УДК 539.3

М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян

О ДЕСТАБИЛИЗИРУЮЩЕМ ВЛИЯНИИ КОНСТРУКЦИОННОГО ТРЕНИЯ В ОПОРАХ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

На примере шарнирно закрепленной вдоль длинных кромок тонкой упругой удлиненной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, исследуется эффект дестабилизации при различных моделях конструкционного трения в шарнирах в предположении наличия на закрепленных кромках сосредоточенных инерционных моментов. Установлена связь между характеристиками собственных колебаний шарнирно закрепленной пластинки и скоростью обтекающего потока газа, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости возмущенного движения пластинки в зависимости от выбранной модели конструкционного трения. Для различных моделей конструкционного трения в опорах найдена критическая скорость потока газа, приводящая к флаттерной неустойчивости.

Как известно [1, 3, 4, 6–9, 11–15], большой теоретический и практический интерес и поныне представляет своеобразное влияние диссипативных сил на устойчивость распределенных неконсервативных систем. И особого внимания требует изучение расхождения между результатами, относящимися к системам с исчезающе малым затуханием, и результатами для систем, затухание в которых с самого начала предполагалось равным нулю.

Одно из проявлений своеобразного влияния исчезающе малого трения на устойчивость неконсервативных систем – скачкообразное падение критической нагрузки и частоты, а в случае обтекаемой потоком газа панели – критической скорости флаттера. Это явление, получившее название «парадокс дестабилизации», впервые было отмечено H. Ziegler [15] на примере двойного математического маятника, нагруженного на свободном конце «следящей силой». Позже эффект дестабилизации был обнаружен во многих механических и физических задачах, в частности, A. N. Kounadis [12], G. Herrmann [13] и др.

Однако, несмотря на отдельные работы [1, 3, 4, 6–9, 11–15], систематического изучения эффекта дестабилизации в литературе не наблюдается. Общие свойства распределенных неконсервативных систем с диссипативными силами еще не изучены исчерпывающе. Поэтому имеет смысл дальнейшее исследование таких модельных задач, в которых представление диссипативных сил наиболее корректно описывает реальную физическую модель.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую удлиненную пластинку, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. При этом полагаем, что $a \ll b$. Декартову систему координат $Oxyz$ выбираем так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущенной пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущенной скоростью V. Течение газа считаем плоским и потенциальным.

Пусть одна из длинных кромок пластинки $x = 0$ имеет неподвижное шарнирное закрепление, а другая $x = a$ – свободное шарнирное закрепление; кромки $y = 0$ и $y = b$ свободны. Предполагаем, что к шарнирно закрепленным кромкам $x = 0$ и $x = a$ приложены сосредоточенные инерционные моменты поворота J_1 и J_2 соответственно [10]. Также предполагаем, что шарниры упругие и линейновязкие. Под влиянием каких-либо причин невозмущенное состояние равновесия пластинки может быть нарушено и пластинка начнет совершать возмущенное движение с прогибом $w = w(x,t)$. Прогиб $w = w(x,t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближенной формулой «поршневой теории» [5]: $\Delta p = -a_0\rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, где ρ_0 – плотность невозмущенного потока газа, a_0 – скорость звука в невозмущенной газовой среде. Примем, что прогибы $w = w(x,t)$ малы по сравнению с толщиной пластинки $2h$.

Малые изгибные колебания точек срединной поверхности пластинки в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» удовлетворяют уравнению [3 (с. 258)]

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_0\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2h\rho\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad w = w(x,t), \tag{1}$$

и соответствующим граничным условиям, в которых учтены реальные законы конструкционного трения в шарнирах [3 (с. 18, 19), 8 (с. 127, 241, 250), 13]:

$$w = 0, \quad D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = J_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} + \varepsilon_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \delta_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}, \quad x = 0,$$

$$w = 0, \quad D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -J_2\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - \varepsilon_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \delta_2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}, \quad x = a. \tag{2}$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость пластинки на изгиб; ρ – плотность материала пластинки; ε – коэффициент сопротивления внешней среды; ε_1, ε_2, δ_1, δ_2 – коэффициенты, характеризующие трение в шарнирах.

В случае сложных краевых условий при учете реальных законов конструкционного демпфирования приходится искать приближенные решения, которые могут послужить эвристическим основанием для получения других, более адекватных результатов.

Будем полагать, что распределенная масса пластинки и силы сопротивления пренебрежимо малы [3 (с. 18, 19)]. Тогда, вводя обозначения

$$s^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}, \quad \alpha_i = J_i D^{-1}, \quad \beta_i = \varepsilon_i D^{-1}, \quad \gamma_i = \delta_i D^{-1},$$

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1,2, \tag{3}$$

исходное уравнение (1) малых изгибных колебаний около невозмущенной формы равновесия и граничные условия (2) перепишем в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + s^3\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

$$w = 0, \quad D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} + \beta_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \gamma_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}, \quad x = 0,$$

$$w = 0, \quad D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\alpha_2\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - \beta_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \gamma_2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}, \quad x = a. \tag{5}$$

Задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа шарнирно закрепленной вдоль длинных кромок упругой удлиненной пластинки, описываемая соотношениями (4), (5), состоит в нахождении наименьшего значения скорости потока V_{cr} такого, что при $V < V_{\text{cr}}$ возмущенное движение будет устойчивым, а при $V \geq V_{\text{cr}}$ – неустойчивым.

Записывая решение задачи (4), (5) в виде гармонических колебаний $w(x,t) = f(x)\cdot\exp(\lambda t)$, рассматриваемую задачу флаттера пластинки сведем к следующей краевой задаче на собственные значения λ относительно форм колебаний $f(x)$ для несамосопряженного оператора:

$$f^{IV} + s^3 f^I = 0\,, \tag{6}$$

$$f = 0, \qquad f'' = \alpha_1\lambda^2 f' + \beta_1\lambda f' - \gamma_1\lambda f'', \qquad x = 0\,,$$

$$f = 0, \qquad f'' = -\alpha_2\lambda^2 f' - \beta_2\lambda f' - \gamma_2\lambda f'', \qquad x = a\,, \tag{7}$$

α_1, α_2 – параметры, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты J_1, J_2, приложенные к шарнирно закрепленным кромкам $x = 0$, $x = a$ соответственно; β_1, β_2, γ_1, γ_2 – параметры, характеризующие конструкционное трение в шарнирах.

Подставляя общее решение уравнения (6)

$$f(x) = C_1 + C_2\exp(-sx) + C_3\exp(sx/2)\cdot\cos(sx\sqrt{3}/2) + \\ + C_4\exp(sx/2)\cdot\sin(sx\sqrt{3}/2)$$

в граничные условия (7), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвертого порядка относительно произвольных постоянных C_i, $i = 1,\ldots,4$, одновременно не равных нулю. Далее, приравнивая нулю определитель этой системы, получаем алгебраическое уравнение четвертой степени относительно собственного значения λ задачи (6), (7), которое в безразмерных переменных

$$\mu_1 = \lambda\sqrt{\alpha_1 a}, \qquad \beta_{11} = \beta_1\sqrt{\alpha_1^{-1}a}, \qquad \beta_{12} = \beta_2\sqrt{\alpha_1^{-1}a}\,,$$

$$\gamma_{11} = \gamma_1\sqrt{\alpha_1^{-1}a^{-1}}, \qquad \gamma_{12} = \gamma_2\sqrt{\alpha_1^{-1}a^{-1}}\,, \tag{8}$$

$$r = sa, \qquad \chi = \alpha_2\alpha_1^{-1}\,, \tag{9}$$

в предположении, что $\alpha_1 \neq 0$ $(J_1 \neq 0)$, имеет вид

$$\chi A(r)\mu_1^4 + ((\chi\beta_{11} + \beta_{12})A(r) + (\chi\gamma_{11} + \gamma_{12})rB(r))\mu_1^3 + ((1 + \chi + \beta_{11}\gamma_{12} + \\ + \beta_{12}\gamma_{11})rB(r) + \beta_{11}\beta_{12}A(r) + \gamma_{11}\gamma_{12}r^2C(r))\mu_1^2 + ((\beta_{11} + \beta_{12})\times \\ \times rB(r) + (\gamma_{11} + \gamma_{12})r^2C(r))\mu_1 + r^2C(r) = 0, \quad \chi \in [0,\infty)\,, \tag{10}$$

где

$$A(r) = \operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(r/2)\cos(r\sqrt{3}/2) - \sqrt{3}\operatorname{sh}(r/2)\sin(r\sqrt{3}/2)\,,$$

$$B(r) = 2\operatorname{sh}(r/2)(\operatorname{ch}(r/2) - \cos(r\sqrt{3}/2))\,,$$

$$C(r) = \operatorname{ch} r - \operatorname{ch}(r/2)\cos(r\sqrt{3}/2) + \sqrt{3}\operatorname{sh}(r/2)\sin(r\sqrt{3}/2)\,, \tag{11}$$

α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 определены выражениями (3).

В случае, когда $\alpha_1 = 0$ $(J_1 = 0)$ и $\alpha_2 \neq 0$ $(J_2 \neq 0)$, или $\chi = \infty$ в соответствии с обозначением (9), алгебраическое уравнение относительно собственного значения λ задачи (6), (7) примет вид

$$(\beta_{21}A(r) + \gamma_{21}rB(r))\mu_2^3 + ((1 + \beta_{21}\gamma_{22} + \beta_{22}\gamma_{21})rB(r) + \beta_{21}\beta_{22}A(r) + \\ + \gamma_{21}\gamma_{22}r^2C(r))\mu_2^2 + ((\beta_{21} + \beta_{22})rB(r) + \\ + (\gamma_{21} + \gamma_{22})r^2C(r))\mu_2 + r^2C(r) = 0, \qquad \chi = \infty\,. \tag{12}$$

Здесь

$$\mu_2 = \lambda\sqrt{\alpha_2 a}, \qquad \beta_{21} = \beta_1\sqrt{\alpha_2^{-1}a}, \qquad \beta_{22} = \beta_2\sqrt{\alpha_2^{-1}a}\,,$$

$$\gamma_{21} = \gamma_1\sqrt{\alpha_2^{-1}a^{-1}}, \qquad \gamma_{22} = \gamma_2\sqrt{\alpha_2^{-1}a^{-1}}\,, \tag{13}$$

r и $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ определены выражениями (9) и (11) соответственно; α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 определены выражениями (3).

В работе [2] с помощью графо-аналитических методов исследований показано, что

$$A(r) > 0, \qquad rB(r) > 0, \qquad C(r) > 0, \qquad r \neq 0,$$

и

$$A(r) = B(r) = C(r) = 0, \qquad r = 0. \tag{14}$$

В соответствии с соотношениями (3) и (14), очевидно следует, что коэффициенты характеристических уравнений (10) и (12) положительны при всех $r \neq 0$. Это означает, что исследование поведения их корней в зависимости от параметров задачи (4), (5) можно провести с помощью алгебраического критерия устойчивости Льенара – Шипара (Liénard – Chipart).

Однако, в силу соотношений (8), (11) и (13), определение критических поверхностей и выделение областей неустойчивости для рассматриваемой распределенной неконсервативной задачи (4), (5) представляет достаточно сложную в вычислительном отношении задачу.

В работе [2] подробно исследована задача устойчивости пластинки (4), (5) в предположении отсутствия конструкционного трения в шарнирах $(\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0)$. Показано, что при $\chi \in [0, 0.6) \cup (1.66, \infty)$ и $\chi = \infty$ возмущенное движение пластинки является устойчивым:

$$V_{\text{cr}} = \infty, \qquad \chi \in [0, 0.6) \cup (1.66, \infty), \qquad \chi = \infty, \tag{15}$$

а при $\chi \in [0.6, 1.66]$ имеет место флаттерная неустойчивость. При этом критическая скорость потока, приводящая к флаттерной неустойчивости, определяется из соотношения

$$B^2(r) - 4\chi(1+\chi)^{-2} A(r)C(r) = 0, \qquad \chi \in [0.6, 1.66], \tag{16}$$

которое достигает минимального значения $V_{\text{cr}}^{\min} = V_*$ при $\chi = 1$:

$$V_{\text{cr}}^{\min} = V_* \approx 170.95\, D\, (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \qquad \chi = 1, \tag{17}$$

а для остальных значений χ имеем

$$V_{\text{cr}} > V_*, \qquad \chi \in [0.6, 1.0) \cup (1.0, 1.66]. \tag{18}$$

В соотношении (16) χ, r и $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ определены выражениями (9) и (11) соответственно.

В соответствии с (16), для нескольких значений $\chi \in [0.6, 1.66]$ найдены соответствующие значения критической скорости потока V_{cr} (табл. 1).

Таблица 1

χ	1.0	0.9	1.1	0.71	1.41	0.66	1.55	0.6	1.66
$V_{\text{cr}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	170.95	173.17		199.12		223.60		302.01	

Можно показать, что при отсутствии обтекания пластинки потоком газа $r \to 0$ $(V \to 0)$ возмущенное движение пластинки является устойчивым $(V_{\text{cr}} = \infty)$ как при наличии сколь угодно малого конструкционного трения в шарнирах, так и при его отсутствии изначально. Тем самым, в этом случае эффект дестабилизации отсутствует.

Замечание. В этой работе с целью получения возможности аналитического исследования влияния диссипативных сил на устойчивость возмущенной системы, использована идея исследования динамических систем, которая явилась основополагающей в методе, примененном В. В. Болотиным при решении задачи устойчивости балки, сжатой следящей силой [3 (с. 18, 19)]. В соответствии с этой идеей в задаче, рассматриваемой в данной работе, распределенная масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными моментами, приложенными на шарнирно закрепленных кромках.

2. Рассмотрим сначала некоторые частные случаи, когда конструкционное трение учитывается в опоре только одной из подкрепленных кромок $x = 0$ или $x = a$ и отсутствует соответственно в опоре другой кромки.

2.1. Пусть $\beta_1 \neq 0$, а $\beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$. При этом характеристические уравнения (10) и (12) запишутся соответственно в виде

$$\chi A(r)\mu_1^4 + \chi\beta_{11}A(r)\mu_1^3 + (1+\chi)rB(r)\mu_1^2 + \beta_{11}rB(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0, \quad \chi \in (0,\infty), \tag{19}$$

$$rB(r)\mu_1^2 + \beta_{11}rB(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0, \qquad \chi = 0, \tag{20}$$

$$\beta_{21}A(r)\mu_2^3 + rB(r)\mu_2^2 + \beta_{21}rB(r)\mu_2 + r^2C(r) = 0, \qquad \chi = \infty, \tag{21}$$

где μ_1, β_{11}, r, χ, $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ и μ_2, β_{21} определены выражениями (8), (9), (11) и (13) соответственно.

Подставляя коэффициенты полиномов (19) и (21) в соответствующие условия критерия устойчивости Льенара − Шипара, получаем неравенства

$$\beta_{11}^2\chi^2r^2A(r)(B^2(r) - A(r)C(r)) > 0, \qquad \chi \in (0,\infty),$$

$$\beta_{21}r^2(B^2(r) - A(r)C(r)) > 0, \qquad \chi = \infty,$$

или, в силу условий (14),

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) > 0, \qquad r \neq 0, \qquad \beta_1 \neq 0,$$

$$\beta_{11} \neq 0, \qquad \beta_{21} \neq 0, \qquad \chi \in (0,\infty), \qquad \chi = \infty. \tag{22}$$

Отсюда следует, что при всех $\chi \in (0,\infty)$ и $\chi = \infty$ критическое значение скорости потока V_{cr}, приводящее к флаттерной неустойчивости, является решением уравнения, описываемого соотношением (16) при $\chi = 1$:

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) = 0, \qquad \beta_1 \neq 0, \qquad r \neq 0, \qquad \chi \in (0,\infty), \qquad \chi = \infty, \tag{23}$$

и не зависит от $\beta_1 \neq 0$ (β_{11}, β_{21}).

Следовательно, первое критическое значение скорости потока V_{cr}, приводящее к флаттерной неустойчивости, одно и то же при всех $\beta_1 \neq 0$, $\chi \in (0,\infty)$ и $\chi = \infty$ и равно значению критической скорости (17) при $\beta_1 = 0$ и $\chi = 1$:

$$V_{\text{cr}} = V_* \approx 170.95D(a_0\rho_0a^3)^{-1}, \quad \beta_1 \neq 0, \quad r \neq 0, \ \chi \in (0,\infty), \ \chi = \infty. \tag{24}$$

Итак, в возмущенной системе при всех $\chi \in (0,\infty)$, $\chi = \infty$ наличие исчезающе малого конструкционного трения в опоре кромки $x = 0$, определяемого коэффициентом β_1, приводит при достижении скоростью потока критического значения (24) к возбуждению флаттерных колебаний. В соответствии с соотношениями (15), (17) и (18) отсюда следует, что при всех $\chi \in (0, 1) \bigcup (1, \infty)$ и $\chi = \infty$ имеет место эффект дестабилизации. Наиболее ярко эффект дестабилизации наблюдается при значениях $\chi \in (0, 0.6) \bigcup (1.66, \infty)$ и $\chi = \infty$: при достижении скоростью потока значения (24) возмущенное движение пластинки, являясь устойчивым в предположении отсутствия трения β_1 изначально, становится неустойчивым и при наличии конструкционного трения β_1. При $\chi \in [0.6, 1) \bigcup (1, 1.66]$ наличие исчезающе малого трения β_1 приводит к конечному скачкообразному падению значений критической скорости потока (18), найденных в предположении отсутствия трения β_1 ($\beta_1 = 0$) изначально.

Из сопоставления значений критических скоростей потока V_{cr} при соответствующих $\chi \in [0.6, 1.66]$, найденных в предположении отсутствия трения β_1 $(\beta_1 = 0)$ изначально (табл. 1), и значения (24), найденного в предположении наличия исчезающе малого трения β_1, очевидно, что при $\chi = 0.6$ и $\chi = 1.66$ падение критической скорости потока ΔV_{cr} достигает максимального значения $\Delta V_{\text{cr}}^{\max} \approx 131.06 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$, а при $\chi = 1$ имеем $\Delta V_{\text{cr}}^{\min} = 0$ − эффект дестабилизации отсутствует.

Из вышесказанного следует, что наличие конструкционного трения β_1 приводит к увеличению интервала флаттерной неустойчивости $\chi \in [0.6, 1.66]$, соответствующего поведению возмущенной системы при отсутствии трения β_1 изначально: возмущенное движение пластинки при $\chi \in (0, 0.6) \cup (1.66, \infty)$ и $\chi = \infty$, являясь устойчивым в предположении $\beta_1 = 0$ изначально, становится неустойчивым в предположении наличия конструкционного трения β_1 при достижении скоростью потока значения (24).

Характеристическое уравнение (20), соответствующее значению $\chi = 0$, является квадратным уравнением, корни которого имеют отрицательные вещественные части при всех $\beta_1 \neq 0$ в силу условий (3) и (14). Следовательно, при $\chi = 0$ и $\beta_1 \neq 0$ возмущенное движение пластинки является устойчивым. А так как, в соответствии с (15), оно было устойчивым и при $\beta_1 = 0$ изначально, то при $\chi = 0$ конструкционное трение β_1 не влияет на поведение возмущенного движения пластинки.

Таким образом, при всех $\chi \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ и $\chi = \infty$ наличие конструкционного трения β_1 при достижении скоростью потока значения $V_* \approx 170.95 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$ приводит к эффекту дестабилизации. Эффект дестабилизации отсутствует при $\chi = 0$ и $\chi = 1$.

Результаты, полученные в данном разделе, полностью согласуются с результатами Г. Циглера, полученными в [15], при рассмотрении задачи устойчивости двойного математического маятника, нагруженного на свободном конце «следящей силой», в случаях, когда трение учтено только в одном из шарниров.

2.2. Пусть $\gamma_1 \neq 0$, а $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$. Подставляя эти значения в характеристические уравнения (10) и (12), получаем соответственно

$$\chi A(r)\mu_1^4 + \chi\gamma_{11} r B(r)\mu_1^3 + (1+\chi) r B(r)\mu_1^2 + \gamma_{11} r^2 C(r)\mu_1 + r^2 C(r) = 0, \quad \chi \in (0, \infty), \tag{25}$$

$$r B(r)\mu_1^2 + \gamma_{11} r^2 C(r)\mu_1 + r^2 C(r) = 0, \qquad \chi = 0, \tag{26}$$

$$\gamma_{21} r B(r)\mu_2^3 + r B(r)\mu_2^2 + \gamma_{21} r^2 C(r)\mu_2 + r^2 C(r) = 0, \qquad \chi = \infty, \tag{27}$$

где μ_1, γ_{11}, r, χ, $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ и μ_2, γ_{21} определены выражениями (8), (9), (11) и (13) соответственно.

Легко показать, что и в этом случае, в соответствии с критерием устойчивости Льенара − Шипара, при $\chi \in (0, \infty)$ условие устойчивости будет вида

$$\chi\gamma_{11}^2 r^4 C(r)(B^2(r) - A(r)C(r)) > 0, \qquad \gamma_1 > 0, \qquad \chi \in (0, \infty). \tag{28}$$

Отсюда, в силу условия (23), следует, что критическая скорость потока V_{cr}, приводящая к флаттерной неустойчивости, не зависит от χ и γ_1: одинакова при всех $\gamma_1 \neq 0$ $(\gamma_{11} \neq 0)$, $\chi \in (0, \infty)$ и равна значению (24). Тем самым, в соответствии с вышеизложенным, и в этом случае наличие исчезающе малого трения γ_1 при всех значениях $\chi \in (0, 1) \bigcup (1, \infty)$ приводит к эффекту дестабилизации.

Нетрудно показать, что при $\chi = 0$ и $\chi = \infty$ наличие трения γ_1 не влияет на устойчивость возмущенной системы − эффект дестабилизации отсутствует.

Действительно, в силу условий (14), характеристическое уравнение (26), соответствующее $\chi = 0$, является квадратным уравнением с положительными коэффициентами при всех $\gamma_1 \neq 0$. Следовательно, при всех $\gamma_1 \neq 0$ корни уравнения (26) имеют отрицательные вещественные части. Тем самым, в возмущенной системе при $\chi = 0$ возбуждаются только лишь затухающие колебания.

Уравнение (27) легко преобразуется к виду

$$(\gamma_{21}\mu_2 + 1)(rB(r)\mu_2^2 + r^2C(r)) = 0, \qquad \chi = \infty. \tag{29}$$

В силу условий (14), очевидно, что один из трех корней уравнения (29) является действительным отрицательным числом, а два остальных корня − чисто мнимые числа. Следовательно, при $\chi = \infty$ наличие исчезающе малого трения γ_1 $(\gamma_1 \to 0)$ не приводит к эффекту дестабилизации − возмущенное движение пластинки, являясь изначально устойчивым при его отсутствии $(\gamma_1 = 0)$, остается устойчивым и при наличии исчезающе малого трения γ_1.

Таким образом, в случае, когда $\gamma_1 \neq 0$, а $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, наличие исчезающе малого трения γ_1 при всех $\chi \in (0, 1) \bigcup (1, \infty)$ приводит к эффекту дестабилизации при достижении скоростью потока значения (24): $V_* \approx$ $\approx 170.95\, D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$, а при $\chi = 0$ и $\chi = \infty$ эффект дестабилизации отсутствует. Эффект дестабилизации наиболее ярко наблюдается при $\chi \in (0, 0.6) \bigcup$ $\bigcup (1.66, \infty)$.

Проведенные аналогичные исследования двух остальных случаев, когда $\beta_2 \neq 0$, $\beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и $\gamma_2 \neq 0$, а $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = 0$, показали следующее. При достижении скоростью потока значения (24) наличие исчезающе малого конструкционного трения β_2 $(\beta_2 \to 0)$ при всех $\chi \in [0, 1) \bigcup (1, \infty)$ приводит к эффекту дестабилизации, а наличие исчезающе малого конструкционного трения γ_2 $(\gamma_2 \to 0)$ приводит к эффекту дестабилизации при значениях $\chi \in (0, 1) \bigcup (1, \infty)$.

Заметим, что в случае, когда $\beta_2 \neq 0$, в отличие от случая, когда $\beta_1 \neq 0$, эффект дестабилизации наблюдается при $\chi = 0$ или $J_1 \neq 0$, $J_2 = 0$ в соответствии с обозначениями (3), (9), а при $\chi = \infty$ или $J_1 = 0$, $J_2 \neq 0$ наличие β_2 приводит к затуханию. В случае, когда $\beta_1 \neq 0$, наоборот, при $\chi = 0$ наличие трения β_1 приводит к затуханию, а при $\chi = \infty$ наблюдается эффект дестабилизации. В случае, когда $\gamma_2 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = 0$, влияние трения γ_2 на поведение возмущенной системы аналогично влиянию трения γ_1 в случае, когда $\gamma_1 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$.

2.3. Пусть $\beta_1 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$, $\beta_2 = \gamma_2 = 0$. В этом случае характеристические уравнения (10) и (12) будут иметь вид

$$\chi A(r)\mu_1^4 + \chi(\beta_{11}A(r) + \gamma_{11}rB(r))\mu_1^3 + (1+\chi)rB(r)\mu_1^2 + (\beta_{11}rB(r) +$$

$$+ \gamma_{11}r^2C(r))\mu_1 + r^2C(r) = 0, \qquad \chi \in (0, \infty), \tag{30}$$

$$rB(r)\mu_1^2 + (\beta_{11} rB(r) + \gamma_{11} r^2 C(r))\mu_1 + r^2 C(r) = 0, \qquad \chi = 0, \tag{31}$$

$$(\beta_{21} A(r) + \gamma_{21} rB(r))\mu_2^3 + rB(r)\mu_2^2 + (\beta_{21} rB(r) + \gamma_{21} r^2 C(r))\mu_2 + r^2 C(r) = 0, \quad \chi = \infty. \tag{32}$$

Здесь μ_1, β_{11}, γ_{11}, r, χ, $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ и μ_2, β_{21}, γ_{21} определены выражениями (8), (9), (11) и (13) соответственно.

Нетрудно показать, что и в этом случае условие устойчивости, соответствующее алгебраическому критерию Льенара – Шипара, тождественно условию (22) при всех $\beta_1 \neq 0$ $(\beta_{11} \neq 0,\ \beta_{21} \neq 0)$, $\gamma_1 \neq 0$ $(\gamma_{11} \neq 0,\ \gamma_{21} \neq 0)$ и $\chi \in (0, \infty)$, $\chi = \infty$.

Действительно, подставляя коэффициенты полиномов (30), (32) в соответствующее условие критерия устойчивости Льенара – Шипара, получаем выражения

$$(\chi \beta_{11}^2 A(r) + \gamma_{11}^2 r^2 C(r) + \beta_{11}\gamma_{11}(1+\chi) rB(r))(B^2(r) - A(r)C(r)) > 0, \quad \chi \in (0, \infty), \tag{33}$$

$$\beta_{21}(B^2(r) - A(r)C(r)) > 0, \qquad \chi = \infty, \tag{34}$$

которые, в силу (3), (8) и (14), при всех $\beta_1 \neq 0$ $(\beta_{11} \neq 0,\ \beta_{21} \neq 0)$, $\gamma_1 \neq 0$ $(\gamma_{11} \neq 0,\ \gamma_{21} \neq 0)$ и $\chi \in (0, \infty)$, $\chi = \infty$ тождественны условию (22). Отсюда, в соответствии с соотношением (23), следует, что критическая скорость потока V_{cr}, приводящая к флаттерной неустойчивости, при всех $\beta_1 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ и $\chi \in (0, \infty)$, $\chi = \infty$ одна и та же и равна значению (24) $V_{\mathrm{cr}} = V_* \approx \approx 170.95 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$. Здесь так же, как и в **п. *2.1***, из сопоставления значений критических скоростей потока V_{cr}, найденных в предположении отсутствия трения изначально (табл. 1), и значения (24), соответствующего предположению наличия двух видов трения, определяемых коэффициентами β_1 и γ_1 при соответствующих $\chi \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, следует, что при наличии одновременно двух видов трения β_1 и γ_1 имеет место эффект дестабилизации. Наиболее ярко эффект дестабилизации наблюдается при $\chi \in (0, 0.6) \cup \cup (1.66, \infty)$ и $\chi = \infty$. При $\chi = 0$ эффект дестабилизации отсутствует, так как вещественные части корней характеристического уравнения (31) при всех $\beta_1 \neq 0$ и $\gamma_1 \neq 0$ отрицательны.

Из сравнения результатов, полученных в данном пункте и в **п. *2.1***, следует, что поведение возмущенного движения при наличии обоих видов трения с коэффициентами β_1 и γ_1 ($\beta_1 \neq 0$ и $\gamma_1 \neq 0$) такое же, как и при наличии трения только с коэффициентом β_1 ($\beta_1 \neq 0$ и $\gamma_1 = 0$). Иными словами, при наличии обоих видов трения β_1 и γ_1 в опоре кромки $x = 0$ влияние трения β_1 на поведение возмущенного движения пластинки является приоритетным.

Таким образом, при всех $\beta_1 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$, $\chi \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ и $\chi = \infty$ имеет место эффект дестабилизации, а при $\chi = 0$ и $\chi = 1$ наличие трения не влияет на поведение возмущенного движения. Наличие трения с коэффициентом γ_1 наряду с трением с коэффициентом β_1 не влияет на поведение возмущенного движения: оно такое же, как при $\beta_1 \neq 0$, $\gamma_1 = 0$.

Заметим, что исследования, проведенные для случая, когда $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, показали, что при всех $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$ эффект дестабилизации имеет место при $\chi \in [0, 1) \cup (1, \infty)$, а при $\chi = 1$ и $\chi = \infty$ отсутствует. В этом случае так же, как и в предыдущем, наличие трения с коэффициентом γ_2 наряду с трением с коэффициентом β_2 не влияет на поведение возмущенного движения: оно такое же, как и при $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$.

3. Рассмотрим случаи, когда конструкционное трение учитывается в опоре обеих кромок $x = 0$ и $x = a$ пластинки одновременно.

3.1. Сначала рассмотрим случай, когда $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. При этом характеристические уравнения (10), (12) примут вид

$$\chi A(r)\mu_1^4 + (\chi\beta_{11} + \beta_{12})A(r)\mu_1^3 + ((1+\chi)rB(r) + \beta_{11}\beta_{12}A(r))\mu_1^2 +$$
$$+ (\beta_{11} + \beta_{12})rB(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0, \qquad \chi \in (0, \infty), \tag{35}$$

$$\beta_{12}A(r)\mu_1^3 + (rB(r) + \beta_{11}\beta_{12}A(r))\mu_1^2 + (\beta_{11} + \beta_{12})rB(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0,$$
$$\chi = 0, \tag{36}$$

$$\beta_{21}A(r)\mu_2^3 + (rB(r) + \beta_{21}\beta_{22}A(r))\mu_2^2 + (\beta_{21} + \beta_{22})rB(r)\mu_2 + r^2C(r) = 0,$$
$$\chi = \infty, \tag{37}$$

где μ_1, β_{11}, β_{12}, r, χ, $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ и μ_2, β_{21}, β_{22} определены выражениями (8), (9), (11) и (13) соответственно. А условия, соответствующие критерию устойчивости Льенара − Шипара, запишутся в виде

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + (\chi-1)^2(\chi + \beta_{11}^{-1}\beta_{12})^{-2}\beta_{11}^{-1}\beta_{12}B^2(r) + (1 + \beta_{11}^{-1}\beta_{12}) \times$$
$$\times (\chi + \beta_{11}^{-1}\beta_{12})^{-1}\beta_{11}\beta_{12}r^{-1}A(r)B(r) > 0, \qquad \chi \in (0, \infty), \tag{38}$$

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + \beta_{11}\beta_{12}^{-1}B^2(r) + \beta_{11}(\beta_{11} + \beta_{12})r^{-1}A(r)B(r) > 0,$$
$$\chi = 0, \tag{39}$$

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + \beta_{22}\beta_{21}^{-1}B^2(r) + \beta_{22}(\beta_{21} + \beta_{22})r^{-1}A(r)B(r) > 0,$$
$$\chi = \infty. \tag{40}$$

При исчезающе малом трении ($\beta_{i,j} \to 0,\ i, j = 1, 2$) соотношения (38)–(40), соответственно, перепишутся в виде

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + (\chi-1)^2(\chi+1)^{-2}B^2(r) > 0, \qquad \chi \in (0, \infty), \tag{41}$$

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + B^2(r) > 0, \qquad \chi = 0, \qquad \chi = \infty. \tag{42}$$

В соответствии с условием (24), из соотношения (41) следует, что при $\chi = 1$ наличие исчезаще малого трения, определяемого коэффициентами β_1 и β_2, не приводит к эффекту дестабилизации: $\Delta V_{\text{cr}} = 0$.

Графо-аналитические, а также численные методы исследования показали, что наличие исчезающе малого трения в шарнирах кромок $x = 0$ и $x = a$, определяемых коэффициентами β_1 и β_2 ($\beta_{i,j} \to 0,\ i, j = 1, 2$) соответственно, приводит к эффекту дестабилизации только при $\chi \in [0.6, 1) \cup \cup (1, 1.66]$, в отличие от случаев, когда $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = 0$ и $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$ (см. **п. *2.1***). Более того, в этом случае эффект дестабилизации выражен менее ярко, чем при наличии трения только в шарнире одной из кромок $x = 0$ или $x = a$: наличие трения в шарнире обоих кромок как-бы смягчает эффект дестабилизации, который наиболее яркий в случаях, когда $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = 0$ и $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$.

При $\chi \in [0, 0.6) \cup (1.66, \infty)$ и $\chi = \infty$ наличие исчезающе малого трения β_1 и β_2 не влияет на поведение возмущенного движения пластинки − оно такое же, как при отсутствии конструкционного трения $(\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0)$, изначально.

В соответствии с условием (39), критическая скорость потока V_{cr}, приводящая к флаттерной неустойчивости при всех $\chi \in [0.6, 1.66]$, является решением уравнения

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + (\chi - 1)^2(\chi + 1)^{-2}B^2(r) = 0, \qquad \chi \in [0.6, 1.66]. \tag{43}$$

Из уравнения (43) для нескольких значений $\chi \in [0.6, 1.66]$ найдены соответствующие значения критической скорости потока V_{cr} (табл. 2) при исчезающе малом трении $\beta_1 \to 0$ и $\beta_2 \to 0$ в шарнирах кромок $x = 0$ и $x = a$.

Таблица 2

χ	1.0	0.9	1.1	0.71	1.41	0.66	1.55	0.6	1.66
$V_{cr} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	170.95	173.16		198.14		220.05		263.67	

Из сопоставления значений критических скоростей потока V_{cr}, приведенных в табл. 1 и табл. 2 при соответствующих $\chi \in [0.6, 1.66]$, следует, что при наличии исчезающе малого трения $(\beta_1 \to 0,\ \beta_2 \to 0)$ в шарнирах обеих кромок $x = 0$ и $x = a$ наиболее ярко эффект дестабилизации наблюдается при $\chi_1 = 0.6$ и $\chi_2 = 1.66$. При этих χ падение критической скорости потока достигает максимального значения

$$\Delta V_{cr}^{(1)\max} \approx 38.34 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1},$$

$$\chi \in \{0.6, 1.66\}, \qquad \beta_1 \to 0, \qquad \beta_2 \to 0. \tag{44}$$

Далее, численные исследования показали, что при достаточно больших значениях коэффициентов β_1 и β_2 $(\beta_{i,j} \approx 0.3,\ i, j = 1, 2)$ условия устойчивости (38)−(40) выполняются при всех χ, т. е. имеет место стабилизация.

3.2. Пусть $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$. В этом случае характеристические уравнения (10), (12) запишутся в виде

$$\chi A(r)\mu_1^4 + (\chi\gamma_{11} + \gamma_{12})rB(r)\mu_1^3 + ((1 + \chi)rB(r) + \gamma_{11}\gamma_{12}r^2C(r))\mu_1^2 +$$
$$+ (\gamma_{11} + \gamma_{12})r^2C(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0, \qquad \chi \in (0, \infty), \tag{45}$$

$$\gamma_{12}rB(r)\mu_1^3 + (rB(r) + \gamma_{11}\gamma_{12}r^2C(r))\mu_1^2 + (\gamma_{11} + \gamma_{12})r^2C(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0,$$
$$\chi = 0, \tag{46}$$

$$\gamma_{21}rB(r)\mu_2^3 + (rB(r) + \gamma_{21}\gamma_{22}r^2C(r))\mu_2^2 + (\gamma_{21} + \gamma_{22})r^2C(r)\mu_2 + r^2C(r) = 0,$$
$$\chi = \infty, \tag{47}$$

где μ_1, γ_{11}, γ_{12}, r, χ, $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ и μ_2, γ_{21}, γ_{22} определены выражениями (8), (9), (11) и (13) соответственно. Условия, соответствующие критерию устойчивости Льенара − Шипара, описываются соотношениями

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + (\chi - 1)^2\chi^{-1}(1 + \gamma_{11}\gamma_{12}^{-1})^{-2}\gamma_{11}\gamma_{12}^{-1}B^2(r) + (1 + \chi\gamma_{11}\gamma_{12}^{-1}) \times$$
$$\times \chi^{-1}(1 + \gamma_{11}\gamma_{12}^{-1})^{-1}\gamma_{11}\gamma_{12}rB(r)C(r) > 0, \qquad \chi \in (0, \infty), \tag{48}$$

$$rB(r) + \gamma_{12}(\gamma_{11} + \gamma_{12})r^2C(r) > 0, \qquad \chi = 0\,, \tag{49}$$

$$rB(r) + \gamma_{21}(\gamma_{21} + \gamma_{22})r^2C(r) > 0, \qquad \chi = \infty\,. \tag{50}$$

В соответствии с условиями (3), (13) и (14), очевидно, что неравенства (49), (50) выполняются при всех $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$. Учитывая соотношение (15), отсюда следует, что при $\chi = 0$ и $\chi = \infty$ наличие исчезающе малого трения в шарнирах обеих кромок $x = 0$ и $x = a$, определяемого соответственно коэффициентами γ_1, γ_2, не приводит к эффекту дестабилизации.

Легко показать, что соотношение (48) при исчезающе малом трении γ_1, γ_2 запишется в виде, тождественном соотношению (22). А это означает, что при наличии исчезающе малого трения γ_1, γ_2 поведение возмущенной системы такое же, как и при отсутствии трения ($\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$) изначально. Следовательно, наличие исчезающе малого трения в шарнирах обеих кромок $x = 0$ и $x = a$, определяемого коэффициентами γ_1, γ_2 соответственно, не приводит к эффекту дестабилизации, в отличие от случаев, когда учитывалось исчезающе малое трение только в одном из шарниров ($\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$ или $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$), рассмотренных в **п. *2.2***. Кроме того, аналитические исследования, подтвержденные численными расчетами, показали, что при больших значениях γ_1, γ_2, начиная, примерно, с $\gamma_{i,j} \approx 0.3$, $i, j = 1, 2$, условие устойчивости (48) выполняется при всех χ. Тем самым, при больших γ_1, γ_2 имеет место стабилизация.

Таким образом, наличие исчезающе малых значений трения γ_1 и γ_2 не влияет на поведение возмущенного движения: оно такое же, как и при отсутствии трения изначально. При больших значениях γ_1 и γ_2 имеет место стабилизация.

3.3. Пусть $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$. При этом характеристические уравнения (10), (12) запишутся в виде

$$\chi A(r)\mu_1^4 + (\chi\beta_{11}A(r) + \gamma_{12}rB(r))\mu_1^3 + (1 + \chi + \beta_{11}\gamma_{12})rB(r)\mu_1^2 + (\beta_{11}rB(r) + \\ + \gamma_{12}r^2C(r))\mu_1 + r^2C(r) = 0, \qquad \chi \in (0, \infty)\,, \tag{51}$$

$$\gamma_{12}rB(r)\mu_1^3 + (1 + \beta_{11}\gamma_{12})rB(r)\mu_1^2 + (\beta_{11}rB(r) + \gamma_{12}r^2C(r))\mu_1 + r^2C(r) = 0\,, \\ \chi = 0\,, \tag{52}$$

$$\beta_{21}A(r)\mu_2^3 + (1 + \beta_{21}\gamma_{22})rB(r)\mu_2^2 + (\beta_{21}rB(r) + \gamma_{22}r^2C(r))\mu_2 + r^2C(r) = 0\,, \\ \chi = \infty\,. \tag{53}$$

Здесь μ_1, β_{11}, γ_{12}, r, χ, $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ и μ_2, β_{21}, γ_{22} определены выражениями (8), (9), (11) и (13) соответственно. Условия, соответствующие критерию устойчивости Льенара − Шипара, описываются соотношениями

$$(B^2(r) - A(r)C(r))\,(\chi^2A(r) + (1 + \chi)\,\beta_{11}^{-1}\gamma_{12}rB(r) + \chi\beta_{11}^{-2}\gamma_{12}^2r^2C(r)) + \\ + \beta_{11}^{-1}\gamma_{12}(\chi - 1)^2A(r)rB(r)C(r) + \beta_{11}\gamma_{12}(B^2(r) + \\ + \beta_{11}^{-1}\gamma_{12}rB(r)C(r))(\chi A(r) + \beta_{11}^{-1}\gamma_{12}rB(r)) > 0, \quad \chi \in (0, \infty)\,, \tag{54}$$

$$(1 + \beta_{11}\gamma_{12})rB(r) + \gamma_{12}^2r^2C(r) > 0, \qquad \chi = 0\,, \tag{55}$$

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + \beta_{21}^{-1}\gamma_{22}rB(r)C(r) + \gamma_{22}(\beta_{21}B^2(r) + \gamma_{22}rB(r)C(r)) > 0\,, \\ \chi = \infty\,. \tag{56}$$

Согласно обозначениям (8) из условий (3) и (14) очевидно следует, что неравенство (55) выполняется при всех β_1 и γ_2. Учитывая соотношение (15), отсюда следует, что при $\chi = 0$ наличие исчезающе малого трения β_1 и γ_2 соответственно в шарнирах кромок $x = 0$ и $x = a$ пластинки не приводит к эффекту дестабилизации.

При исчезающе малом трении β_1 и γ_2 соотношения (54), (56) запишутся в виде

$$(B^2(r) - A(r)C(r))(\chi^2 A(r) + (1+\chi)rB(r) + \chi r^2 C(r)) +$$

$$+ (\chi - 1)^2 A(r)rB(r)C(r) > 0, \qquad \chi \in (0, \infty), \tag{57}$$

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + rB(r)C(r) > 0, \qquad \chi = \infty. \tag{58}$$

При $\chi = 1$ неравенство (57) тождественно неравенству (22) в силу условий (14). Отсюда, в соответствии с соотношениями (16) и (23), следует, что и в этом случае при $\chi = 1$ эффект дестабилизации отсутствует.

Проведенные аналитические исследования, подтвержденные численными расчетами, показали следующее. Примерно при всех $\chi \in [0.46, 1) \cup \cup (1, 2.18]$ наличие исчезающе малого трения, определяемого коэффициентами β_1 и γ_2, приводит к флаттерной неустойчивости. В соответствии с соотношениями (15), (17) и (18), отсюда следует, что при всех $\chi \in [0.46, 1) \cup \cup (1, 2.18]$ имеет место эффект дестабилизации, который наиболее ярко наблюдается при $\chi \in [0.46, 0.6) \cup (1.66, 2.18]$: возмущенное движение пластинки, являясь устойчивым в предположении отсутствия конструкционного трения изначально, становится неустойчивым при наличии трения, определяемого коэффициентами β_1 и γ_2. При $\chi \in [0.6, 1) \cup (1, 1.66]$ наличие исчезающе малого трения, определяемого коэффициентами β_1 и γ_2, приводит к конечному скачкообразному падению значений критической скорости потока (18), найденных в предположении отсутствия трения изначально. При $\chi \in [0, 0.46) \cup (2.18, \infty)$ и $\chi = \infty$ эффект дестабилизации отсутствует, в отличие от случаев, когда $\beta_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$ и $\beta_1 = 0$ и $\gamma_2 \neq 0$, соответственно при всех $\chi \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $\chi = \infty$ и $\chi \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ эффект дестабилизации имеет место. Кроме того, аналитические исследования, подтвержденные численными расчетами, показали, что при больших значениях β_1 и γ_2 ($\beta_{i,1}, \gamma_{i,2} \geq 0.3$, $i = 1, 2$) условия устойчивости (57), (58) при всех $\chi \in (0, \infty)$ и $\chi = \infty$ выполняются, т. е. имеет место стабилизация.

В табл. 3 приведены значения критической скорости потока V_{cr} для нескольких значений χ из промежутка $[0.6, 1.66]$ при исчезающе малом трении в шарнирах, определяемом коэффициентами β_1 и γ_2.

Таблица 3

χ	1.0	0.9	0.71	0.66	0.6	1.1	1.41	1.55	1.66
$V_{\text{cr}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	170.95	172.14	184.44	193.07	203.59	171.94	185.68	196.59	207.59

Из сопоставления значений критических скоростей потока V_{cr}, приведенных в табл. 1 и табл. 3 при соответствующих $\chi \in [0.6, 1.66]$, следует, что наиболее ярко в указанном интервале эффект дестабилизации наблюдается при $\chi_1 = 0.6$ и $\chi_2 = 1.66$. Для этих величин χ падение критической скорости потока достигает значений

$$\Delta V^3_{1\ \text{cr}} \approx 98.42\, D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}, \quad \chi = 0.6, \quad \beta_1 \to 0, \quad \gamma_2 \to 0\,,$$

$$\Delta V^3_{2\ \text{cr}} \approx 94.42\, D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}, \quad \chi = 1.66, \quad \beta_1 \to 0, \quad \gamma_2 \to 0\,. \qquad (59)$$

Далее, из сопоставления значений критических скоростей потока V_{cr}, приведенных в табл. 2, 3 при соответствующих $\chi \in [0.6, 1.66]$, следует, что эффект дестабилизации наиболее ярко выражен при $\beta_1 \to 0$, $\gamma_2 \to 0$. При этом, в соответствии с выражениями (44) и (59), разность в падении критической скорости флаттера $\Delta V_{\text{cr}}^{(3)\max} - \Delta V_{\text{cr}}^{(1)\max}$ составляет при $\chi = 0.6$ и $\chi = 1.66$ соответственно приблизительно $60.08\, D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$ и $56.08\, D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$.

В силу симметричности рассматриваемой задачи к аналогичному результату приводит исследование случая, когда $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ $(\beta_1 = \gamma_2 = 0)$.

Отметим, что при исчезающе малом трении, определяемом коэффициентами β_1 и γ_2 или β_2 и γ_1, интервал неустойчивости $\chi \in [0, 0.46) \cup \cup (2.18, \infty)$ шире, чем в остальных рассмотренных случаях, когда интервал неустойчивости такой же, как и при отсутствии трения изначально: $\chi \in [0.6, 1.66]$.

Заключение. Таким образом, наличие только одного из видов трения в шарнире одной из кромок $x = 0$ или $x = a$ приводит при всех $\chi \in (0, 1) \cup \cup (1, \infty)$ к эффекту дестабилизации при достижении скоростью потока значения $V_* \approx 170.95 D(a_0\rho_0 \ell^3)^{-1}$, не зависящего от значения коэффициента соответствующего вида трения.

При наличии одновременно обоих видов трения β_1, γ_1 $(\beta_2 = \gamma_2 = 0)$ или β_2, γ_2 $(\beta_1 = \gamma_1 = 0)$ в шарнире одной из кромок $x = 0$ или $x = a$ соответственно поведение возмущенного движения такое же, как и при наличии только одного из видов трения в одном из шарниров.

Наличие исчезающе малого трения в шарнире кромок $x = 0$ и $x = a$, определяемого соответственно коэффициентами γ_1 и γ_2 $(\beta_1 = \beta_2 = 0)$, не приводит к эффекту дестабилизации.

В случаях, когда $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$ $(\gamma_1 = \gamma_2 = 0)$ и $\beta_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$ $(\beta_2 = \gamma_1 = 0)$, или $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ $(\beta_1 = \gamma_2 = 0)$, наличие исчезающе малого трения приводит к эффекту дестабилизации при всех $\chi \in [0.6, 1.66]$ и $\chi \in [0.46, 1) \cup (1, 2.18]$ соответственно. При этом наиболее ярко эффект дестабилизации наблюдается при наличии пар различных видов исчезающе малого трения β_1, γ_2 или β_2, γ_1 в шарнире кромок $x = 0$ и $x = a$ пластинки соответственно.

При достаточно больших значениях коэффициентов трения в случаях, представленных парами β_1 и β_2, γ_1 и γ_2, β_1 и γ_2, β_2 и γ_1, имеет место стабилизация.

Во всех рассмотренных случаях наличие исчезающе малого трения при $\chi = 1$ не влияет на поведение возмущенного движения пластинки − оно такое же, как и при отсутствии трения изначально. Это, в соответствии с обозначениями (3) и (9), означает, что при равенстве значений сосредоточенных инерционных моментов поворота J_1 и J_2, приложенных, соответственно к шарнирно закрепленным кромкам $x = 0$ и $x = a$, во всех рассмотренных случаях наличие исчезающе малого трения не приводит к эффекту дестабилизации.

1. *Белубекян М. В., Казарян К. Б., Мартиросян С. Р.* Модельные задачи учета трения для консольной балки со следящей нагрузкой // Докл. НАН Армении. 2007. – **107**, № 2. – С. 167–172.
2. *Белубекян М. В., Мартиросян С. Р.* Флаттер пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенной массы на кромках // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 3. – С. 162–167.
3. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости. – Москва: Физматгиз, 1961. – 340 с.
4. *Жинжер Н. И.* О дестабилизирующем влиянии трения на устойчивость неконсервативных упругих систем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 3. – С. 44–49.
5. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, № 6. – С. 733–755.
6. *Кириллов О. Н.* Парадокс дестабилизации // Докл. РАН. – 2004. – **395**, № 5. – С. 614–620.
7. *Кириллов О. Н., Сейранян А. П.* Влияние малого внутреннего и внешнего трения на устойчивость распределенных неконсервативных систем // Прикл. математика и механика. – 2005. – **69**, № 4. – С. 584–611.
8. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.
9. *Пановко Я. Г., Сорокин С. В.* О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 5. – С. 135–139.
10. *Ржаницын А. Р.* Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1985. – **38**, № 5. – С. 33–44.
11. *Bolotin V. V., Zhinzher N. I.* Effects of damping on stability of elastic systems subjected to non-conservative forces // Int. J. Solids Struct. – 1969. – **5**, No. 9. – P. 965–989.
12. *Kounadis A. N.* On the paradox of the destabilizing effect of damping in non-conservative systems // Int. J. Non-Linear Mech. – 1992. – **27**, No. 4. – P. 597–609.
13. *Herrmann G., Jong I. C.* On nonconservative stability problems of elastic systems with slight damping // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1966. – **33**, No. 1. – P. 125–133.
14. *Hervé B., J.-J. Sinou, Mahé H., Jézéquel L.* Extension of the destabilization paradox to limit cycle amplitudes for a nonlinear self-excited system subject to gyroscopic and circulatory actions // J. Sound Vib. – 2009. – **323**, No. 3-5. – P. 944–973.
15. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing.-Arch. – 1952. – **20**, No. 1. – P. 49–56.

ПРО ДЕСТАБІЛІЗУЮЧИЙ ВПЛИВ КОНСТРУКЦІЙНОГО ТЕРТЯ В ОПОРАХ НА СТІЙКІСТЬ ПЛАСТИНКИ У НАДЗВУКОВОМУ ПОТОЦІ ГАЗУ

На прикладі шарнірно закріпленої вздовж довгих країв тонкої пружної подовженої пластинки, яка обтікається надзвуковим потоком газу, досліджується ефект дестабілізації при різних моделях конструкційного тертя у шарнірах за припущення наявності зосереджених інерційних моментів на закріплених краях. Встановлено зв'язок між характеристиками власних коливань шарнірно закріпленої пластинки і швидкості потоку газу, який дозволяє зробити деякі висновки про стійкість збуреного руху пластинки залежно від вибраної моделі конструкційного тертя. Для різних моделей конструкційного тертя в опорах знайдено критичну швидкість потоку газу, яка призводить до флатерної нестійкості.

ON DESTABILIZING EFFECT OF CONSTRUCTIONAL FRICTION IN SUPPORTS ON THE PLATE STABILITY IN SUPERSONIC GAS FLOW

On the example of a hinged along the long edges of a thin elastic elongated plate, streamlined by supersonic gas flow, the effect of destabilization for different models of constructional friction in the hinges under the assumption of the presence of concentrated inertial moments on fixed edges is investigated. The relationship between the characteristics of natural oscillations of the hinged plate and gas flow rate is established which allows to draw some conclusions about the stability of the perturbed motion of the plate depending on the chosen model of constructional friction. The critical gas flow rate, which causes flattered instability, is found for different models of constructional friction in the supports.

Ин-т механики
НАН Армении, Ереван, Армения

Получено
22.10.12