e^{-\lambda z_3} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$\varphi_3^{(2)}(r, z_3) = \int_0^{\infty} [C_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_3 + h_3) + C_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_3 + h_3)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_3}, \tag{15}$$

де $h_3 \equiv h n_3^{-1/2}$, а $C(\lambda), C_1(\lambda), C_2(\lambda)$ – деякі невідомі функції. При цьому форма подання (15) враховує умову затухання збурень напружень і переміщень при $y_3 \to \infty$.

Підставляючи вирази (15) у граничні умови (11), (13), які задані на всій області зміни r, отримуємо два співвідношення, що пов'язують три невідомі функції $C(\lambda), C_1(\lambda), C_2(\lambda)$:

$$C_2(\lambda) = 0, \qquad C(\lambda) = -\operatorname{sh} \lambda h_3 C_1(\lambda). \tag{16}$$

Підставивши (15) у граничні умови (12) і (14), з урахуванням (16) отримуємо парні інтегральні рівняння

$$\int_0^{\infty} [1 + g(\lambda)] A(\lambda) J_1(\lambda r) \lambda \, d\lambda = \frac{2\tau_{\theta}(r)}{C_{44} n_3^{-1/2}}, \qquad r \le a,$$

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) J_1(\lambda r) \, d\lambda = 0, \qquad r > a, \tag{17}$$

де $g(\lambda) = -e^{-2\lambda h_3}$. Тут уведено нову функцію

$$A(\lambda) \equiv (1 + \operatorname{cth} \lambda h_3) C_1(\lambda). \tag{18}$$

Застосовуючи метод підстановки [15], виберемо розв'язок системи інтегральних рівнянь (17) у вигляді, що дозволяє тотожно задовольнити друге із рівнянь системи, яке відноситься до області $r > a$:

$$A(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t}\, \omega(t) J_{3/2}(\lambda t)\, dt =$$

$$= -\lambda^{-1} \left\{ \omega(a) \sin \lambda a - \int_0^a t^{-1} \sin \lambda t \, \frac{d}{dt}[t\omega(t)]\, dt \right\}, \qquad (19)$$

де $\omega(t)$ – невідома функція, неперервна разом зі своєю першою похідною на відрізку $[0, a]$.

Підставивши вираз (19) у друге з рівнянь системи (17), з урахуванням значення розривного інтегралу Вебера – Шафхейтліна

$$\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, J_1(\lambda r) J_{3/2}(\lambda t)\, dt = \begin{cases} 0, & 0 \le t < r, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{t}{r^{3/2}\sqrt{r^2 - t^2}}, & 0 < r < t, \end{cases}$$

легко показати, що це рівняння тотожно задовольняється.

Далі, підставивши подання (19) у перше з рівнянь (17), з урахуванням співвідношення

$$\lambda J_{3/2}(\lambda r) = -\, r^{1/2} \frac{d}{dr}\left[t^{-1/2} J_{1/2}(\lambda r) \right],$$

та значення розривного інтеграла Вебера – Шафхейтліна

$$\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, J_{1/2}(\lambda t) J_1(\lambda r)\, d\lambda = \begin{cases} 0, & t > r, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{t^{1/2}}{r\sqrt{r^2 - t^2}}, & 0 \le t < r, \end{cases}$$

після низки перетворень отримуємо таке рівняння:

$$\int_0^r \tilde{\omega}(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = r \int_0^\infty g(\lambda) A(\lambda) \lambda J_1(\lambda r)\, d\lambda + 2rC_{44}^{-1} \sqrt{n_3}\, \tau_\theta(r), \qquad (20)$$

де

$$\tilde{\omega}(t) \equiv \frac{d}{dt}[t\omega(t)]. \qquad (21)$$

Зробивши в лівій частині рівняння (20) підстановку $t = r \sin\theta$, отримуємо рівняння Шльомільха

$$\int_0^{\pi/2} \tilde{\omega}(r \sin\theta)\, d\theta = \mathcal{N}(r), \qquad r \le a, \qquad (22)$$

де

$$\mathcal{N}(r) \equiv r \int_0^\infty g(\lambda) A(\lambda) \lambda J_1(\lambda r)\, d\lambda + 2rC_{44}^{-1} \sqrt{n_3}\, \tau_\theta(r). \qquad (23)$$

Враховуючи, що рівняння Шльомільха $\int_0^{\pi/2} f(r \sin\theta)\, d\theta = \mathcal{N}(r)$ має розв'язок $f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\mathcal{N}(0) + x \int_0^{\pi/2} \mathcal{N}'(x \sin\theta)\, d\theta \right]$, і застосовуючи інтеграл Соніна

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta J_0(\lambda x \sin\theta)\, d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}}\, J_{1/2}(\lambda x),$$

з урахуванням, що $J_{1/2}(\lambda t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\lambda t}}\, \sin\lambda t$, з (22) отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\tilde{\omega}(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^a \tilde{\omega}(t)\tilde{\mathcal{K}}(x,t)\,dt = \frac{4}{\pi}x\int_0^{\pi/2}\tilde{q}'(x\sin\theta)\,d\theta\,, \tag{24}$$

де

$$\tilde{q}(x) \equiv \frac{x\tau_\theta(x)}{C_{44}n_3^{-1/2}}\,.$$

Ядро рівняння (24) має вигляд

$$\tilde{\mathcal{K}}(x,t) = 2x\int_0^\infty g(\lambda)(a^{-1}\sin\lambda a\sin\lambda x - t^{-1}\sin\lambda t\sin\lambda x)\,d\lambda\,. \tag{25}$$

Беручи до уваги, що

$$\int_0^\infty e^{-p\lambda}\sin\lambda t\sin\lambda x\,d\lambda = \frac{2pxt}{(p^2+x^2+t^2)^2 - 4x^2t^2} \equiv \tilde{I}_1(p,x,t)\,, \tag{26}$$

вираз для ядра (25) перепишемо у явному вигляді

$$\tilde{\mathcal{K}}(x,t) = 2x\left[t^{-1}\tilde{I}_1(2h_3,x,t) - a^{-1}\tilde{I}_1(2h_3,x,a)\right]. \tag{27}$$

Уведемо нові змінні $\xi \equiv a^{-1}x$, $\eta \equiv a^{-1}t$, $\beta_3 \equiv a^{-1}h_3$. З виразу для $\tilde{I}_1$ бачимо, що $\tilde{I}_1 = a^{-1}I_1$, де

$$I_1(2\beta_3,\xi,\eta) = \frac{4\beta_3\xi\eta}{(4\beta_3^2+\xi^2+\eta^2)^2 - 4\xi^2\eta^2}\,. \tag{28}$$

Позначивши $\tilde{\omega}(a\xi) \equiv af(\xi)$, інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (24) перепишемо у безрозмірному вигляді

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 f(\eta)\mathcal{K}(\xi,\eta)\,d\eta = \frac{4}{\pi}\xi\int_0^{\pi/2} q'(\xi\sin\theta)\,d\theta, \qquad 0 \le \xi \le 1\,, \tag{29}$$

з ядром

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = 2\xi\left[\eta^{-1}I_1(2\beta_3,\xi,\eta) - I_1(2\beta_3,\xi,1)\right], \tag{30}$$

де

$$q(\xi) \equiv \frac{\xi\tau_\theta(a\xi)}{C_{44}n_3^{-1/2}}\,.$$

3. Асимптотичний розподіл напружень в околі контуру тріщини та вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень. Як і в класичній механіці руйнування матеріалів без початкових напружень [23], коефіцієнти інтенсивності напружень в околі контуру тріщини визначаємо як коефіцієнти при сингулярностях у розподілі відповідних компонентів тензора напружень при наближенні до контуру тріщини:

$$K_I = \lim_{r\to a}[2\pi(r-a)]^{1/2}Q'_{33}(r,0)\,,$$

$$K_{II} = \lim_{r\to a}[2\pi(r-a)]^{1/2}Q'_{3r}(r,0)\,,$$

$$K_{III} = \lim_{r\to a}[2\pi(r-a)]^{1/2}Q'_{3\theta}(r,0)\,. \tag{31}$$

З розв'язку рівняння (29) з урахуванням (21), (19), (18), (16), (15) і подань (5) розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні функції можна отримати розподіл напружень та переміщень в матеріалі. Розглянемо значення компонент тензора напружень у площині розміщення тріщини $y_3 = 0$ в області поза тріщиною $r > a$. З (5) з урахуванням (15), (16) і (19), застосовуючи інтегрування частинами, отримуємо

$$Q'_{3\theta}(r,0) = \frac{1}{2} C_{44} n_3^{-1/2} \frac{a\omega(a)}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + O(1), \tag{32}$$

де $\omega(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \tilde{\omega}(t)\,dt$, а функцію $\tilde{\omega}(t)$ визначаємо з розв'язку рівняння (24); символом $O(1)$ позначено доданки, які не мають особливостей при $r \to a$.

Тоді з (31) маємо

$$K_I = 0, \qquad K_{II} = 0,$$

$$K_{III} = \frac{1}{2} C_{44} n_3^{-1/2} \sqrt{\pi}\, a^{-3/2} \int_0^a \tilde{\omega}(t)\,dt \tag{33}$$

або у безрозмірному вигляді

$$K_I = 0, \qquad K_{II} = 0,$$

$$K_{III} = \frac{1}{2} C_{44} n_3^{-1/2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta)\,d\eta, \tag{34}$$

де функцію $f(\eta)$ визначаємо з розв'язку рівняння (29).

Як бачимо, коефіцієнт інтенсивності напружень K_{III} залежить як від величин початкових напружень і переміщень (оскільки параметри C_{44}, n_3, а також функція f залежать від коефіцієнтів початкового подовження (скорочення) уздовж координатних осей λ_j, $j = 1,2,3$), так і від геометричних параметрів задачі (радіуса тріщини та відстані між тріщиною і поверхнею матеріалу).

Розглянемо випадок, коли відстань між тріщиною і границею півпростору прямує до нескінченності $h \to \infty$ $(\beta = h/a \to \infty)$. З виразу (30) для ядра бачимо, що $\lim\limits_{\beta\to\infty} \mathcal{K}(\xi,\eta) = 0$. Тоді з (29) маємо

$$f^{\infty}(\xi) = \lim_{\beta\to\infty} f(\xi) = \frac{4}{\pi}\xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi\sin\theta)\,d\theta. \tag{35}$$

Беручи до уваги, що $\xi\int_0^{\pi/2} q'(\xi\sin\theta)\,d\theta = \frac{d}{d\xi}\int_0^{\xi} \frac{\eta q(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}$, з (35) отримуємо

$$f^{\infty}(\xi) = \frac{4}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_0^{\xi} \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}\,d\eta.$$

Тоді

$$\int_0^1 f^{\infty}(\eta)\,d\eta = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta = \frac{4}{\pi}\frac{1}{C_{44} n_3^{-1/2}}\int_0^1 \frac{\eta^2 \tau_{\theta}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta. \tag{36}$$

Підставляючи (36) у вирази (33) для коефіцієнтів інтенсивності напружень, знаходимо

$$K_I^{\infty} = 0, \qquad K_{II}^{\infty} = 0,$$

$$K_{III}^{\infty} = \frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t^2 \tau_{\theta}(t)\,dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \tag{37}$$

або в безрозмірному вигляді

$$K_I^{\infty} = 0, \qquad K_{II}^{\infty} = 0\,,$$

$$K_{III}^{\infty} = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^1 \frac{\eta^2 \tau_\theta(a\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{38}$$

Зокрема, у випадку рівномірного скручувального навантаження на берегах тріщини, $\tau_\theta = \tau = \text{const}$, з (38) отримуємо

$$K_{III}^{\infty} = \frac{\tau}{2}\sqrt{\pi a}\,. \tag{39}$$

З виразів (37)–(39) бачимо, що в зазначеному граничному випадку розміщення тріщини коефіцієнти інтенсивності напружень не залежать від початкових напружень і переміщень, а їх значення повністю збігаються (з точністю до позначень) зі значеннями коефіцієнтів інтенсивності напружень, отриманими в задачі про ізольовану тріщину кручення в нескінченному матеріалі з початковими напруженнями [10, 12] і в задачі про тріщину кручення в нескінченному тілі в рамках механіки руйнування матеріалів без початкових напружень [23].

4. Закономірності впливу початкових напружень на коефіцієнти інтенсивності напружень. Нижче наводимо результати чисельного розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень для випадку скручувального навантаження на берегах тріщини вигляду (39). Для чисельного дослідження інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (29) використовували метод Бубнова – Гальоркіна з вибором системи степеневих функцій як системи координатних функцій, чисельне інтегрування проводили за квадратурними формулами Гаусса.

Як приклад наведемо результати чисельного дослідження для випадку шаруватого композита з ізотропними шарами. У макрооб'ємах такий композит моделюють трансверсально-ізотропним середовищем [16]. У межах теорії композитних матеріалів стохастичної структури ефективні макрохарактеристики таких композитів визначають за пружними характеристиками компонентів та їх об'ємною концентрацією в композиті [16]:

$$E_1^* = \frac{4\Delta G_{12}^*}{2G_{12}^*\lambda_{33}^* + \Delta}, \qquad E_3^* = \frac{\Delta}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*},$$

$$\nu_{13}^* = \frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}, \qquad \nu_{12}^* = \frac{E_1^*}{2G_{12}^*} - 1\,,$$

$$\Delta = \lambda_{33}^*(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) - 2(\lambda_{13}^*)^2, \qquad G_{13}^* = \lambda_{44}^*, \qquad G_{12}^* = \lambda_{66}^*,$$

$$\lambda_{13}^* = \langle\lambda\rangle - c_1c_2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2)z\,,$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) = \langle\lambda + \mu\rangle - c_1c_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 z\,,$$

$$\lambda_{33}^* = \langle\lambda + 2\mu\rangle - c_1c_2(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu_1 - 2\mu_2)z\,,$$

$$\lambda_{44}^* = \mu_1\mu_2\mu_4^{-1}, \qquad \lambda_{66}^* = \langle\mu\rangle, \qquad z = (\lambda_4 + 2\mu_4)^{-1},$$

$$\lambda_4 = c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1, \quad \mu_4 = c_1\mu_2 + c_2\mu_1, \quad \langle æ\rangle \equiv c_1æ_1 + c_2æ_2. \tag{40}$$

(Шари укладено в площинах Oy_1y_2; λ_ν, μ_ν – сталі Ляме ν-го шару, $\nu = 1, 2$; c_ν – об'ємна концентрація шарів з пружними властивостями λ_ν, μ_ν).

На рис. 2 наведено залежності співвідношення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{III}/K_{III}^{∞} (де K_{III}^{∞} – коефіцієнт інтенсивності напружень для випадку ізольованої тріщини в нескінченному матеріалі [12], який визначаємо з (39)) від параметра λ_1 початкового розтягу (або стиску), зумов-

леного дією початкових розтягуючих (або стискуючих) напружень S_{11}^0, для значень відносної відстані між тріщиною і границею півпростору $\beta = h/a = 1/4, 1/2, 1$ при відношенні модулів пружності шарів $E^{(1)}/E^{(2)} = 4$ з однаковими коефіцієнтами Пуассона $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ та при значенні $c_1 = 0.3$ коефіцієнта концентрації для шарів з модулем пружності $E^{(1)}$. При цьому значення $\lambda_1 > 1$ відповідають початковим розтягуючим напруженням, значення $\lambda_1 < 1$ – початковим стискуючим напруженням; при $\lambda_1 = 1$ початкові напруження відсутні. З рисунка бачимо, що значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{III} істотно залежать від початкових напружень, особливо у випадку дії стискуючих початкових напружень.

На рис. 3 для цього ж матеріалу наведено залежності співвідношень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{III}/K_{III}^{∞} від відношення модулів пружності ізотропних шарів $E^{(1)}/E^{(2)}$ для значень $\lambda_1 = 0.97$ (стискуючі початкові напруження), $\lambda_1 = 1.0$ (відсутні початкові напруження) і $\lambda_1 = 1.1$ (розтягуючі початкові напруження). При цьому суцільні лінії відповідають значенням $\beta = 1/4$, а штрихпунктирні – $\beta = 1/2$. Бачимо, що значення K_{III}/K_{III}^{∞} монотонно зменшуються при зростанні відношення модулів пружності шарів $E^{(1)}/E^{(2)}$ композита.

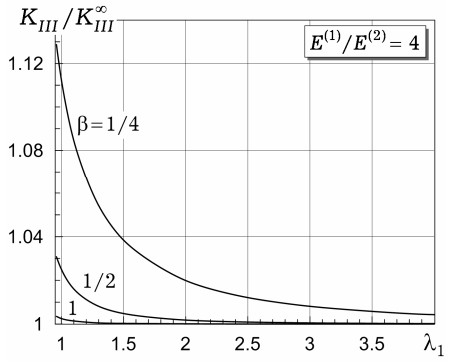

Рис. 2

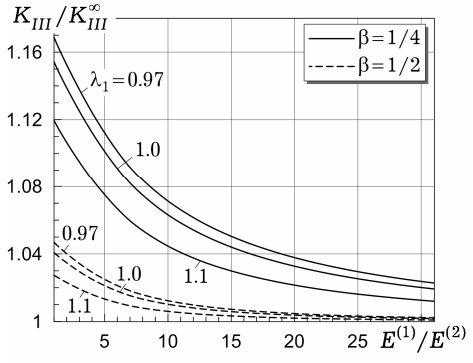

Рис. 3

Рис. 4 ілюструє залежність K_{III}/K_{III}^{∞} від безрозмірної відстані $\beta = h/a$ між тріщиною і границею матеріалу для значень $\lambda_1 = 0.97, 1.0, 1.1$ параметра початкового стиску (або розтягу) при відношенні модулів пружності шарів $E^{(1)}/E^{(2)} = 4$.

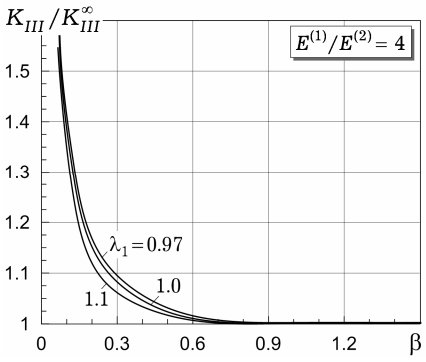

Рис. 4

З рисунка бачимо, що взаємовплив тріщини та вільної поверхні матеріалу в композиті з початковими напруженнями призводить до збільшення (особливо істотного при малих значеннях β) величин коефіцієнта інтенсивності напружень K_{III} порівняно з випадком ізольованої (невзаємодіючої) тріщини в нескінченному тілі. Так, для $\lambda_1 = 0.97$ при $\beta = 1/16$ значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{III} є в 1.7 разів більшим, ніж значення КІН K_{III}^{∞} для випадку ізольованої тріщини в просторі. З іншого боку, при зростанні відстані між тріщиною і поверхнею матеріалу їх взаємний вплив швидко послаблюється, а відповідні значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{III} для приповерхневої тріщини прямують до значень, які отримуємо для ізольованої тріщини в нескінченному тілі. З точністю, придатною для практичних застосувань, зазначеною взаємодією тріщин можна нехтувати при відстанях між ними, що становлять два і більше радіусів тріщини, оскільки відмінність між значеннями K_{III} та K_{III}^{∞} в цьому випадку для всіх розглянутих значень параметра λ_1 складає менше 5 %.

Висновки. На основі дослідженої в роботі задачі про напружений стан попередньо напруженого композитного матеріалу з приповерхневою круговою тріщиною кручення, паралельною до вільної поверхні матеріалу, можемо зробити такі висновки:

– для розглянутих шаруватих композитних матеріалів з ізотропними шарами початкові (залишкові технологічні) напруження, що діють уздовж площини розміщення тріщини, істотно впливають на значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{III} в околі контуру тріщини;

– взаємний вплив приповерхневої тріщини поздовжнього зсуву та поверхні півпростору з початковими напруженнями призводить до збільшення (особливо істотного для малих відстаней між тріщинами) значень коефіцієнта інтенсивності напружень K_{III} порівняно зі значенням КІН K_{III}^{∞}, отриманих у задачі про ізольовану тріщину поздовжнього зсуву в необмеженому попередньо напруженому матеріалі;

– при зростанні відстані між тріщиною і границею півпростору їх взаємовплив знижується, а значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{III} в околі контуру тріщини прямують до значень, отриманих у випадку ізольованої тріщини в необмеженому матеріалі. При цьому для практичних розрахунків зазначеним взаємним впливом можна нехтувати при значеннях відстані між тріщиною і границею матеріалу, що перевищують два радіуси тріщини;

– характеристики композитного матеріалу (зокрема, співвідношення між модулями пружності матеріалів шарів композита) досить істотно впливають на коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. *Богданов В. Л.* Вплив початкових напружень на напружений стан композита з періодичною системою паралельних співвісних тріщин нормального відриву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 3. – С. 99–110.
   Те саме: *Bogdanov V. L.* Influence of initial stresses on the stressed state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks // J. Math. Sci. – 2012. – **186**, No. 1. – P. 1–13.
2. *Богданов В. Л.* Неосесиметрична задача про напружено-деформований стан пружного півпростору з приповерхневою круговою тріщиною при дії спрямованих уздовж неї зусиль // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 4. – С. 173–190.
   Те саме: *Bogdanov V. L.* Nonaxisymmetric problem of the stress-strain state of an elastic half-space with a near-surface circular crack under the action of loads along it // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 3. – P. 341–366.

3. *Богданов В. Л.* Про взаємодію періодичної системи паралельних співвісних тріщин радіального зсуву в попередньо напруженому композиті // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 4. – С. 59–70.
   Те саме: *Bogdanov V. L.* On the interaction of a periodic system of parallel coaxial radial-shear cracks in a prestressed composite // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 5. – P. 606–619.
4. *Богданов В. Л.* Про кругову тріщину зсуву в напівнескінченному композиті з початковими напруженнями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43,** № 3. – С. 27–34.
   Те саме: *Bogdanov V. L.* On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // Mater. Sci. – 2007. – **43**, No. 3. – P. 321–330.
5. *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Напряженно-деформированное состояние материала с периодической системой соосных круговых трещин радиального сдвига при действии направленных вдоль них усилий // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 12. – С. 3–16.
   Те саме: *Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M.* Stress-strain state of a material under forces acting along a periodic set of coaxial mode II penny-shaped cracks // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46,** No. 12. – P. 1339–1350.
6. *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* О разрушении полубесконечного материала с приповерхностной дискообразной трещиной в условиях сжатия вдоль плоскости трещины // Прикл. механика. – 1992. – **28**, № 11. – С. 3–22.
   Те саме: *Bogdanov V. L., Guz' A. N., Nazarenko V. M.* Fracture of semiinfinite material with a circular surface crack in compression along the crack plane // Int. Appl. Mech. – 1992. – **28**, No. 11. – P. 687–704.
7. *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Осесимметричная задача о разрушении тела с периодической системой соосных трещин под действием направленных вдоль них усилий // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 2. – С. 3–18.
   Те саме: *Bogdanov V. L., Guz' A. N., Nazarenko V. M.* Fracture of a body with a periodic set of coaxial cracks under forces directed along them: an axisymmetric problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 2. – P. 111–124.
8. *Гузь А. Н.* К линеаризированной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085–1088.
9. *Гузь А. Н.* Механика движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями (обзор) // Прикл. механика. – 2011. – **47**, № 2. – С. 3–75.
   Те саме: *Guz A. N.* Mechanics of crack propagation in materials with initial (residual) stresses (review) // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47,** No. 2. – P. 121–168.
10. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
11. *Гузь А. Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **261**, № 1. – С. 42–45.
12. *Гузь А. Н.* Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5 кн. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 2.)
13. *Гузь А. Н., Назаренко В. М., Никонов В. А.* Кручение полупространства с начальными напряжениями, содержащего приповерхностную дискообразную трещину // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 10. – С. 24–30.
   Те саме: *Guz' A. N., Nazarenko V. M., Nikonov V. A.* Torsion of a pre-stressed halfspace with a disk-shaped crack at the surface // Int. Appl. Mech. – 1991. – **27,** No. 10. – P. 948–954.
14. *Каминский А. А., Богданова О. С.* Длительная трещиностойкость ортотропной вязкоупругой пластины с трещиной при двухосном нагружении. Безопасные нагрузки // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 9. – С. 66–72.
   Те саме: *Kaminskii A. A., Bogdanova O. S.* Long-term crack resistance of an orthotropic viscoelastic plate with a crack under biaxial loading. Safe loads // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, No. 9. – P. 747–753.
15. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
16. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 3.)
17. *Шульга Н. А., Томашевский В. Т.* Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: А. С. К., 1997. – 394 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 6.)

18. *Bogdanov V. L.* Effect of residual stresses on fracture of semi-infinite composites with cracks // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2008. – **15**, No. 6-7. – P. 453–460.
19. *Bogdanov V. L.* Influence of initial stresses on fracture of composite materials containing interacting cracks // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 3. – P. 371–384.
20. *Guz A. N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
21. *Guz A. N.* On some non-classical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40,** No. 8. – P. 937–941.
22. *Guz' A. N., Nazarenko V. M., Bogdanov V. L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2007. – **48**, No. 3. – P. 285–303.
23. *Kassir M. K., Sih G. C.* Mechanics of fracture. Three-dimensional crack problems. – Leyden: Netherlands Noordhoff Int. Publ., 1975. – Vol. 2. – 452 p.
24. *Nazarenko V. M., Bogdanov V. L., Altenbach H.* Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // Int. J. Fract. – 2000. – **104**, No. 3. – P. 275–289.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА РАЗРУШЕНИЕ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

На основании соотношений линеаризированной механики деформируемого твердого тела исследована пространственная задача о разрушении предварительно напряженного полуограниченного композита с приповерхностной дискообразной трещиной кручения (Mode III crack). С использованием представлений общих решений линеаризированных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции и интегральных преобразований Ханкеля задача сведена к системе парных интегральных уравнений, а затем – к разрешающему интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Из анализа распределения напряжений в окрестности трещины получены значения коэффициентов интенсивности напряжений и исследована их зависимость от начальных напряжений, механических характеристик компонент композита и геометрических параметров задачи.

EFFECT OF INITIAL STRESSES ON FRACTURE OF COMPOSITE MATERIAL WITH A NEAR-SURFACE MODE III CRACK

Based on the relations of linearized mechanics of deformable bodies the spatial problem on the fracture of prestressed semi-bounded composite with a near-surface Mode III crack is considered. Using representations of general solutions of linearized equilibrium equations in terms of the harmonic potential functions and the apparatus of Hankel integral transforms the problem is reduced to a system of dual integral equations, and then – to the resolving Fredholm integral equation of the second kind. From the analysis of the stress distribution in the vicinity of the crack the values of stress intensity factors are obtained and their dependence on the initial stresses, mechanical properties of composite components and geometric parameters of the problem are investigated.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
14.01.13