

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТАВНОГО ПЛОСКОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА

Предложен способ исследования методом малого параметра возможной потери устойчивости вращающегося составного плоского кольцевого кругового диска. Получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах диска.

Введение. «Состояние за пределом упругости» в перегруженных центробежными растягивающими усилиями быстровращающихся плоских дисках является источником плоской упругопластической задачи [21, 28, 29]. Ее решение заключается в определении границы упругой и пластической областей [14], а также напряженного состояния в упругой области по заданным усилиям на контуре диска. В работах [7, 9] с помощью приближенного метода малого параметра, изложенного позже в книге [10] и имеющего определенную аналогию со вторым вариантом метода возмущения формы границы в механике сплошных сред [5], определены критические значения радиуса пластической зоны и скорости вращения, сопровождающие переход сплошного кругового диска, свободного от контурных усилий, в одно из неустойчивых состояний [4]. При этом рассмотрены потеря устойчивости и исчерпание несущей способности [6, 17, 22–24, 27, 30] сплошных дисков из идеально пластических материалов [15], компоненты напряжений которых удовлетворяют уравнениям равновесия плоской задачи [3], условию совместности [2] в упругой области и условию пластичности Сен-Венана [8] – в пластической области.

Эти исследования были продолжены в ряде работ [11–13, 18, 19] о неустойчивости плоских однородных и неоднородных сплошных и кольцевых круговых дисков, ступенчатых дисков и дисков произвольного профиля, в том числе находящихся под действием радиального контурного давления, зависящего от скорости вращения. Показана эффективность аналитического метода возмущения формы границы при определении параметров сверхскоростной эксплуатации некоторых дисковых систем, что особенно актуально в вопросе об устойчивости и прочности турбинных и прочих массивных дисков [16, 20, 25, 26, 31–33].

В рассматриваемой работе изложен способ получения методом малого параметра характерных критических значений [1], соответствующих потере устойчивости простейшего радиально неоднородного плоского кольцевого кругового диска, нагруженного в своей плоскости заданными радиальными контурными усилиями. Материал диска – идеально пластический с условием пластичности $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$.

1. Постановка задачи. Исследуемый диск \mathcal{D} состоит из двух однородных и изотропных плоских дисков \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 . Внутренний радиус кольцевого кругового диска \mathcal{D}_1 равен a , внешний, совпадающий с внутренним радиусом кольцевого кругового диска \mathcal{D}_2 , равен c . Внешний радиус диска \mathcal{D}_2 равен b . Вдоль окружности $r = c$ диски \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 , выполненные из различных материалов, жестко соединены в единый диск \mathcal{D} . Предел текучести материала диска \mathcal{D}_1 обозначим через σ_{s1} , модуль упругости – E_1 , плотность – γ_1 , коэффициент Пуассона – ν_1 . Одноименные параметры матери-

ала диска \mathcal{D}_2 обозначим соответственно через σ_{s2} , E_2 , γ_2 и ν_2 . Обозначения σ_s , E и ν , употребляемые безотносительно к номеру дисковой секции, будем использовать без указания каких-либо индексов. Постоянная угловая скорость вращения диска \mathcal{D} равна ω .

Рассматриваем самоуравновешенную и мало отличающуюся от круговой форму потери устойчивости диска \mathcal{D} , когда уравнение внешней его границы с точностью до бесконечно малых первого порядка представимо в виде

$$r = b + d \cos n\theta, \quad d = \text{const}, \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \quad (1)$$

где $\rho = r/b$ – безразмерный текущий радиус, δ – малый параметр, θ – полярный угол. Текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска обозначим r_{01} или/и r_{02} (рис. 1–5). Требуется получить в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$ и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения $\omega = \omega_*$. Напомним, что для этого нужно установить условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr} u' &= 0, & \sigma'_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0}{b} \frac{du'}{d\theta} &= 0, & r &= b, \\ \sigma'_{rr} &= 0, & \sigma'_{r\theta} &= 0, & r &= r_0, \end{aligned}$$

относительно произвольных постоянных, входящих в выражения для компонент напряжений и перемещений σ'_{rr} , $\sigma'_{r\theta}$ и u' , определяющих возмущенное напряженно-деформированное состояние вращающегося диска \mathcal{D} . Указанные линеаризованные возмущения первого порядка малости удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями в частных производных, тогда как невозмущенное напряженное состояние (с верхним индексом «0») определено обыкновенными дифференциальными уравнениями квазистатического равновесия и уравнениями связи в упругой зоне или условием текучести Сен-Венана – в пластической зоне.

2. Решение в случае $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(e)}$. Невозмущенное напряженное состояние пластической области $\mathcal{D}_{1(p)}$ (рис. 1) определяется начальной задачей

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= -\frac{\sigma_1}{b^2} r, \\ \sigma_1 &= \gamma_1 b^2 \omega^2 = \text{const}, \quad \sigma_{rr}(a) = -p_i \end{aligned} \quad (2)$$

при $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{s1}$. Поэтому отнесенные к пределу текучести σ_{s2} касательное и радиальное напряжения имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}} = s, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = s - \frac{\sigma_1}{3\sigma_{s2}} \rho^2 + \frac{\beta}{\rho} \left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} + \frac{\sigma_1}{3\sigma_{s2}} \beta^2 \right), \quad (4)$$

если использовать безразмерный полярный радиус (здесь $\beta = a/b$).

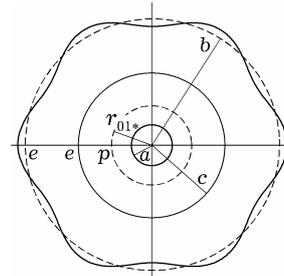


Рис. 1

В упругой области $\mathcal{D}_{1(e)}$ соответствующие зависимости запишем как

$$\sigma_{\theta\theta} = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{\sigma_1(3\nu_1 + 1)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (5)$$

$$\sigma_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{\sigma_1(\nu_1 + 3)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (6)$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные.

Невозмущенное напряженное состояние упругой области $\mathcal{D}_{2(e)}$ определяется начальной задачей

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma_2}{b^2} r, \quad \sigma_2 = \gamma_2 b^2 \omega^2 = \text{const}, \quad \sigma_{rr}(b) = p_e, \quad (7)$$

поэтому в этой области имеем

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p_e}{\sigma_{s2}} + C_3 \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\sigma_2(\nu_2 + 3)}{8\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_2(3\nu_2 + 1)}{8\sigma_{s2}} \rho^2, \quad (8)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{p_e}{\sigma_{s2}} + C_3 \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\sigma_2(\nu_2 + 3)}{8\sigma_{s2}} (1 - \rho^2), \quad (9)$$

где C_3 – неизвестная постоянная.

Для определения C_1 , C_2 , C_3 и ω в зависимости от радиуса пластической зоны $\beta_0 = r_{01}/b$ необходимо учесть непрерывность радиального напряжения σ_{rr} и радиального смещения $u = \sigma_s \rho (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr})/E$ (отнесенного к b) при $\rho = \beta_0$ и $\rho = c/b = \bar{\beta}$. Соответствующие правила сопряжения для напряжений имеют вид

$$\sigma_{rr}(\beta_0 + 0) = \sigma_{rr}(\beta_0 - 0), \quad \sigma_{\theta\theta}(\beta_0 + 0) = \sigma_{\theta\theta}(\beta_0 - 0), \quad (10)$$

$$\sigma_{rr}(\bar{\beta} + 0) = \sigma_{rr}(\bar{\beta} - 0), \quad \sigma_{\theta\theta}(\bar{\beta} + 0) = \varepsilon \sigma_{\theta\theta}(\bar{\beta} - 0) + k \sigma_{rr}(\bar{\beta} - 0), \quad (11)$$

где $\varepsilon = E_2/E_1$, $k = \nu_2 - \varepsilon \nu_1$. Применяя соотношения (10), (11) к решениям (3)–(6), (8) и (9), получим систему четырех линейных уравнений относительно C_1 , C_2 , C_3 и $x = \sigma_2/(24\sigma_{s2})$:

$$\begin{aligned} C_1 + \beta_0^{-2} C_2 - 3\Gamma(3\nu_1 + 1)\beta_0^2 x &= s, \\ C_1 - \beta_0^{-2} C_2 - \Gamma[(3\nu_1 + 1)\beta_0^2 + 8\beta^3 \beta_0^{-1}] x &= s + \beta \beta_0^{-1} \left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}}\right), \\ (\varepsilon + k)C_1 + \bar{\beta}^{-2}(\varepsilon - k)C_2 - (1 + \bar{\beta}^{-2})C_3 + \ell x &= \frac{p_e}{\sigma_{s2}}, \\ C_1 - \bar{\beta}^{-2} C_2 - (1 - \bar{\beta}^{-2})C_3 + m x &= \frac{p_e}{\sigma_{s2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad m = -3\{\nu_2 + 3 + \bar{\beta}^2[\Gamma(\nu_1 + 3) - (\nu_2 + 3)]\}, \\ \ell &= -3\{\nu_2 + 3 + \bar{\beta}^2\{\Gamma[\varepsilon(3\nu_1 + 1) + k(\nu_1 + 3)] - (3\nu_2 + 1)\}\}. \end{aligned}$$

Решая систему (12), находим

$$C_1 = s + 0.5\beta \beta_0^{-1} \left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}}\right) + 2\Gamma[(3\nu_1 + 1)\beta_0^2 + 2\beta^3 \beta_0^{-1}] x, \quad (13)$$

$$C_2 = -0.5\beta \beta_0 \left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}}\right) + \Gamma \beta_0^2 [(3\nu_1 + 1)\beta_0^2 - 4\beta^3 \beta_0^{-1}] x, \quad (14)$$

$$C_3 = G \left\{ (1 - m\ell^{-1}) \frac{p_e}{\sigma_{s2}} - (1 - m\ell^{-1}(\varepsilon + k))C_1 + \bar{\beta}^{-2}(1 + m\ell^{-1}(\varepsilon - k))C_2 \right\}, \quad (15)$$

$$x = \frac{1}{24} \frac{\omega^2}{q_2^2} = \frac{-Hs + K \frac{p_e}{\sigma_{s2}} - 0.5\beta\beta_0^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_0^2) \left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} \right)}{\ell + \Gamma(3\nu_1 + 1)(2H + J\bar{\beta}^{-2}\beta_0^2)\beta_0^2 + 4\Gamma\beta^3\beta_0^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_0^2)}, \quad (16)$$

где

$$G = \frac{1}{m\ell^{-1}(1 + \bar{\beta}^{-2}) - (1 - \bar{\beta}^{-2})}, \quad q_2 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1}{\gamma_2} \sigma_{s2}},$$

$$H = \varepsilon + k + G(1 + \bar{\beta}^{-2})(1 - m\ell^{-1}(\varepsilon + k)), \quad K = 1 + G(1 + \bar{\beta}^{-2})(1 - m\ell^{-1}),$$

$$J = \varepsilon - k - G(1 + \bar{\beta}^{-2})(1 + m\ell^{-1}(\varepsilon - k)).$$

Таким образом, с учетом соотношений (13)–(16) зависимости (3)–(6), (8) и (9) задают компоненты σ_{rr}^0 и $\sigma_{\theta\theta}^0$ нулевого приближения к решению

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0 + \delta\sigma'_{rr} + \delta^2 \dots, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^0 + \delta\sigma'_{\theta\theta} + \delta^2 \dots,$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^0 + \delta\sigma'_{r\theta} + \delta^2 \dots,$$

$$u = u^0 + \delta u' + \delta^2 \dots, \quad v = v^0 + \delta v' + \delta^2 \dots$$

задачи о пластическом равновесии, определяющему положение упруго-пластической границы.

Замечание 1. При $\varepsilon = s = \Gamma = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и $p_e = 0$ из (16) получаем известную зависимость [13]

$$\frac{\omega^2}{q^2} = \frac{24 + 12\beta\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2) \left(-1 - \frac{p_i}{\sigma_s} \right)}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2)}$$

между угловой скоростью вращения и радиусом пластической зоны плоско-го однородного кольцевого кругового диска, испытывающего заданное внутреннее радиальное давление p_i .

Чтобы использовать граничные условия и условия сопряжения

$$\sigma'_{rr} + A_1 u'^e = 0, \quad \rho = 1, \quad (17)$$

$$\sigma'_{r\theta} - A_2 \frac{du'^e}{d\theta} = 0, \quad \rho = 1, \quad (18)$$

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \rho = \beta_0, \quad (19)$$

$$\sigma'_{r\theta} = 0, \quad \rho = \beta_0, \quad (20)$$

напомним вид возмущений первого порядка малости σ'_{rr} , $\sigma'_{r\theta}$ и u'^e . Для отнесенных к пределу текучести σ_{s2} радиального и тангенциального напряжений и отнесенного к b радиального смещения в области $\mathcal{D}_{2(e)}$ имеем [12]

$$\sigma'_{rr} = [a_I(\bar{\beta}, \rho)a_2 + a_{II}(\bar{\beta}, \rho)a_1 + a_{III}(\bar{\beta}, \rho)b_2 + a_{IV}(\bar{\beta}, \rho)b_1] \cos n\theta,$$

$$\sigma'_{r\theta} = [c_I(\bar{\beta}, \rho)a_2 + c_{II}(\bar{\beta}, \rho)a_1 + c_{III}(\bar{\beta}, \rho)b_2 + c_{IV}(\bar{\beta}, \rho)b_1] \sin n\theta,$$

$$u'^e = \frac{\sigma_{s2}}{E_2} [d_I^{**}(\bar{\beta}, \rho)a_2 + d_{II}^{**}(\bar{\beta}, \rho)a_1 + d_{III}^{**}(\bar{\beta}, \rho)b_2 + d_{IV}^{**}(\bar{\beta}, \rho)b_1] \cos n\theta,$$

а в области $\mathcal{D}_{1(e)}$ –

$$\begin{aligned}\sigma'_{rr} &= \left[a_I \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_1 + a_{II} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_0 + a_{III} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_1 + \right. \\ &\quad \left. + a_{IV} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_0 \right] \cos n\theta, \\ \sigma'_{r\theta} &= \left[c_I \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_1 + c_{II} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) a_0 + c_{III} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_1 + \right. \\ &\quad \left. + c_{IV} \left(\frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\rho}{\beta} \right) b_0 \right] \sin n\theta,\end{aligned}$$

где

$$a_0 = q'_1 a_2 + q'_2 a_1 + q'_3 b_2 + q'_4 b_1, \quad b_0 = q'_5 a_2 + q'_6 a_1 + q'_7 b_2 + q'_8 b_1.$$

Здесь a_2 , a_1 , b_2 и b_1 – неопределенные коэффициенты, а q'_1, \dots, q'_8 – коэффициенты, выражающиеся через n , β_0 , $\bar{\beta}$, v_1 , v_2 и ε ; $a_I(\cdot), \dots, a_{IV}(\cdot)$, $c_I(\cdot), \dots, c_{IV}(\cdot)$, $d_I^{**}(\cdot), \dots, d_{IV}^{**}(\cdot)$ – известные функции [2]. Кроме этого,

$$A_1 = 2C_3 - 6(v_2 + 3)x, \quad A_2 = A_1 + 24x, \quad (21)$$

где в используемых здесь выражениях (15), (16) усилия p_i/σ_{s2} и p_e/σ_{s2} должны быть связаны с β_0 . Предположим, что

$$p_i = \varepsilon_i \sigma_{s2} + x_i \gamma_2 b^2 \omega^2, \quad p_e = \varepsilon_e \sigma_{s2} + x_e \gamma_2 b^2 \omega^2, \quad (22)$$

где с учетом (2) и (7) коэффициент $\varepsilon_i > 0$ соответствует, к примеру, насадке с натягом исследуемого диска \mathcal{D} на вал; $x_i > 0$ определяет сжимающее действие вращающегося вала на вращающийся диск; $\varepsilon_e > 0$ может означать появившееся обжатие исследуемого диска при монтаже лопаток по внешнему его контуру, а $x_e < 0$ – растягивающее действие лопаток при вращении диска. Тогда из (16) и (22) получаем при $x_i \neq 0$

$$\frac{p_e}{\sigma_{s2}} = \varepsilon_e - \mu(s + \varepsilon_i + \xi(\beta_0)), \quad (23)$$

$$-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} = \xi(\beta_0) = -\frac{(s + \varepsilon_i)\tau + 24x_i(-Hs + K[\varepsilon_e - \mu(s + \varepsilon_i)])}{\tau - 24x_i(K\mu + 0.5\beta\beta_0^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_0^2))}, \quad (24)$$

а при $x_e \neq 0$ –

$$-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} = -s - \varepsilon_i - \mu^{-1}(\eta(\beta_0) - \varepsilon_e), \quad (25)$$

$$\frac{p_e}{\sigma_{s2}} = \eta(\beta_0) = \frac{\varepsilon_e \tau + 24x_e(-Hs - 0.5\beta\beta_0^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_0^2))[-s - \varepsilon_i + \mu^{-1}\varepsilon_e]}{\tau - 24x_e(K + 0.5\beta\mu^{-1}\beta_0^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_0^2))}. \quad (26)$$

Здесь

$$\mu = \frac{x_e}{x_i}, \quad \tau = \ell + \Gamma(3v_1 + 1)(2H + J\bar{\beta}^{-2}\beta_0^2)\beta_0^2 + 4\Gamma\beta^3\beta_0^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_0^2).$$

Перепишав теперь с учетом соотношений (21)–(26) условия (17)–(20) в развернутом виде, получим систему линейных однородных уравнений относительно a_2 , a_1 , b_2 и b_1 . Искомое характеристическое уравнение имеет вид

$$\tilde{\Delta}(\beta_0) = 0, \quad (27)$$

где $\tilde{\Delta}(\beta_0)$ – определитель матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^4$ этой системы, в которой

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 + A_1 d_I^{**}(\bar{\beta}, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{12} &= A_1 d_{II}^{**}(\bar{\beta}, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\
a_{13} &= A_1 d_{III}^{**}(\bar{\beta}, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{14} &= A_1 d_{IV}^{**}(\bar{\beta}, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\
a_{21} &= n A_2 d_I^{**}(\bar{\beta}, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{22} &= n A_2 d_{II}^{**}(\bar{\beta}, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\
a_{23} &= 1 + n A_2 d_{III}^{**}(\bar{\beta}, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, & a_{24} &= n A_2 d_{IV}^{**}(\bar{\beta}, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \\
a_{31} &= q'_1, & a_{32} &= q'_2, & a_{33} &= q'_3, & a_{34} &= q'_4, \\
a_{41} &= q'_5, & a_{42} &= q'_6, & a_{43} &= q'_7, & a_{44} &= q'_8.
\end{aligned}$$

Критическое значение квадрата угловой скорости, соответствующее критическому значению радиуса пластической области β_{0*} , $\beta_{0*} \in [\beta, \bar{\beta}]$, получаем по формуле (16)

$$\omega_*^2 = \frac{24q_2^2[-Hs + K[\varepsilon_e - \mu(s + \varepsilon_i + \xi(\beta_{0*}))] - 0.5\beta\beta_{0*}^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)\xi(\beta_{0*})]}{\ell + \Gamma(3\nu_1 + 1)(2H + J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)\beta_{0*}^2 + 4\Gamma\beta^3\beta_{0*}^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)}$$

при $x_i \neq 0$;

$$\begin{aligned}
\omega_*^2 &= \\
&= \frac{24q_2^2(-Hs + K\eta(\beta_{0*}) - 0.5\beta\beta_{0*}^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)[-s - \varepsilon_i - \mu^{-1}(\eta(\beta_{0*}) - \varepsilon_e)])}{\ell + \Gamma(3\nu_1 + 1)(2H + J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)\beta_{0*}^2 + 4\Gamma\beta^3\beta_{0*}^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)}
\end{aligned}$$

при $x_e \neq 0$;

$$\omega_*^2 = \frac{24q_2^2[-Hs + K\varepsilon_e - 0.5\beta\beta_{0*}^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)(-s - \varepsilon_i)]}{\ell + \Gamma(3\nu_1 + 1)(2H + J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)\beta_{0*}^2 + 4\Gamma\beta^3\beta_{0*}^{-1}(H - J\bar{\beta}^{-2}\beta_{0*}^2)}$$

при $x_i = x_e = 0$.

3. Решение в случае $\mathcal{D}_{1(p)}\mathcal{D}_{2(e)}$. Механизм потери устойчивости диска

\mathcal{D} , пластическое состояние которого распространено на всю кольцевую область \mathcal{D}_1 при упругой кольцевой области \mathcal{D}_2

(рис. 2), в работах [11, 12] назван особым (01°). Ввиду различной пластичности материалов секций \mathcal{D}_1

и \mathcal{D}_2 и имеющегося разрыва касательного напряжения в некотором диапазоне угловой скорости остаются независимыми величинами $\beta_0 = \bar{\beta}$ и ω , и

дальнейшее увеличение скорости вращения не обязательно влечет за собой появление пластического состояния вдоль окружности $\rho = \bar{\beta}$ в \mathcal{D}_2 . Вместе с

этим изменяются значения коэффициентов характеристического уравнения, пока оно при определенном (искомом) значении $\omega = \omega_*$ не превратится в тождество $\tilde{\Delta}(\bar{\beta}) \equiv 0$.

Получить упомянутые коэффициенты можно после сопряжения решений (4) и (9) на окружности $\rho = \bar{\beta}$. Имеем

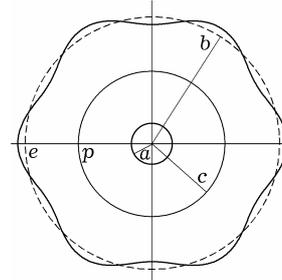


Рис. 2

$$(1 - \bar{\beta}^{-2})C_3 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} + 3(v_2 + 3)(1 - \bar{\beta}^2)x = s - 8\Gamma\bar{\beta}^2x + \\ + \beta\bar{\beta}^{-1}\left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} + 8\Gamma\beta^2x\right),$$

откуда

$$C_3 = \{s - \varepsilon_e + \beta\bar{\beta}^{-1}(-s - \varepsilon_i) - [24x_e + 3(v_2 + 3) + (8\Gamma - 3(v_2 + 3))\bar{\beta}^2 + \\ + 8\beta\bar{\beta}^{-1}(3x_i - \beta^2\Gamma)]x\}\{1 - \bar{\beta}^{-2}\}^{-1}. \quad (28)$$

Поскольку в исследуемом случае упругая область однородна, то в характеристическом уравнении (27)

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 1, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = 0, \\ a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = 1,$$

а A_1 и A_2 , определенные посредством соотношений (21) и (28), зависят от переменной x . Решив уравнение (27) на отрезке $[\underline{x}, \bar{x}]$, где \underline{x} определяется по формуле (16) при $\beta_0 = \bar{\beta}$:

$$\underline{x} = \frac{-Hs + K\varepsilon_e + 0.5\beta\bar{\beta}^{-1}(H - J)(s + \varepsilon_i)}{-24Kx_e + \ell + \Gamma(3v_1 + 1)(2H + J)\bar{\beta}^2 - 4\beta\bar{\beta}^{-1}(H - J)(3x_i - \beta^2\Gamma)},$$

а \bar{x} - из условия $\sigma_{\theta\theta}(\bar{\beta} + 0) = 1$ (см. (8)):

$$\bar{x} = \{[1 - \varepsilon_e](1 - \bar{\beta}^{-2}) - [s - \varepsilon_e + \beta\bar{\beta}^{-1}(-s - \varepsilon_i)](1 + \bar{\beta}^{-2})\}\{[24x_e + \\ + 3(v_2 + 3) - 3(3v_2 + 1)\bar{\beta}^2](1 - \bar{\beta}^{-2}) - [24x_e + 3(v_2 + 3) + \\ + (8\Gamma - 3(v_2 + 3))\bar{\beta}^2 + 8\beta\bar{\beta}^{-1}(3x_i - \beta^2\Gamma)](1 + \bar{\beta}^{-2})\}^{-1},$$

получим искомое критическое значение ω_* .

4. Решение в случае $\mathcal{D}_{1(p)}\mathcal{D}_{2(pe)}$. Предположим, что еще до потери устойчивости диска \mathcal{D} пластическое состояние успело распространиться на определенную кольцевую область $\mathcal{D}_{2(p)}$ в \mathcal{D}_2 , «заметя» предварительно все кольцо \mathcal{D}_1 (рис. 3). Невозмущенное напряженное состояние исследуемого диска \mathcal{D} определяется зависимостями (3), (4) в области $\mathcal{D}_{1(p)}$; в области $\mathcal{D}_{2(p)}$ имеем

$$\sigma_{\theta\theta} = 1, \quad (29)$$

$$\sigma_{rr} = 1 - \frac{\sigma_2}{3\sigma_{s2}}\rho^2 + \frac{C_2}{\rho}, \quad (30)$$

а в области $\mathcal{D}_{2(e)}$ напряжения определяются соотношениями (8), (9). Сопряжение решений (4) и (30) на окружности $\rho = \bar{\beta}$, а также (29), (8) и (30), (9) - на окружности $\rho = \beta_0 = r_{02}/b$ приводит к системе уравнений относительно C_2 , C_3 и x :

$$\bar{\beta}^{-1}C_2 + 8[(\Gamma - 1)\bar{\beta}^2 - \Gamma\beta^3\bar{\beta}^{-1}]x = s - 1 + \beta\bar{\beta}^{-1}\left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}}\right),$$

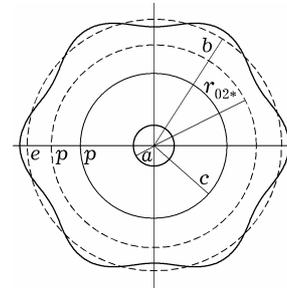


Рис. 3

$$(1 + \beta_0^{-2})C_3 + 3[v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta_0^2]x = 1 - \frac{p_e}{\sigma_{s2}},$$

$$-\beta_0^{-1}C_2 + (1 - \beta_0^{-2})C_3 + [3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)\beta_0^2]x = 1 - \frac{p_e}{\sigma_{s2}}.$$

Ее решение имеет вид

$$C_2 = \bar{\beta}(s-1) + \beta \left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} \right) - 8[(\Gamma-1)\bar{\beta}^3 - \Gamma\beta^3]x,$$

$$C_3 = \frac{1 - \frac{p_e}{\sigma_{s2}} - 3[v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta_0^2]x}{1 + \beta_0^{-2}},$$

$$x = \frac{2 \left(1 - \frac{p_e}{\sigma_{s2}} \right) + \beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2) \left(\bar{\beta}(s-1) + \beta \left[-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} \right] \right)}{\tau}, \quad (31)$$

где (с учетом (22), (23) и (25))

$$\xi(\beta_0) = -\frac{(s + \varepsilon_i)\tau + 24x_i[2(1 - [\varepsilon_e - \mu(s + \varepsilon_i)]) + \bar{\beta}\beta_0^{-1}(s-1)(1 + \beta_0^2)]}{\tau + 24x_i(2\mu + \beta\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2))},$$

$$\eta(\beta_0) = \frac{\varepsilon_e\tau + 24x_e[2 + \beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2)(\bar{\beta}(s-1) + \beta[-s - \varepsilon_i + \mu^{-1}\varepsilon_e])]}{\tau + 24x_e(2 + \beta\mu^{-1}\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2))},$$

$$\tau = (1 + \beta_0^2)[3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)\beta_0^2 + 8\beta_0^{-1}((\Gamma-1)\bar{\beta}^3 - \Gamma\beta^3)] +$$

$$+ 3(1 - \beta_0^2)[v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta_0^2].$$

Таким образом, полагая в характеристическом уравнении (27)

$$a_{11} = 1 + A_1 d_I^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = A_1 d_{II}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2},$$

$$a_{13} = A_1 d_{III}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \quad a_{14} = A_1 d_{IV}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2},$$

$$a_{21} = n A_2 d_I^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \quad a_{22} = n A_2 d_{II}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2},$$

$$a_{23} = 1 + n A_2 d_{III}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2}, \quad a_{24} = n A_2 d_{IV}^{**}(\beta_0, 1) \sigma_{s2} \frac{1}{E_2},$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 1, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = 0,$$

$$a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = 1$$

или

$$a_{11} = n + A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{(v_2 + 1)n}{n-1}, \quad a_{12} = n - A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{(v_2 + 1)n}{n+1},$$

$$a_{13} = n - 2 + A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{n-2 + v_2(n+2)}{n+1},$$

$$a_{14} = n + 2 - A_1 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{n+2 + v_2(n-2)}{n-1},$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{(v_2 + 1)n}{n - 1}, & a_{22} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{(v_2 + 1)n}{n + 1}, \\
a_{23} &= -1 + A_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{n - 2 + v_2(n + 2)}{n + 1}, & a_{24} &= 1 - A_2 \frac{\sigma_{s2}}{E_2} \frac{n + 2 + v_2(n - 2)}{n - 1}, \\
a_{31} &= n\beta_0^{n-2}, & a_{32} &= n\beta_0^{-n-2}, & a_{33} &= (n - 2)\beta_0^n, & a_{34} &= (n + 2)\beta_0^{-n}, \\
a_{41} &= -\beta_0^{n-2}, & a_{42} &= \beta_0^{-n-2}, & a_{43} &= -\beta_0^n, & a_{44} &= \beta_0^{-n},
\end{aligned}$$

остаётся учесть соотношения (21) и (31).

5. Решение в случае $\mathcal{D}_{1(e)}\mathcal{D}_{2(pe)}$. Пластическая зона $\mathcal{D}_{2(p)}$ имеет вид кольцевой области $\bar{\beta} \leq \rho \leq \beta_0$ в \mathcal{D}_2 . Состояние \mathcal{D}_1 упругое (рис. 4). Сопряжению при $\rho = \bar{\beta}$ подлежат функции

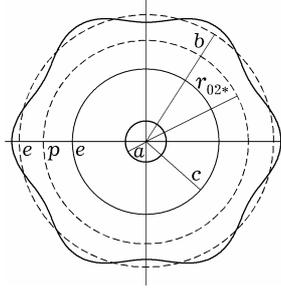


Рис. 4

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{p_i}{\sigma_{s2}} + C_1(\beta^{-2} + \rho^{-2}) + \frac{\sigma_1}{8\sigma_{s2}}((v_1 + 3)\beta^2 - (3v_1 + 1)\rho^2), \quad (32)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{p_i}{\sigma_{s2}} + C_1(\beta^{-2} - \rho^{-2}) + \frac{\sigma_1(v_1 + 3)}{8\sigma_{s2}}(\beta^2 - \rho^2) \quad (33)$$

и (29), (30), а при $\rho = \beta_0$ – (29), (30) и (8), (9). Из соответствующей системы уравнений находим

$$C_1 = \frac{1 + (\varepsilon + k) \frac{p_i}{\sigma_{s2}} - 3\Gamma[(\varepsilon + k)(v_1 + 3)\beta^2 - \{\varepsilon(3v_1 + 1) + k(v_1 + 3)\}\bar{\beta}^2]x}{(\varepsilon + k)\beta^{-2} + (\varepsilon - k)\bar{\beta}^{-2}},$$

$$C_2 = \frac{2\beta_0 \left\{ -1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} + [3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2]x \right\}}{1 + \beta_0^2},$$

$$C_3 = -\frac{-1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} + 3[v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta_0^2]x}{1 + \beta_0^{-2}},$$

$$\begin{aligned}
x &= \left\{ (1 + \beta_0^2) \left[(\varepsilon + k - 1)\beta^{-2} + (\varepsilon - k + 1)\bar{\beta}^{-2} + 2\varepsilon\bar{\beta}^{-2} \frac{p_i}{\sigma_{s2}} \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2\bar{\beta}^{-1}\beta_0 [(\varepsilon + k)\beta^{-2} + (\varepsilon - k)\bar{\beta}^{-2}] \left(-1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} \right) \right\} \tau^{-1}. \quad (34)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tau = 2\{ & (1 + \beta_0^2)[3\Gamma\varepsilon(-2(v_1 + 1) + (v_1 + 3)\beta^2\bar{\beta}^{-2} + (v_1 - 1)\beta^{-2}\bar{\beta}^2) + 4(\varepsilon - k) + \\ & + 4(\varepsilon + k)\beta^{-2}\bar{\beta}^2] - \bar{\beta}^{-1}\beta_0[(\varepsilon + k)\beta^{-2} + (\varepsilon - k)\bar{\beta}^{-2}] \times \\ & \times [3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2]\} \end{aligned}$$

и при $x_i \neq 0$ следует принять

$$-1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} = -1 + \varepsilon_e - \mu(\varepsilon_i - \xi(\beta_0)), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_i}{\sigma_{s2}} = \xi(\beta_0) = \{ & \varepsilon_i\tau + 24x_i[(1 + \beta_0^2)(\varepsilon + k - 1)\beta^{-2} + (\varepsilon - k + 1)\bar{\beta}^{-2}] + \\ & + 2\bar{\beta}^{-1}\beta_0[(\varepsilon + k)\beta^{-2} + (\varepsilon - k)\bar{\beta}^{-2}](-1 + \varepsilon_e - \mu\varepsilon_i)\} \{ \tau - 48x_i \times \\ & \times (\varepsilon\bar{\beta}^{-2}(1 + \beta_0^2) + \bar{\beta}^{-1}\mu\beta_0[(\varepsilon + k)\beta^{-2} + (\varepsilon - k)\bar{\beta}^{-2}]) \}^{-1}, \quad (36) \end{aligned}$$

а при $x_e \neq 0$ -

$$\frac{p_i}{\sigma_{s2}} = \varepsilon_i + \mu^{-1}(1 - \varepsilon_e + \eta(\beta_0)), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} -1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} = \eta(\beta_0) = \{ & (-1 + \varepsilon_e)\tau + 24x_e(1 + \beta_0^2)[(\varepsilon + k - 1)\beta^{-2} + \\ & + (\varepsilon - k + 1)\bar{\beta}^{-2} + 2\varepsilon\bar{\beta}^{-2}(\varepsilon_i + \mu^{-1}(1 - \varepsilon_e))\} \{ \tau - 48x_e \times \\ & \times (\varepsilon\bar{\beta}^{-2}\mu^{-1}(1 + \beta_0^2) + \bar{\beta}^{-1}\beta_0[(\varepsilon + k)\beta^{-2} + (\varepsilon - k)\bar{\beta}^{-2}]) \}^{-1}. \quad (38) \end{aligned}$$

С учетом соотношений (21), (34)–(38) характеристическое уравнение в исследуемом случае имеет прежний вид (см. п. 4).

6. Решение в случае $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(pe)}$. Кольцевые подобласти $\mathcal{D}_{1(p)}$ и $\mathcal{D}_{2(p)}$ частичных дисков \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 исследуемого составного кольцевого диска \mathcal{D} одновременно пребывают в пластическом состоянии (рис. 5). Невозмущенное напряженное состояние \mathcal{D} описывается четырьмя парами зависимостей: (3), (4) - в $\mathcal{D}_{1(p)}$; (5), (6) - в $\mathcal{D}_{1(e)}$; (29), (30) (с $C_2 := C_2^*$) - в $\mathcal{D}_{2(p)}$; (8), (9) - в $\mathcal{D}_{2(e)}$. Сопряжение компонент напряжения (3) и (5), (4) и (6) на окружности $\rho = \beta_{01} = r_{01}/b$, (5) и (29), (6) и (30) - на окружности $\rho = \bar{\beta}$, а также (29) и (8), (30) и (9) - на окружности $\rho = \beta_0 = r_{02}/b$ приводит к системе уравнений

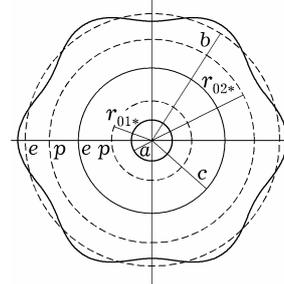


Рис. 5

$$\begin{aligned} C_1 + \beta_{01}^{-2}C_2 - 3\Gamma(3v_1 + 1)\beta_{01}^2x &= s, \\ C_1 - \beta_{01}^{-2}C_2 - \Gamma[(3v_1 + 1)\beta_{01}^2 + 8\beta^3\beta_{01}^{-1}]x &= s + \beta\beta_{01}^{-1}\left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}}\right), \\ (\varepsilon + k)C_1 + \bar{\beta}^{-2}(\varepsilon - k)C_2 - 3\bar{\beta}^2\Gamma(\varepsilon(3v_1 + 1) + k(v_1 + 3))x &= 1, \\ C_1 - \bar{\beta}^{-2}C_2 - \bar{\beta}^{-1}C_2^* - \bar{\beta}^2(3\Gamma(v_1 + 3) - 8)x &= 1, \\ (1 + \beta_0^{-2})C_3 + 3(v_2 + 3 - (3v_2 + 1)\beta_0^2)x &= 1 - \frac{p_e}{\sigma_{s2}}, \\ -\beta_0^{-1}C_2^* + (1 - \beta_0^{-2})C_3 + (3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)\beta_0^2)x &= 1 - \frac{p_e}{\sigma_{s2}}, \end{aligned}$$

из которой получаем

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{ 0.5(1 + \varepsilon - k)(1 + \beta_0^2) + \bar{\beta}^{-1}\beta_0(\varepsilon - k) \left(-1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} \right) + [2\bar{\beta}^2(1 + \beta_0^2) \times \right. \\
&\quad \times (3\Gamma\varepsilon(v_1 + 1) - 2(\varepsilon - k)) + \bar{\beta}^{-1}\beta_0(\varepsilon - k)(3(v_2 + 3) - \\
&\quad \left. - (3v_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2)]x \right\} \{ \varepsilon(1 + \beta_0^2) \}^{-1}, \\
C_2 &= \left\{ 0.5(1 - (\varepsilon + k))(1 + \beta_0^2) - \bar{\beta}^{-1}\beta_0(\varepsilon + k) \left(-1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} \right) + [\bar{\beta}^2(1 + \beta_0^2) \times \right. \\
&\quad \times (3\Gamma\varepsilon(v_1 - 1) + 4(\varepsilon + k)) - \bar{\beta}^{-1}\beta_0(\varepsilon + k)(3(v_2 + 3) - \\
&\quad \left. - (3v_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2)]x \right\} \{ \bar{\beta}^{-2}\varepsilon(1 + \beta_0^2) \}^{-1}, \\
C_2^* &= \frac{2\beta_0 \left\{ -1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} + (3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2)x \right\}}{1 + \beta_0^2}, \\
C_3 &= -\frac{-1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} + 3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)\beta_0^2}{1 + \beta_0^{-2}}x, \\
x &= \tau_1 + \tau_2 \left(-1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} \right) \tag{39}
\end{aligned}$$

и рациональное уравнение относительно β_{01} с параметром β_0

$$\begin{aligned}
f(\beta_{01}) &\equiv C_1 - \beta_{01}^{-2}C_2 - \Gamma[(3v_1 + 1)\beta_{01}^2 + 8\beta^3\beta_{01}^{-1}]x - s - \\
&\quad - \beta\beta_{01}^{-1} \left(-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} \right) = 0, \tag{40}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{0.5(\beta_{01}^2[1 + \varepsilon - k - 2\varepsilon s] + \bar{\beta}^2[1 - (\varepsilon + k)])(1 + \beta_0^2)}{\tau}, \\
\tau_2 &= \frac{\bar{\beta}^{-1}\beta_0(\beta_{01}^2(\varepsilon - k) - \bar{\beta}^2(\varepsilon + k))}{\tau}, \\
\tau &= 3\Gamma\varepsilon\beta_{01}^4(3v_1 + 1)(1 + \beta_0^2) - \tau^*, \\
\tau^* &= \bar{\beta}^2(1 + \beta_0^2)(2\beta_{01}^2[3\Gamma\varepsilon(v_1 + 1) - 2(\varepsilon - k)] + \bar{\beta}^2[3\Gamma\varepsilon(v_1 - 1) + 4(\varepsilon + k)]) + \\
&\quad + \bar{\beta}^{-1}\beta_0(\beta_{01}^2(\varepsilon - k) - \bar{\beta}^2(\varepsilon + k))(3(v_2 + 3) - (3v_2 + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2), \\
-1 + \frac{p_e}{\sigma_{s2}} &= \frac{-1 + \varepsilon_e + 24\alpha_e\tau_1}{1 - 24\alpha_e\tau_2}, \\
-s - \frac{p_i}{\sigma_{s2}} &= -s - \varepsilon_i - \frac{24\alpha_i(\tau_1 + \tau_2(-1 + \varepsilon_e))}{1 - 24\alpha_e\tau_2}.
\end{aligned}$$

Присоединяя к характеристическому уравнению $\det(a_{ij}) = 0$ (см. п. 4 и (21), (39)) уравнение (40), получаем, таким образом, систему уравнений для определения критического значения $(\beta_{01*}, \beta_{0*}) \in [\beta, \bar{\beta}] \times [\bar{\beta}, 1)$. Вслед за критическими радиусами областей $\mathcal{D}_{1(p)}$ и $\mathcal{D}_{2(p)}$ определяем и критическую скорость вращения ω_* .

7. Числовые примеры и обсуждение результатов. Для составного диска с параметрами $\beta = 0.2$, $\bar{\beta} = 0.94$, $\nu_1 = 0.31$, $\nu_2 = 0.3$, $\varepsilon = 1$, $\Gamma = 0.99$, $s = 0.99$, $\sigma_{s2}/E_2 = 0.01$, $\varepsilon_i = \varepsilon_e = \alpha_e = 0$, теряющего по предположению устойчивость по сценарию $\mathcal{D}_{1(pe)}\mathcal{D}_{2(e)}$, вычисленные при различных n (см. (1)) значения критического радиуса β_{0*} пластической зоны $\mathcal{D}_{1(p)}$ и относительной критической скорости вращения ω_*/q_2 приведены в табл. 1.

Таблица 1

		n			
		2	3	4	5
$\alpha_i = 0$	β_{0*}	0.7351	0.8560	0.9052	0.9314
	ω_*/q_2	1.5068	1.5385	1.5470	1.5502
$\alpha_i = 0.01$	β_{0*}	0.7356	0.8564	0.9055	0.9316
	ω_*/q_2	1.5024	1.5339	1.5423	1.5456
$\alpha_i = 0.1$	β_{0*}	0.7401	0.8592	0.9075	0.9331
	ω_*/q_2	1.4646	1.4944	1.5023	1.5053

Рассчитанные значения критического радиуса β_{0*} пластической зоны $\mathcal{D}_{2(p)}$ и относительной критической скорости вращения ω_*/q_2 в случае реализации механизма $\mathcal{D}_{1(p)}\mathcal{D}_{2(pe)}$ потери устойчивости составного диска с параметрами $\beta = 0.2$, $\bar{\beta} = 0.5$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2$, $\varepsilon = 1.2$, $\Gamma = 0.9$, $s = 1.1$, $\sigma_{s2}/E_2 = 0.01$, $\varepsilon_i = \varepsilon_e = \alpha_e = 0$ содержатся в табл. 2.

Таблица 2

		n			
		2	3	4	5
$\alpha_i = 0$	β_{0*}	0.7308	0.8537	0.9036	0.9302
	ω_*/q_2	1.5523	1.5800	1.5875	1.5904
$\alpha_i = 0.01$	β_{0*}	0.7313	0.8540	0.9038	0.9303
	ω_*/q_2	1.5477	1.5753	1.5827	1.5855
$\alpha_i = 0.1$	β_{0*}	0.7359	0.8569	0.9059	0.9319
	ω_*/q_2	1.5080	1.5344	1.5414	1.5440

Как следует из примеров, изложенный способ исследования неустойчивости составных кольцевых дисков, пребывающих в упругопластическом состоянии, дает возможность рассчитать критические размеры пластической области и критическую скорость вращения с учетом геометрии дисков, их определяющих физических свойств и параметров нагружения. Соответствующие результаты получены применительно к самоуравновешенной форме неустойчивости, являющейся естественной именно для кольцевых дисков.

С учетом результатов работ [11, 12] предложенный способ определения момента перехода перегруженного быстровращающегося диска в неустойчивое состояние позволяет приближенно решить плоскую упругопластическую задачу при реализации каждого из возможных механизмов потери устойчивости, свойственных дискам, радиально неоднородным по материалу. Это имеет решающую роль в вопросе предотвращения перегрузок участков диска, наиболее уязвимых к потере прочности.

1. Белубекян М. В., Саноян Ю. Г. К задаче устойчивости составной пластины при ее нагреве // *Мат. методы та физ.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 2. – С. 170–176.
То же: *Belubekyan M. V., Sanoyan Yu. G. On the problem of stability of a composite plate under heating // J. Math. Sci.* – 2013. – **192**, No. 6. – P. 682–690.
2. Бицено К. Б., Граммель Р. *Техническая динамика: В 2 т.* – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1950. – Т. 1. – 900 с.
3. Бицено К. Б., Граммель Р. *Техническая динамика: В 2 т.* – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1952. – Т. 2. – 640 с.
4. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. *Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел.* – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
5. Гузь А. Н., Немчи Ю. Н. *Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред.* – Киев: Вища шк., 1989. – 352 с.
6. Демьянушко И. В., Биргер И. А. *Расчет на прочность вращающихся дисков.* – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.
7. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // *Изв. АН СССР. Отдел техн. наук.* – 1958. – № 1. – С. 124–125.
8. Ивлев Д. Д. *Механика пластических сред: В 2 т.* – Т. 2: Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – Москва: Физматлит, 2002. – 448 с.
9. Ивлев Д. Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // *Изв. АН СССР. Отдел техн. наук.* – 1957. – № 1. – С. 141–144.
10. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. *Метод возмущений в теории упругопластического тела.* – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
11. Лиля Д. М. Механизм потери устойчивости вращающегося составного плоского кругового диска // *Мат. методы та физ.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 3. – С. 111–120.
То же: *Lila D. M. Mechanism of the loss of stability of a rotating composite plane circular disk // J. Math. Sci.* – 2013. – **194**, No. 3. – P. 257–269.
12. Лиля Д. М., Мартынюк А. А. О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кругового диска // *Мат. методы та физ.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 1. – С. 145–158.
То же: *Lila D. M., Martynyuk A. A. On instability of a rotating elastoplastic composite plane circular disk // J. Math. Sci.* – 2013. – **190**, No. 6. – P. 804–822.
13. Лиля Д. М., Мартынюк А. А. Развитие неустойчивости вращающегося упругопластического кольцевого диска // *Прикл. механика.* – 2012. – **48**, № 2. – С. 127–136.
То же: *Lila D. M., Martynyuk A. A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, No. 2. – P. 224–233.
14. Надаи А. *Пластичность и разрушение твердых тел: В 2 т.* – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 1. – 648 с.
15. Соколовский В. В. *Теория пластичности.* – Москва: Высш. шк., 1969. – 608 с.
16. Cláudio R. A., Branco C. M., Gomes E. C., Byrne J., Harrison G. F., Winstone M. R. Fatigue life prediction and failure analysis of a gas turbine disc using the finite element method // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2004. – **27**. – P. 849–860.
17. László F. Geschleuderte Umdrehungskörper im Gebiet bleibender Deformation // *Z. angew. math. mech.* – 1925. – **5**, No. 4. – P. 281–293.
18. Liля D. M., Martynyuk A. A. Analysis of dynamics of boundary shape perturbation of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous plane circular disk: Analytical approach // *Appl. Math.* – 2012. – **3**, No. 5. – P. 451–456.
19. Liля D. M., Martynyuk A. A. Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // *Appl. Math.* – 2011. – **2**, No. 5. – P. 579–585.
20. Liu C. L., Lu Z. Z., Xu Y. L., Yue Z. F. Reliability analysis for low cycle fatigue life of the aeronautical engine turbine disc structure under random environment // *Mater. Sci. Eng. A.* – 2005. – **395**. – P. 218–225.
21. Love A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* – New York: Dover Publ., 1927. – 643 p.
22. Manavi B. Centrifugal rotor tri-hub burst for containment system validation // *ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea and Air.* – ASME, 2006. – P. 1–9.
23. Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks – Part I: Analytical and numerical stability analyses // *Eur. J. Mech. A/Solid.* – 2009. – **28**, No. 1. – P. 36–44.
24. Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II – Burst of a superalloy turbine disk // *Eur. J. Mech. A/Solid.* – 2009. – **28**, No. 3. – P. 428–432.

25. Meguid S. A., Kanth P. S., Czekanski A. Finite element analysis of fir-tree region in turbine discs // Finite Elem. Anal. Des. – 2000. – **35**, No. 4. – P. 305–317.
26. Newman J. C. Application of a closure model to predict crack growth in three engine disc materials // Int. J. Fracture. – 1996. – **80**, No. 2-3. – P. 193–218.
27. Percy M., Ball K., Mellor P. An experimental study of the burst strength of rotating disks // Int. J. Mech. Sci. – 1974. – **16**. – P. 809–817.
28. Roark R. J., Young W. C. Formulas for stress and strain. – New York: McGraw-Hill, 1982. – 518 p.
29. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1934. – 415 p.
То же: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
30. Tvergaard V. On the burst strength and necking behavior of rotating disks // Int. J. Mech. Sci. – 1978. – **20**, No. 2. – P. 109–120.
31. Walz G., Riesch-Oppermann H. Probabilistic fracture mechanics assessment of flaws in turbine disks including quality assurance procedures // Struct. Saf. – 2006. – **28**, No. 3. – P. 273–288.
32. Witek L. Failure analysis of turbine discs of an aero engine // Eng. Failure Anal. – 2006. – **13**, No. 1. – P. 9–17.
33. Zhuang W. Z. Prediction of crack growth from bolt holes in a disc // Int. J. Fatigue. – 2000. – **22**, No. 3. – P. 241–250.

ПРО НЕСТІЙКІСТЬ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО СКЛАДЕНОГО ПЛОСКОГО КІЛЬЦЕВОГО ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Запропоновано спосіб дослідження методом малого параметра можливої втрати стійкості складеного плоского кільцевого кругового диска, що обертається. Одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання при різних параметрах диска.

ON INSTABILITY OF ELASTO-PLASTIC COMPOSITE PLANE ROTATING CIRCULAR DISC

A way of investigation of possible stability loss by a rotating elasto-plastic composite plane circular annular disc using small parameter method is proposed. A characteristic equation for a critical radius of a plastic zone is obtained as a first approximation. The values of critical angular rotational velocity for different disc parameters are found numerically.

Черкаський нац. ун-т
им. Б. Хмельницького, Черкаси

Получено
09.03.12