

МОДЕЛЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА ВРАХУВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Виконано огляд стану досліджень в галузі радіаційної термомеханіки тіл різної прозорості відносно теплового випромінювання. На модельній задачі для опромінюваного термочутливого шару на основі запропонованої методики розв'язування нелінійних задач теплопереносу та термопружності, що базується на методі скінченних елементів, досліджено вплив термочутливості теплофізичних, механічних і радіаційних характеристик на напруження у частково прозорих і непрозорих тілах.

Теплове опромінення як спосіб термообробки виробів знаходить широке застосування у сучасних технологіях з огляду на безконтактну передачу енергії, простоту в його реалізації та можливість отримання рівномірного за інтенсивністю поля опромінення на певній частині чи всій поверхні, а для виробів з окремих матеріалів – введення енергії углиб тіла [9]. Елементи конструкцій і приладів, особливо в космічній та авіаційній техніці, ядерній і хімічній енергетиці, можуть перебувати під впливом теплового опромінення чи високотемпературного нагріву під час експлуатації. У таких умовах змінюються з температурою характеристики матеріалу (проявляється термочутливість), процеси поглинання і випромінювання теплової енергії істотно впливають на тепловий, і як наслідок, на термонапружений стан згаданих виробів та елементів. Ці процеси можуть бути описані лише з урахуванням взаємодії досліджуваного тіла з оточуючим середовищем (зокрема, іншими тілами) при теплообміні випромінюванням. Взаємодіючі нагріті тіла, які є джерелом теплового випромінювання (яке включає область спектра від ультрафіолетової до далекої інфрачервоної довжини хвиль, $0.4 \div 1000$ мкм), виготовлені з різних матеріалів, можуть істотно відрізнятися своїми радіаційними властивостями, зокрема прозорістю [12, 22, 41]. Непрозорість (повне поглинання енергії випромінювання у тонкому приповерхневому шарі порядку $100 \div 1000$ ангстрем) є характерною для металевих матеріалів, а часткова прозорість (на відстанях від часток міліметра і більших) – для неметалевих.

Дія теплового випромінювання на тіло визначається особливостями поширення та поглинання у ньому як зовнішнього випромінювання (від оточуючих тіл), так і власного, випроміненого в тілі. Поглинання і випромінювання теплової енергії тілами залежно від їх прозорості має поверхневий чи об'ємний характер (характеризується відповідно тепловими потоками на поверхні чи об'ємними тепловиділеннями [6, 7, 22]) і впливає на протікання у таких тілах взаємозв'язаних теплових і механічних процесів. Тому фактори впливу випромінювання повинні бути враховані при постановці крайових задач термопружності, зокрема, при формулюванні граничних умов, на основі яких можна дослідити термонапружений стан тіла за реальних теплових навантажень.

Побудова моделей термомеханіки для непрозорих і частково прозорих тіл з урахуванням процесів випромінювання і поглинання теплової енергії (моделей радіаційної термомеханіки [7, 22]) ускладнена тим, що при визначенні зумовлених тепловим випромінюванням теплових потоків на поверхні чи об'ємних тепловиділень у розглядуваному тілі необхідно враховувати наявність оточуючих твердих тіл, їх тепловий стан, радіаційні властивості, геометрію і розміщення, а також радіаційні властивості середовища між тілами. Це вимагає моделювання процесів теплообміну випромінюванням у системах, які можуть містити тіла різної прозорості. Визначення теплового та термонапруженого станів розглядуваного тіла пов'язано з дослідженням теплового стану в системі тіл, які беруть участь у теплообміні.

У літературі розвинуто теорію теплообміну випромінюванням у замкненій системі непрозорих поверхонь з різними радіаційними властивостями, зокрема, за наявності між тілами поглинаючого і випромінюючого газового середовища [12, 41]. Така система для поверхні розглядуваного тіла утворена видимими частинами поверхонь інших тіл і відкритими областями, якими є поверхні, що не відбивають випромінювання або через які випромінювання джерела потрапляє в систему. Вона охоплює всі напрямки, які відходять від поверхні такого тіла. Теорія базується на методі балансу потоків теплового випромінювання в системі (методі сальдо). За його допомогою можна сформулювати теплові граничні умови на поверхнях тіл системи за складного теплообміну, зумовленого конвекцією, випромінюванням і поглинанням теплової енергії. За такого підходу в роботах [5, 20] досліджено тепловий, а в [3, 4] – тепловий і термонапружений стан у конкретних системах тіл з непрозорими поверхнями.

Розвинуто також теорію і методи дослідження радіаційного теплообміну в замкнених системах (оточених ізотермічними непрозорими поверхнями із заданими радіаційними випромінювальними і відбивальними властивостями), заповнених теплопровідним, поглинаючим, випромінюючим та розсіюючим частково прозорим середовищем (газоподібним, рідким або твердим) [22, 47]. З використанням наближення сірого тіла, коефіцієнти поглинання, розсіювання та відбивання якого не залежать від довжини хвилі, отримано розв'язки ряду одновимірних (за просторовою координатою) задач про тепловий стан тіл канонічної форми, зокрема, твердих: шару [44, 51, 56], циліндра [33, 37] і кулі [34, 54] за врахування випромінювання і поглинання теплової енергії. Оцінено їх вплив залежно від температури і радіаційних властивостей поверхні(хонь) і поглинальних властивостей середовища. Слід зауважити, що для однорідних твердих тіл характерним є молекулярне розсіювання, яким можна знехтувати [1]. Тепловий стан поглинаючого та випромінюючого сірого шару за умов дії зовнішнього теплового випромінювання і конвективного теплообміну досліджено в роботах [48, 49]. Аналогічні дослідження для твердого шару (пластини) за моделювання коефіцієнта поглинання двома спектральними смугами (часткової прозорості та непрозорості – модель зі смугою непрозорості) проведено в працях [43, 45, 50 та ін.], а для шаруватих частково прозорих пластин – у [42, 46, 53, 55].

Оскільки теплоперенос у частково прозорих тілах (зокрема, опромінюваних) за точної постановки задачі (врахування поглинання і випромінювання теплової енергії, спектральної залежності поглинальних характеристик) описується інтегральними і нелінійними інтегро-диференціальними рівняннями, то при його дослідженні історично використовували різні спрощені моделі. Крім згаданого наближення сірого тіла, розглядали наближення не-випромінюючого (холодного) тіла [12, 19], коли нехтується власним випромінюванням теплової енергії, а також наближення радіаційної теплопровідності (дифузійне чи Росселанда), коли інтегро-диференціальне рівняння теплопереносу зводять до диференціального рівняння, яке відображає гіпотезу Фур'є теплопровідності [12, 30, 38, 46].

Дослідження теплопереносу в точній постановці особливо інтенсифікувалися в останнє десятиліття [23, 31, 40, 46, 52] з огляду на розвиток обчислювальних методів і можливостей обчислювальної техніки. Вони стимулювалися також широким використанням в сучасній електроніці, інфрачервоній техніці та інших галузях нових частково прозорих матеріалів, зокрема скляних і керамічних [35, 46]. Однак до цього часу в літературі не вироблено єдиного підходу щодо врахування ефектів випромінювання при дослідженні нагріву чи охолодження частково прозорих тіл. Про це свідчать публікації [35, 39, 46], у яких числові розрахунки співставляються з результатами експериментальних вимірювань. Така неоднозначність пов'язана як з проблемами врахування термочутливості теплофізичних характеристик ма-

теріалів і визначення їх радіаційних характеристик, так і способами моделювання процесів теплопереносу. Від цих факторів суттєво залежить подальша оцінка напруженого стану тіл, проведеного на основі співвідношень моделей радіаційної термомеханіки.

Окремий клас задач теорії теплообміну випромінюванням і радіаційної термомеханіки присвячений дослідженню нагріву та термомеханічної поведінки тіл різної прозорості за теплового опромінення від високотемпературного джерела. При постановці таких задач, як правило, вплив зовнішнього випромінювання окреслюють на поверхні заданим розподілом інтенсивності падаючого випромінювання [6, 7, 9]. Вигляд функції, яка описує такий розподіл, встановлюють залежно від часових, енергетичних і спектральних характеристик реального джерела випромінювання і його розміщення відносно тіла. Цю інтенсивність падаючого випромінювання використовують при встановленні потоку поглинутого випромінювання в теплових крайових умовах для непрозорого тіла або в крайовій умові балансу потоків випромінювання – для частково прозорого тіла. Часто при вивченні режимів нагріву тепловим випромінюванням тіл розподіл інтенсивності випромінювання від джерела на поверхні вважають рівномірним [7, 32, 36].

Слід зауважити, що при дослідженні нагріву частково прозорих тіл здебільшого використовують наближення невипромінюючого матеріалу, вважаючи, що температура джерела випромінювання істотно перевищує температуру в розглядуваному опромінюваному тілі при нагріві. За такого припущення розроблено варіанти теорії механотермодифузії у частково прозорих тілах з домішками [7], термомеханіки частково прозорих тіл, зокрема, тіл з порожнинами [2, 10, 24], термомеханіки плоскошаруватих тіл (пластин) зі складовими різної прозорості [26, 27].

Інколи теплообмін випромінюванням непрозорого тіла з оточуючим середовищем спрощено враховують у крайовій умові, що описує випромінювання і поглинання на його поверхні за законом Стефана – Больцмана з використанням узагальненого коефіцієнта випромінювання [17, 21]. Така умова передбачає теплообмін випромінюванням між розглядуваним тілом зі змінною в часі температурою поверхні та іншим непрозорим тілом, температура якого підтримується постійною. Коефіцієнт випромінювання визначається геометрією тіл і їх взаємним розміщенням, ступенями чорноти їх поверхонь і відбивальними властивостями [6].

Таким чином, з наведеного огляду літературних джерел випливає, що на сьогодні розвиток моделей радіаційної термомеханіки тіл різної прозорості вимагає аналізу із залученням експериментальних даних наявних підходів до опису процесів випромінювання і поглинання теплової енергії в тілах з різними радіаційними властивостями та дослідження застосування наближених моделей теплопереносу при постановці задач термомеханіки для термочутливих тіл різної прозорості відносно теплового випромінювання при їх нагріві та охолодженні. Такі дослідження на основі розроблених методик розв'язування нелінійних задач теплопереносу частково проведені в роботах [6, 8, 25].

З огляду на практичну потребу прогнозування термомеханічної поведінки елементів конструкцій і приладів, що перебувають в умовах теплообміну випромінюванням з оточуючим середовищем (зокрема, за цільового опромінення), також виникає необхідність постановки задач про теплоперенос і термонапружений стан у системах, що містять тіла різної прозорості, та розробки методик їх розв'язування.

У цій статті на модельній задачі для опромінюваного термочутливого шару на основі запропонованої методики розв'язування нелінійних задач теплопереносу та термопружності, яка базується на методі скінченних елементів, досліджено вплив термочутливості теплофізичних, механічних і радіаційних характеристик на напруження у частково прозорих і непрозорих тілах.

Розглянемо, як і в [6], частково прозорий нескінченний шар товщини h з дифузно відбиваючими поверхнями (коли відбивальні характеристики не залежать від напрямку), на поверхню $z = 0$ якого (вісь z направлена по нормалі до шару) падає дифузний (рівномірний за напрямками) спектральний потік теплового випромінювання від джерела з постійною температурою T_s . Інтенсивність такого потоку згідно з [6, 7] можна подати у вигляді $I_\lambda^{(e)} = kI_{\lambda b}(\lambda, T_s)$, $k = \text{const}$, де λ – довжина хвилі теплового випромінювання, $I_{\lambda b}(\lambda, T)$ – спектральна інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла [12, 41]. Коефіцієнт k характеризує енергетичні параметри джерела. Область зовнішнього середовища $z < 0$ – повітря, яке вважаємо прозорим для випромінювання (непоглинаючим), а область $z > h$ приймаємо в наближенні вакууму. Поверхні $z = 0$, $z = h$ шару вільні від силового навантаження, а його краї $x, y \rightarrow \pm \infty$ закріплені одним із відомих способів [7, 14]. Початкову $T(z, 0)$ температуру шару і температуру T^{ext} повітря вважаємо сталими і рівними T_0 .

Визначення теплового стану опромінюваного поглинаючого і випромінюючого шару зводимо до розв'язування одновимірного за координатою z рівняння теплопереносу [6]

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q = \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

за таких граничних і початкової умов:

$$\alpha \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = \alpha_s [T(0, t) - T_0], \quad \alpha \frac{\partial T(h, t)}{\partial z} = 0, \quad T(z, 0) = T_0. \quad (2)$$

Тут враховано, що коефіцієнти теплопровідності α та теплоємності c_ε , а також густину ρ для частково прозорих тіл (які є неметалами), відповідно до відомих фізичних уявлень, можемо вважати нетермочутливими за температур, вищих від температур Дебая (не перевищують 300 К) [6, 28]. Зауважимо, що коефіцієнт тепловіддачі α_s , згідно з його означенням в теорії конвективного теплообміну, залежить лише від характеристик поверхні тіла та оточуючого середовища, але не від температури поверхні [11, 15].

Теплові джерела Q у рівнянні (1) зумовлені поглинанням при переносі енергії теплового випромінювання і її випроміненням у тілі.

Будемо вважати, що показник заломлення n_λ і коефіцієнт відбивання R_λ є постійними і не залежать від довжини хвилі ($n_\lambda = n$, $R_\lambda = R$), а коефіцієнт поглинання a_λ з урахуванням особливостей його значень у різних спектральних діапазонах апроксимуємо кусково-сталою функцією [6, 8]

$$a_\lambda = \begin{cases} a_1, & 0 < \lambda \leq \lambda_{\text{th}}, \\ a_2, & \lambda_{\text{th}} < \lambda \leq \lambda_{\text{max}}, \\ a_3, & \lambda_{\text{max}} < \lambda \leq \infty, \end{cases} \quad (3)$$

де λ_{th} – порогова довжина хвилі, λ_{max} – верхня межа діапазону оптичних вимірювань. Тоді для тепловиділень отримаємо такий вираз:

$$\begin{aligned} Q(z, t) = 2n^2\sigma \left\{ k \sum_{i=1}^3 a_i F_i(T_s) C_i(z) T_s^4 - 2 \sum_{i=1}^3 a_i F_i(T(z, t)) T^4(z, t) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^3 a_i^2 F_i(T(z, t)) \left[\int_0^z D_i(z-z_*) T^4(z_*, t) dz_* + \int_z^h D_i(z_*-z) T^4(z_*, t) dz_* + \right. \right. \\ \left. \left. + G_i(z) \int_0^h \exp(-a_i z_*) T^4(z_*, t) dz_* \right] \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

де

$$C_i(z) = (1 + u_i m_i - R)E_2(a_i z) - (1 + u_i - R)v_* E_2\left(\frac{a_i z}{v_*}\right),$$

$$D_i(x) = a_i E_1(a_i x), \quad v_* = \cos \arcsin(1/n),$$

$$G_i(z) = \frac{u_i m_i}{1 - R} E_2(a_i z) + \frac{u_i}{1 - R} E_2(a_i (h - z)),$$

$$m_i = 2RE_3(a_i h), \quad u_i = \frac{R(1 - R)}{1 - m_i^2},$$

$$F_1(T_*) = F_{0-\lambda_{th}T_*}, \quad F_2(T_*) = F_{0-\lambda_{max}T_*} - F_{0-\lambda_{th}T_*}, \quad F_3(T_*) = 1 - F_{0-\lambda_{max}T_*},$$

$F_{0-\lambda T_*}$ – частка півсферичної інтегральної поверхневої густини потоку випромінювання абсолютно чорного тіла при температурі T_* в спектральному діапазоні $0 - \lambda$ [12]; σ – стала Стефана – Больцмана.

Тепловиділення $Q(z, t)$ містить три складові: лінійну, що окреслює поглинання зовнішнього випромінювання, нелінійну, пов'язану з випромінюванням шаром теплової енергії, та нелінійну інтегральну, пов'язану з поглинанням власного випромінювання. Отже, для визначення температури у шарі отримуємо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння. Нелінійність у ньому пов'язується з четвертим степенем температури.

Для опромінюваного аналогічним чином термочутливого відносно радіаційних і теплофізичних характеристик непрозорого шару з дифузно-сірими поверхнями (коли радіаційні характеристики не залежать від напрямку та довжини хвилі λ) температуру знаходимо з рівняння [6]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c_e(T) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (5)$$

Граничні умови на поверхнях $z = 0$, $z = h$, сформульовані на основі балансу теплових потоків з урахуванням потоків поглинутої $q^{(a)} = k\varepsilon(T)\sigma T_s^4$ енергії зовнішнього випромінювання і випроміненої $q^{(b)} = \varepsilon(T)\sigma T^4$ шаром теплової енергії, мають вигляд [6]

$$\begin{aligned} \alpha(T) \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} &= \alpha_s [T(0, t) - T_0] - [k\varepsilon(T)\sigma T_s^4 - \varepsilon(T)\sigma T^4(0, t)], \\ \alpha(T) \frac{\partial T(h, t)}{\partial z} &= -\varepsilon(T)\sigma T^4(h, t), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\varepsilon(T) = 1 - R(T)$ – ступінь чорноти поверхні. За середньоінтегрального на проміжку нагріву ступеня чорноти ($\varepsilon = \bar{\varepsilon} = \text{const}$) маємо $q^{(a)} = k\bar{\varepsilon}\sigma T_s^4$. В умовах (6) прийнято, що показник заломлення зовнішнього середовища $n_\lambda^{(e)} \approx 1$.

Однонаправлений спектральний ступінь чорноти поверхні непрозорих матеріалів (металів і їх сплавів) зростає з температурою [12, 13]. Він залежить не лише від довжини хвилі λ та напрямку, але також істотно залежить від чистоти (шорсткості) поверхні матеріалу. При дослідженні теплообміну випромінюванням, як правило, використовують інтегральний ступінь чорноти в напрямку нормалі, який означають таким чином:

$$\varepsilon_n(T) = \frac{\pi \int_0^\infty \varepsilon_{\lambda n}(T) I_{\lambda b}(T) d\lambda}{\sigma T^4}. \quad (7)$$

Це дозволяє при нехтуванні залежністю випромінення від напрямку подати потік випроміненої тілом теплової енергії в зовнішнє середовище (при $n_{\lambda}^{(e)} = n^{(e)}$) за законом Стефана – Больцмана $q^{(b)} = \varepsilon_n(n^{(e)})^2 \sigma T^4(z, t)$. Залежність від температури величини $\varepsilon_n(T)$ для металів можна оцінити на основі електромагнітної теорії за коефіцієнтом електропровідності r_e . Використовують такі залежності, які для чистих полірованих металів добре узгоджуються з експериментальними даними [12]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(T) &= \sigma T^4 (0.751 \sqrt{r_e(T)T} - 0.396 r_e(T)T), & 0 < r_e(T)T < 0.2, \\ \varepsilon_n(T) &= \sigma T^4 (0.698 \sqrt{r_e(T)T} - 0.266 r_e(T)T), & 0.2 < r_e(T)T < 0.5. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $r_e(T)$ – коефіцієнт електропровідності, що вимірюється в Ом·см, а T – у градусах К. Залежність $r_e(T)$ від температури можна описати лінійною функцією $r_e(T) \approx r_{e,273} T/273$, де $r_{e,273}$ – значення коефіцієнта електропровідності при 0° С.

Коефіцієнт теплопровідності α і теплоємність матеріалів c_ε непрозорих тіл теж є термочутливими і описуються за даними експерименту емпіричними поліноміальними співвідношеннями. Наприклад, для хромонікелевих аустенітних сталей маємо [5, 18]

$$\begin{aligned} \alpha &= 21.7 - 13.1\delta + (1.04\delta + 1) \cdot 1.06 \cdot 10^{-2} T - 0.018 \cdot 10^{-4} T^2 \text{ [Вт/(м·К)],} \\ c_\varepsilon &= 0.454 + 1.57 \cdot 10^{-4} T - 0.473 \cdot 10^{-2} T^{-2} \text{ [кДж/(кг·К)].} \end{aligned} \quad (9)$$

Тут δ – ступінь легування, а T – значення температури в К.

Таким чином, температуру у непрозорому опромінюваному шарі опи-суюмо квазілінійним рівнянням (5) з нелінійними граничними умовами (6), у яких характер нелінійності визначається залежністю випроміненої енергії від температури.

Термонапружений стан термочутливого шару при різній прозорості ви-значимо зі співвідношень квазістатичної незв'язаної задачі термопружності при нехтуванні силовими чинниками дії теплового випромінювання [6, 7]. Для частково прозорих тіл при об'ємному характері впливу таким силовим чинником є пондеромоторні (об'ємні) сили дії випромінювання, які врахову-ють у рівняннях рівноваги тіла. Для непрозорих тіл за поверхневого харак-теру впливу силовим чинником є світловий тиск, який розглядають як зовнішнє навантаження при формулюванні механічних граничних умов. Ви-хідні співвідношення термопружності сформулюємо відносно компонент тензора напружень $\sigma_{ii}(z, t)$, $i = x, y$, $\sigma_{zz}(z, t)$. За відсутності силового наван-таження на поверхнях шару вони мають вигляд [6]

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1 + \nu(T)}{E(T)} \sigma_{ii} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1 + \nu(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0) \right] = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad (10)$$

де $\varphi(T, T_0) = \int_{T_0}^T \alpha_t(T_*) dT_*$ – величина, що визначає чисто теплове розширен-ня, а $\alpha_t(T)$ – істинний коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу [14]; $\nu(T)$, $E(T)$ – коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга.

Рівняння (10) мають аналітичний розв'язок

$$\frac{1 + \nu(T)}{E(T)} \sigma_{ii} + \frac{1 + \nu(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0) = b_{1i} z + b_{2i}, \quad (11)$$

де сталі b_{1i} , b_{2i} визначаємо з умов закріплення країв при $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \pm\infty$.

Розглянемо такі варіанти закріплення країв.

1°. Вільні від зовнішніх зусиль і моментів країв:

$$\int_0^h \sigma_{xx} dz = \int_0^h \sigma_{yy} dz = 0, \quad \int_0^h \left(z - \frac{h}{2}\right) \sigma_{xx} dz = \int_0^h \left(z - \frac{h}{2}\right) \sigma_{yy} dz = 0.$$

Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} b_1 = b_3 &= (C_1 B_2 - A_2 C_2) \frac{1}{\Delta}, \quad b_2 = b_4 = (A_1 C_2 - C_1 B_1) \frac{1}{\Delta}, \quad \Delta = A_1 B_2 - A_2 B_1, \\ A_1 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} z dz, \quad A_2 = \int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} dz, \\ B_1 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} z \left(z - \frac{h}{2}\right) dz, \quad B_2 = \int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} \left(z - \frac{h}{2}\right) dz, \\ C_1 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0) dz, \quad C_2 = \int_0^h \frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \left(z - \frac{h}{2}\right) \varphi(T, T_0) dz, \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= -\frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0) + b_1 \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} z + b_2 \frac{E(T)}{1 + \nu(T)}. \end{aligned} \quad (12)$$

2°. Жорстке закріплення країв:

$$e_{xx} = e_{yy} = 0.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} b_1 = b_3 &= 0, \quad b_2 = b_4 = 0, \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= -\frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0). \end{aligned} \quad (13)$$

3°. Жорстке защемлення країв:

$$\int_0^h \sigma_{xx} dz = \int_0^h \sigma_{yy} dz = 0.$$

У цьому випадку отримуємо

$$\begin{aligned} b_1 = b_3 &= 0, \quad b_2 = b_4 = C_1/A_2, \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= -\frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0) + \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} \frac{\int_0^h \frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0) dz}{\int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} dz}. \end{aligned} \quad (14)$$

У наведені розрахункові формули (12)–(14) для напружень у шарі входять температура та залежні від неї функції, що виражають термочутливість механічних характеристик. Ці характеристики описуються на основі експериментальних даних конкретною аналітичною залежністю або таб-

лично. Оскільки вираз $\varphi(T, T_0) = \int_{T_0}^T \alpha_t(T_*) dT_*$ для лінійного температурного

розширення матеріалу містить коефіцієнт α_t під інтегралом, то в довідковій літературі наводять числові значення середнього коефіцієнта лінійного

температурного розширення $\alpha_T = \frac{\varphi(T, T_0)}{T - T_0}$ на вибраних з певним інтервалом

проміжках зміни температури.

Щодо термочутливості механічних характеристик тіл різної прозорості, то відомі з літератури експериментальні дані свідчать про те, що характер термочутливості величин ν , E , α_T є різний. Як для металів, так і для неметалів модуль Юнга E зменшується при зростанні температури, а коефіцієнт Пуассона ν і лінійного температурного розширення α_T – збільшують-

ся (див. рис. 1). Зміна з температурою величин E , α_T є істотною. У довідковій літературі переважно наводять значення цих величин лише за конкретних температур або середні значення на певних температурних інтервалах [16, 18, 29]. Інтерпольовані кубічними сплайнами температурні залежності ν , E , α_T для сталі X18H9T показано на рис. 1а – рис. 1в, а α_T для скла С95-3 – на рис. 1г.

Вище сформульовано одновимірні за координатою крайові задачі для визначення температури в шарах різної прозорості. Задача для частково прозорого шару включає нелінійне інтегро-диференціальне рівняння, яке містить нелінійності, пов'язані з четвертим степенем температури, зокрема, в підінтегральних виразах. Розроблено методику її розв'язування, що базується на методі скінченних елементів, із застосуванням лінеаризації нелінійних складових варіаційного рівняння при побудові однокрокової рекурентної схеми інтегрування за часом. На відміну від ітераційних схем, така методика дозволяє урівноважити похибку дискретизації за часом з похибкою лінеаризації та уникнути ітераційних процесів. Задача для непрозорого шару містить нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні граничні умови. Методика її розв'язування аналогічна до методики розв'язування задачі для частково прозорого шару, але в однокроковій рекурентній схемі при знаходженні розв'язку значення теплоємності c_ε розраховуємо через відоме значення c_ε у попередній момент часу.

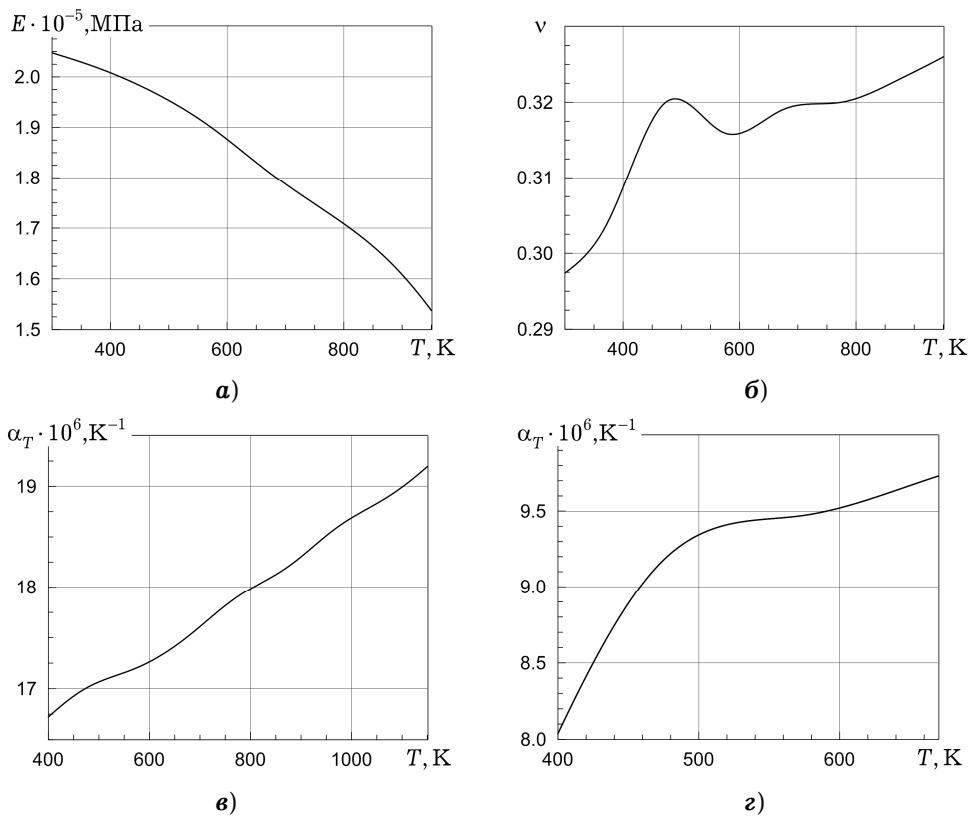


Рис. 1

Термонапружений стан шару можна визначити на основі співвідношень (12)–(14) шляхом числового інтегрування за відомих апроксимацій характеристик та знайденого (чисельно) розподілу температури у ньому.

За запропонованою методикою досліджено термонапружений стан у частково прозорому та непрозорому опроміюваних шарах. Початкову

температуру приймали рівною $T_0 = 300$ К. При числових розрахунках за матеріал частково прозорого шару вибрано скло С95-3 з наступними нетермочутливими теплофізичними та радіаційними характеристиками [8, 13, 29]:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.6 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), & \rho &= 2.63 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, & c_\epsilon &= 0.76 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \\ \alpha_s &= 26.4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}), & n &= 1.5, & R &= 0.02, \\ \lambda_{\text{th}} &= 2.73 \cdot 10^{-6} \text{ м}, & \lambda_{\text{max}} &= 5.0 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \\ a_1 &= 150 \text{ м}^{-1}, & a_2 &= 900 \text{ м}^{-1}, & a_3 &= 900 \text{ м}^{-1}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що значення коефіцієнта поглинання a_λ в діапазоні $\lambda > \lambda_{\text{max}}$ вибирали рівним значенню на межі діапазону вимірювання, тобто $a_3 = a_2$ [8].

Механічні характеристики – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона – приймали сталими, які дорівнюють середньоінтегральним на проміжку нагріву (до температури трансформації скла 700 К) [29]:

$$E = 0.654 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.215,$$

а температурну залежність середнього коефіцієнта лінійного температурного розширення апроксимували кубічними сплайнами (рис. 1з). Середньоінтегральне значення α_T до температури 700 К становить $\alpha_T = 8.79 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$.

За матеріал непрозорого шару вибрано сталь Х18Н9Т, густина якої $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, а теплофізичні характеристики змінюються з температурою згідно з (9) при $\delta = 0.529$. Залежність від температури ступеня чорноти $\epsilon(T)$ описували співвідношенням (8), де $r_{e,273} = 9.35 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Залежності модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона враховували згідно з апроксимаціями, наведеними на рис. 1а – рис. 1в. При цьому середньоінтегральні значення ϵ , E , ν до температури 1300 К становлять [18]

$$\begin{aligned} \epsilon &= 0.2, & E &= 1.77 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ \nu &= 0.312, & \alpha_T &= 17.5 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}. \end{aligned}$$

Інтенсивність $I_\lambda^{(e)}$ опромінення частково прозорого шару визначали за температур $T_s = 1300, 2000, 3000$ К. Коефіцієнт k вибирали так, щоб температура у шарі в усталеному температурному режимі не перевищувала 700 К. Потік $q^{(a)}$ поглинутої енергії на поверхні $z = 0$ непрозорого шару приймали середньоінтегральним до температури 1300 К.

Розподіл напружень $\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ у шарі товщини $h = 1$ см для випадку жорстко зацемлених країв (варіант 3°) при нагріві джерелом з температурою 1300 К ($k = 0.5$) для моментів часу $t = 30, 100, 180, 360$ с продемонстровано на рис. 2. Штрихові криві обчислено з урахуванням температурної залежності лінійного розширення, а суцільні криві – без урахування (при середньоінтегральному значенні α_T).

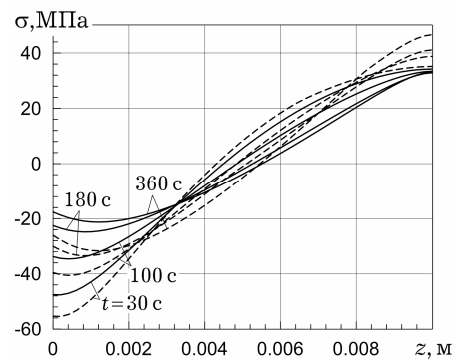


Рис. 2

Отримано, що максимальні розтягувальні напруження виникають на тильній поверхні шару, $z = h$, а максимальні стискувальні зміщуються з часом з лицевої поверхні ($z = 0$) до перерізу $z = 1$ мм (в усталеному температурному режимі, $t \geq 360$ с). Величина стискувальних і розтягувальних

напружень змінюється з часом, а максимуму досягає на початковій стадії нагріву ($t \leq 40$ с). Без урахування температурної залежності лінійного розширення отримуємо значні розбіжності при розрахунку температурних напружень, особливо на початковій стадії нагріву. Так, рівень максимальних розтягувальних напружень збільшується від 33 до 46 МПа, тобто на 35 %, а стискувальних – від 21 до 31 МПа, тобто на 50 %.

Зміну в часі напружень σ на поверхнях $z = 0$, $z = h$ жорстко защемленого непрозорого шару показано на рис. 3. Криві 1–3 відповідають значенням потоку поглинутої енергії $q^{(a)} = 16.1, 32.3, 67.7$ кВт/м² у граничній умові (6). Суцільні криві розраховано за врахування термочутливості всіх характеристик α , c_ϵ , ϵ , E , ν , α_T , штрихові криві – лише теплофізичних α , c_ϵ при середньоінтегральних значеннях механічних характеристик E , ν , α_T і ступеню чорноти ϵ , а штрихпунктирні криві розраховано для всіх середньоінтегральних значень характеристик. Отримано, що неврахування термочутливості приводить на початковій стадії нагріву до заниження рівня напружень (до 30 %), а в подальшому – до завищення (до 35 %).

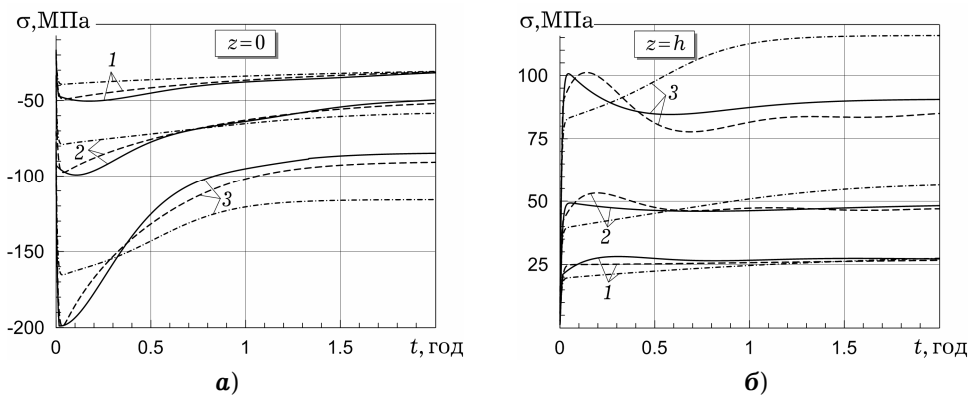


Рис. 3

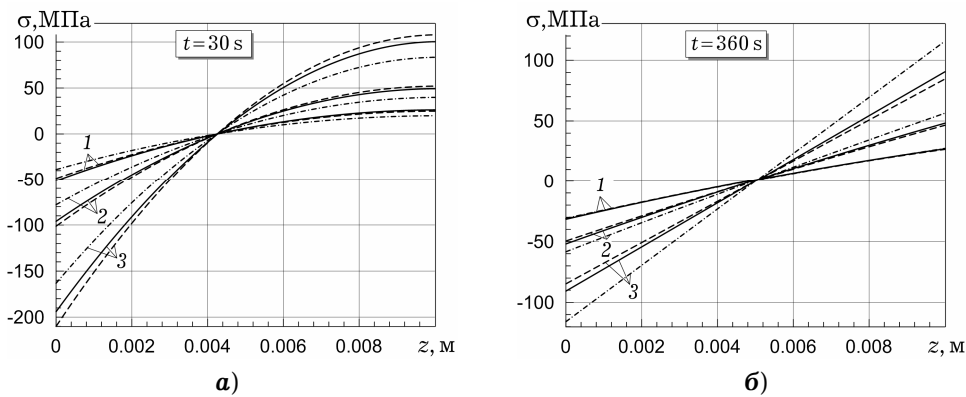


Рис. 4

Розподіли напружень по товщині шару на початковій стадії нагріву ($t = 30$ с) та в момент часу $t = 360$ с, що відповідає усталеному температурному режиму, показано на рис. 4а та рис. 4б. Позначення кривих такі ж, як і на рис. 3. Видно, що максимальні рівні розтягувальних напружень досягаються на тильній поверхні шару, $z = h$, а стискувальних – на лицевій, $z = 0$ (з боку опромінення). Неврахування термочутливості не впливає на характер розподілу напружень, але змінює їх рівні.

Робота виконана при підтримці НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (проект ВБ-РФФД/381, № держреєстрації 0113U002817).

1. Блох А. Г., Журавлев Ю. А., Рыжков Л. Н. Теплообмен излучением: Справочник. – Москва: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
2. Гачкевич А. Р. Термоупругость электропроводных тел, находящихся под воздействием электромагнитного излучения инфракрасного диапазона частот. – Львов, 1993. – 56 с. – (Препр. / АН Украины. Ин-т прикл. проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача; № 10-93.)
3. Гачкевич А. Р., Бойчук В. Я. Термомеханическое поведение неметаллических электропроводных тел при высокотемпературной обработке // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 1. – С. 74–79.
Te same: Gachkevich A. R., Boichuk V. Ya. Thermomechanical behavior of nonmetallic electrical conductors during high-temperature treatment // J. Math. Sci. – 1997. – **86**, No. 2. – P. 2585–2589.
4. Гачкевич А. Р., Бойчук В. Я. Термонапряженное состояние длинного цилиндра при нагреве тепловым излучением // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 4. – С. 18–23.
Te same: Gachkevich A. R., Boichuk V. Ya. Thermal stress of a long cylinder heated by thermal radiation // Int. Appl. Mech. – 1987. – **23**, No. 4. – P. 328–332.
5. Гачкевич А. Р., Малкиель Б. С., Сосновий Ю. Р., Терлецький Р. Ф. Математическое моделирование и исследование процесса теплообмена в цветных кинескопах // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 30. – С. 57–63.
Te same: Gachkevich A. R., Malkiel' B. S., Sosnovyi Yu. R., Terletskii R. F. Mathematical modeling and the study of the heat exchange process in color kinescopes // J. Sov. Math. – 1993. – **63**, No. 3. – P. 358–363.
6. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б. Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 202–219.
Te same: Hachkevych O. R., Terletskii R. F., Brukhal' M. B. Some problems of mathematical modeling in thermomechanics of bodies of various transparencies subjected to thermal irradiation // J. Math. Sci. – 2010. – **165**, No. 3. – P. 403–425.
7. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Курницький Т. Л. Механотермодифузія в частково прозорих тілах. – Львів: СПОЛЮМ, 2007. – 184 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 2.)
8. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Сосновий Ю. Р., Брухаль М. Б. Механічна поведінка охолоджуваних тіл з урахуванням випромінювання теплової енергії // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 42–50.
Te same: Hachkevych O. R., Terlets'kiyi R. F., Sosnovyi Yu. R., Brukhal' M. B. Mechanical behavior of cooled bodies with regard for the emission of heat energy // Mater. Sci. – 2010. – **46**, No. 1. – P. 47–55.
9. Григорьев Б. А. Импульсный нагрев излучениями: В 2 т. – Москва: Наука, 1974. – Т. 2. – 726 с.
10. Гуменчук О. Б. Термонапружений стан частково прозорих тіл з порожнинами за теплового опромінення: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2008. – 148 с.
11. Джалурія Й. Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. – Москва: Мир, 1982. – 400 с.
12. Зигель Р., Хауелл Дж. Теплообмен излучением. – Москва: Мир, 1975. – 935 с.
13. Излучательные свойства твердых материалов: Справочник / Под ред. А. Е. Шейдлина. – Москва: Энергия, 1974. – 471 с.
14. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
15. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. – Москва: Мир, 1983. – 512 с.
16. Лавриков Л. Н., Юрченко Ю. Ф. Тепловые свойства металлов и сплавов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 440 с.
17. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
18. Масленков С. Б., Масленкова Е. А. Стали и сплавы для высоких температур: Справ. изд.: В 2 кн. – Москва: Металлургия, 1991. – Кн. 1. – 383 с.
19. Петров В. А., Марченко Н. В. Перенос энергии в частично прозрачных твердых материалах. – Москва: Наука, 1985. – 192 с.
20. Попович В. С., Вовк О. М. Методика розв'язування задачі кондуктивно-променевого теплообміну між циліндричною та N -кутною призматичною оболонками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 1. – С. 158–168.

21. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Нелінійна прикладна термомеханіка. – Київ: НМЦ ВО МОНУ, 2000. – 280 с.
22. *Рубцов Н. А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 277 с.
23. *Рубцов Н. А., Тимофеев А. М., Саввинова Н. А.* Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. – 198 с.
24. *Терлецкий Р. Ф.* Термонапряженное состояние тел низкой электропроводности при воздействии электромагнитного излучения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Львов, 1988. – 216 с.
25. *Терлецкий Р. Ф., Турій О. П., Брухаль М. Б.* Задачи термомеханики для облучаемых тел // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – 4(50) – С. 30–37.
26. *Терлецкий Р. Ф., Турій О. П.* Термомеханічна поведінка пластини, складеної зі шарів різної прозорості, під тепловими променями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 6. – С. 17–26.
Te same: *Terlets'kyi R. F., Turii O. P.* Thermomechanical behavior of a plate composed of layers with different transparencies under the action of thermal radiation // Mater. Sci. – 2007. – 43, No. 6. – P. 769–779.
27. *Турій О. П.* Термонапружений стан шаруватих пластин за теплового опромінення: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2010. – 174 с.
28. *Уэрт Ч., Томсон Р.* Физика твердого тела. – Москва: Мир, 1966. – 568 с.
29. *Эсне В.* Технология электровакуумных приборов: В 3 т. – Москва: Энергия, 1968. – Т. 2. – 448 с.
30. *Anderson E. E., Viskanta R.* Effective thermal conductivity for heat transfer through semitransparent solids / J. Am. Ceram. Soc. – 1973. – 56, No. 10. – P. 541–546.
31. *Asllanaj F., Jeandel G., Roche J. R.* Numerical solution of radiative transfer equation coupled with nonlinear heat conduction equation // Int. J. Numer. Method Heat Fluid Flow. – 2001. – 11, No. 5. – P. 449–472.
32. *Burka A. L., Likhanskii P. M.* Transient radiative-conductive heating of plexiglas // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 2001. – 42, No. 3. – P. 469–474.
Te same: *Бурка А. Л., Лиханский П. М.* Нестационарный радиационно-кондуктивный нагрев органического стекла // Прикл. механика. и техн. физика. – 2001. – 42, № 3. – С. 101–106.
33. *Chang Yan-Po, Smith R. S. (Jr.)* Steady and transient heat transfer by radiation and conduction in a medium bounded by two coaxial cylindrical surfaces // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1970. – 13, No. 1. – P. 69–80.
34. *Chu H.-S., Weng L.-C.* Transient combined conduction and radiation in anisotropically scattering spherical media // J. Thermophys. Heat Transfer. – 1992. – 6, No. 3. – P. 553–556.
35. *Coquard R., Rochais D., Baillis D.* Experimental investigations of the coupled conductive and radiative heat transfer in metallic/ceramic foams // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2009. – 52, No. 21–22. – P. 4907–4918.
36. *Fan Tai-His, Fedorov A. G.* Radiative transfer in a semitransparent hemispherical shell // J. Quant. Spectrosc. RA. – 2002. – 73, No. 2–5. – P. 285–296.
37. *Fernandes R., Francis J.* Combined conductive and radiative heat transfer in an absorbing, emitting, and scattering cylindrical medium // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 1982. – 104, No. 4. – P. 594–601.
38. *Kong Hoon Lee, Viskanta R.* Two-dimensional combined conduction and radiation heat transfer: comparison of the discrete ordinates method and the diffusion approximation methods // Numer. Heat Transfer. Part A. – 2001. – 39, No. 3. – P. 205–225.
39. *Lazard M. André S., Maillet D.* Diffusivity measurement of semi-transparent media: model of the coupled transient heat transfer and experiments on glass, silica glass and zinc selenide // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2004. – 47. – P. 477–487.
40. *Linden B. J. van der, Mattheij R. M. M.* A new method for solving radiative heat problems in glass // Int. J. Forming Processes. – 1999. – 2, No. 1–2. – P. 41–61.
41. *Modest M. F.* Radiative heat transfer. – New York: Acad. Press, 2003. – 822 p.
42. *Muresan C., Vaillon R., Menezo C., Morlot R.* Discrete ordinates solution of coupled conductive radiative heat transfer in a two-layer slab with Fresnel interfaces subject to diffuse and obliquely collimated irradiation // J. Quant. Spectrosc. RA. – 2004. – 84, No. 4. – P. 551–562. .
43. *Ping T. H., Lallemand M.* Transient radiative-conductive heat transfer in flat glasses submitted to temperature, flux and mixed boundary conditions // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1989. – 32, No. 5. – P. 795–810.

44. Schwander D., Flamant G., Olalde G. Effects of boundary properties on transient temperature distributions in condensed semitransparent media // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1990. – **33**, No. 8. – P. 1685–1695.
45. Sharbati E., Safavisohi B., Aghanajafi C. Transient heat transfer analysis of a layer by considering the effect of radiation // *J. Fusion Energy*. – 2004. – **23**, No. 3. – P. 207–215.
46. Siedow N., Grosan T., Lochehgnies D., Romero E. Application of a new method for radiative heat transfer to flat glass tempering // *J. Am. Ceram. Soc.* – 2005. – **88**, No. 8. – P. 2181–2187.
47. Siegel R. Transient effects of radiative transfer in semitransparent materials // *Int. J. Eng. Sci.* – 1998. – **36**, No. 12–14. – P. 1701–1739.
48. Siegel R. Transient heat transfer in a semitransparent radiating layer with boundary convection and surface reflections // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1996. – **39**, No. 1. – P. 69–79.
49. Siegel R. Two-flux method for transient radiative transfer in a semitransparent layer // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1996. – **39**, No. 5. – P. 1111–1115.
50. Su M-H., Sutton W. H. Transient conductive and radiative heat transfer in a silica window // *J. Thermophys. Heat Transfer*. – 1995. – **9**, No. 2. – P. 370–373.
51. Sutton W. H. A short time solution for coupled conduction and radiation in a participating slab geometry // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. – 1986. – **108**, No. 2. – P. 465–466.
52. Thömmes G. A linear iterative scheme for the fast solution of the radiative heat transfer equations for glass // *J. Comput. Phys.* – 2004. – **193**, No. 2. – P. 544–562.
53. Tsai C.-F., Nixon G. Transient temperature distribution of a multilayer composite wall with effects of internal thermal radiation and conduction // *Numer. Heat Transfer*. – 1986. – **10**, No. 1. – P. 95–101.
54. Tsai J. R., Özişik M. N. Transient, combined conduction and radiation in an absorbing, emitting, and isotropically scattering solid sphere // *J. Quant. Spectrosc. RA*. – 1987. – **38**, No. 4. – P. 243–251.
55. Wang P.-Y., Cheng H-E., Tan H-P. Transient thermal analysis of semitransparent composite layer with an opaque boundary // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 2002. – **45**, No. 2. – P. 425–440.
56. Weston K. C., Hauth J. L. Unsteady, combined radiation and conduction in an absorbing, scattering, and emitting medium // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. – 1973. – **95**, No. 3. – P. 357–364.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Сделан обзор состояния исследований в области радиационной термомеханики тел различной прозрачности относительно теплового излучения. На модельной задаче для облучаемого термочувствительного слоя с использованием предложенной методики решения нелинейных задач теплопереноса и термоупругости, основанной на методе конечных элементов, исследовано влияние термочувствительности теплофизических, механических и радиационных характеристик на напряжения в частично прозрачных и непрозрачных телах.

MODELING AND INVESTIGATION OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF THERMOSENSITIVE SOLIDS TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECT OF THERMAL RADIATION

A review of the state of research in radiation thermomechanics of solids of different transparencies regarding thermal radiation is made. Using the proposed method for solving the nonlinear problems of heat transfer and thermoelasticity based on the finite element method the effect of temperature sensitivity of thermal, mechanical and radiative characteristics on the stresses in a semitransparent and opaque solids is investigated in the model problem for an irradiated heat-sensitive layer.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Ін-т теорет. і прикл. механіки
ім. С. О. Христіановича СВ РАН, Новосибірськ, Росія

Одержано
29.12.12