

Д. Б. Куриляк

### ДИФРАКЦІЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ХВИЛІ НА КОНУСІ, СФОРМОВАНОМУ З ІДЕАЛЬНО МАГНІТОПРОВІДНОЇ ТА ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ ПОВЕРХОНЬ

Розв'язано задачу дифракції поля радіального електричного диполя на конусі, поверхня якого сформована зі скінченної ідеально магнітопровідної і зрізаної напівнескінченної ідеально електропровідної конічних поверхонь. Задачу розв'язано методом Вінера – Гопфа з застосуванням інтегрального перетворення Конторовича – Лебедева. Отримано її точний розв'язок у статичній границі та наближений – у низькочастотному випадку. Наведено вираз для діаграми спрямованості конуса з ідеально поглинаючою, у рамках моделі Макдональда, вершиною. Вияснено вплив краю поглинаючого фрагмента поверхні конуса на його розсіювальні властивості.

Закономірності дифракції електромагнітних хвиль на межі з'єднання ідеально магнітопровідних і електропровідних поверхонь використовують для моделювання поля, розсіяного краями ідеально поглинаючих («чорних») покриттів, з метою зменшення радіолокаційних поперечників розсіяння. Плоскі розсіювачі з ідеальними магнітопровідними властивостями розглянуто в [11], більш загальний випадок, коли частина плоскої поверхні є імпедансною, – в [7], а результати експериментальних досліджень «чорних» поверхонь наведено в [10]. Розв'язки задач дифракції на ідеально магнітопровідних і «чорних» тілах канонічних форм наведено у [4].

Основна мета цієї статті полягає у тому, щоб отримати математично строгий розв'язок такої електродинамічної задачі. Нехай у сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$  задано напівнескінченну кругову конічну поверхню  $Q$  з вершиною у її початку. Конус  $Q$  складається з двох частин:  $Q = Q_1 \cup Q_2$ , де  $Q_1 : \{r \in [0, c), \theta = \gamma, \varphi \in [0, 2\pi)\}$  – ідеально магнітопровідний скінченний конус, на поверхні якого виконується гранична умова рівності нулевим тангенціальній компоненті магнітного поля,  $\mathbf{H}_{tg}^{(t)} = 0$ , а  $Q_2 : \{r \in (c, \infty), \theta = \gamma, \varphi \in [0, 2\pi)\}$  – напівнескінченний ідеально електропровідний конус,  $\mathbf{E}_{tg}^{(t)} = 0$ , зі зрізаною вершиною (див. рис. 1).

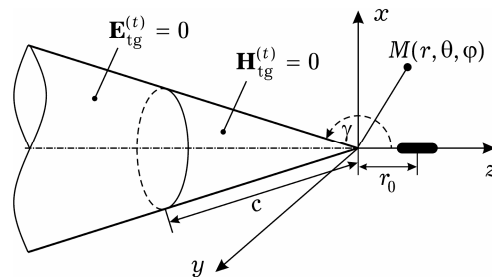


Рис. 1

Ця задача відіграє ключову роль при дослідженні поля, розсіяного конусом, частина поверхні якого у вигляді скінченного конуса з вершиною є ідеально поглинаючою, у рамках моделі Макдональда [9]. Для її розв'язання використовуємо метод Вінера – Гопфа. Дослідження дифракції хвиль на ідеально електропровідних конічних поверхнях з краями наведено у [8].

Нехай поверхня  $Q$  збуджується осесиметрично радіальним електричним диполем, розміщеним на осі симетрії конуса, яка співпадає з віссю  $z$  відповідної декартової системи координат  $(x, y, z)$ . В однорідному середовищі радіальний електричний диполь випромінює поле з відмінними від нуля компонентами  $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $H_\varphi$ , що не залежать від азимутальної координати  $\varphi$ . Залежність поля від часу описується множником  $e^{-i\omega t}$  і його опускаємо.

Сумарне поле, яке утвориться при взаємодії поля диполя з конічною поверхнею  $Q$ , буде також мати осьову симетрію і його компоненти виражаються через скалярний потенціал Дебая  $U$  так:

$$E_r = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \quad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r U),$$

$$H_\varphi = ikZ^{-1} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (1)$$

де функція  $U = U(r, \theta)$  задовольняє рівняння Гельмгольца;  $Z$  – опір середовища.

У вільному просторі магнітну компоненту поля диполя подаємо у вигляді [5]

$$H_\varphi^i = iI_r^e h k^3 \sqrt{\pi/2} \frac{H_{3/2}^{(1)}(kR)}{(kR)^{3/2}} r \sin \theta. \quad (2)$$

Тут  $I_r^e h$  – момент диполя,  $I_r^e$  – амплітуда електричного струму,  $h$  – довжина диполя;  $H_{3/2}^{(1)}(\cdot)$  – функція Ганкеля першого роду;  $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}$ ,  $r_0$  – радіальна координата диполя на осі симетрії конуса;  $k$  – хвильовий вектор ( $k = k' + ik''$ ,  $k'$ ,  $k'' > 0$ ).

Потенціал Дебая поля диполя в однорідному середовищі знаходимо із формули (2). Для цього, використовуючи теорему додавання для циліндричних функцій [3], записуємо

$$\frac{H_{3/2}^{(1)}(kR)}{(kR)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{(kr)^{3/2} (kr_0)^{3/2} \sin \theta} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{\lambda_n - 1/2}^1(\cos \theta) \begin{cases} J_{\lambda_n}(kr_0) H_{\lambda_n}^{(1)}(kr), & r \geq r_0, \\ J_{\lambda_n}(kr) H_{\lambda_n}^{(1)}(kr_0), & r \leq r_0, \end{cases}$$

де  $P_{\lambda_n - 1/2}^1(\cos \theta)$  – приєднана функція Лежандра,  $J_{\lambda_n}(kr_0)$  – функція Бесселя,  $\lambda_n = n + 1/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Далі, беручи до уваги формули (1), (2), знаходимо вираз для потенціалу Дебая поля диполя у вільному просторі, який подаємо в інтегральній формі:

$$U^i(r, \theta) = \frac{A_0}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma^*} \frac{v P_{v-1/2}(-\cos \theta)}{\cos(\pi v)} K_v(sr_0) I_v(sr) dv. \quad (3)$$

Тут  $A_0 = \pi I_r^e h Z / (r_0 \sqrt{sr_0})$ ;  $\Gamma^*$  – контур інтегрування, який проходить паралельно до уявної осі  $\text{Im } v$  у смузі  $\Pi : \{|\text{Re } v| < 1/2\}$  регулярності підінтегральної функції;  $I_v(sr)$  і  $K_v(sr_0)$  – відповідно модифікована функція Бесселя і функція Макдональда,  $s = -ik$ ;  $P_{v-1/2}(\cos \theta)$  – функція Лежандра.

Тут і надалі використовуємо [3] означення  $P_{v-1/2}^1(\pm \cos \theta) = \pm \frac{\partial}{\partial \theta} [P_{v-1/2}(\pm \cos \theta)]$ .

Інтеграл у (3) є абсолютно і рівномірно збіжним для  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < r/r_0 < \infty$  і визначає потенціал Дебая поля диполя у вільному просторі з точністю до величини, пропорційної лишку підінтегральної функції у точці  $v = 1/2$ . Цей лишок не залежить від змінної  $\theta$  і не вносить вкладу у компоненти поля. Контур інтегрування  $\Gamma^*$  у (3) можна деформувати у межах області регулярності  $\Pi$ , а аргументи модифікованої функції Бесселя і функції Макдональда можна переставити місцями без зміни значення інтеграла.

Тепер електродинамічна задача зводиться до наступної змішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца:

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (4)$$

де  $U = U(r, \theta)$  – невідомий скалярний потенціал дифрагованого поля;  $\Delta$  – оператор Лапласа, який для осесиметричного випадку у сферичній системі координат записується як

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Функція  $U$  повинна задовольняти граничні умови:

– на ідеально магнітопровідній поверхні ( $r, \theta \in \mathbf{Q}_1$ )

$$\frac{\partial U^t}{\partial \theta} = 0; \quad (5')$$

– на ідеально електропровідній поверхні ( $r, \theta \in \mathbf{Q}_2$ )

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U^t}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (5'')$$

Тут  $U^t (\equiv U + U^i)$  – скалярний потенціал повного поля. Крім того, для єдиності розв'язку шукана функція повинна задовольняти умову граничного поглинання на нескінченності та умову обмеженості енергії електромагнітного поля у довільному обмеженому об'ємі.

Розв'язок крайової задачі (4), (5) подаємо у вигляді інтеграла Конторовича – Лебедева, який записуємо так:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma^*} v F(v) P_{v-1/2}(\cos \theta) I_v(sr) dv. \quad (6)$$

Тут  $F(v)$  – невідома трансформанта, яка є парною функцією, регулярною у смузі  $\Pi$ .

З урахуванням подання (6) крайову задачу (4), (5) зводимо до системи дуальних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma^*} v (v^2 - 1/4) \left[ F(v) P_{v-1/2}(\cos \gamma) + \right. \\ & \left. + \frac{A_0 P_{v-1/2}(-\cos \gamma) K_v(sr_0)}{\cos(\pi v)} \right] I_v(sr) dv = 0, \quad c < r < \infty, \quad (7') \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma^*} v \left[ F(v) P_{v-1/2}^1(\cos \gamma) - A_0 \frac{P_{v-1/2}^1(-\cos \gamma) K_v(sr_0)}{\cos(\pi v)} \right] I_v(sr) dv = 0,$$

$$0 \leq r < c. \quad (7'')$$

Тут  $\operatorname{Re} s > 0$ , а для забезпечення збіжності інтегралів (7) покладаємо, що  $\operatorname{Im} s = 0$ . До комплексних значень цього параметра, у тому числі й уявних, перейдемо у кінцевих формулах.

Доповнимо праві частини рівнянь (7) до повного інтервалу, а далі застосуємо обернене перетворення Конторовича – Лебедева. З отриманих співвідношень виключимо невідому функцію  $F(v)$  і прийдемо до такого функціонального рівняння:

$$\Phi_1(v) M(v) - \frac{2A_0 K_v(sr_0)}{\pi \sin \gamma P_{v-1/2}(\cos \gamma)} = \Phi_2(v). \quad (8)$$

Тут

$$\Phi_1(v) = \sqrt{s} \int_0^c g_1(r) K_\nu(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (9')$$

$$\Phi_2(v) = \sqrt{s} \int_c^\infty g_2(r) K_\nu(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (9'')$$

де  $g_1(r) = -rE_r^t(r, \gamma)$ ,  $g_2(r) = H_\varphi^t(r, \gamma)/i\omega\varepsilon$  – нові невідомі функції, відмінні від нуля відповідно в областях  $0 \leq r < c$  і  $c < r < \infty$ ;

$$M(v) = \frac{P_{\nu-1/2}^1(\cos \gamma)}{(v^2 - 1/4)P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)}. \quad (10)$$

Функція  $M(v)$  є парною, регулярною і не має нулів в області  $\Pi$ . Коли  $|v| \rightarrow \infty$ ,  $M(v)$  в  $\Pi$  прямує до нуля, як  $v^{-1}$ . За межами  $\Pi$  функція  $M(v)$  має прості дійсні нулі і полюси відповідно у точках  $v = \pm z_n$  і  $v = \pm v_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , які визначаються як розв'язки рівнянь

$$P_{z_n-1/2}^1(\cos \gamma)/(v_n^2 - 1/4) = 0, \quad (11')$$

$$P_{v_n-1/2}(\cos \gamma) = 0. \quad (11'')$$

Асимптотики коренів рівнянь  $P_{z_n-1/2}^1(\cos \gamma) = 0$  і  $P_{v_n-1/2}(\cos \gamma) = 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ , є такими [2]:

$$\eta_n = \pi(n - 3/4)/\gamma + O(1/n), \quad v_n = \pi(n - 1/4)/\gamma + O(1/n). \quad (12)$$

Розглянемо нові невідомі функції (9), які входять у рівняння (8). Коли  $r \rightarrow 0$ , функція  $g_1(r) = O(r^{z_1-1/2})$ , де  $z_1$  – перший додатній корінь рівняння (11'). Оскільки мінімальне значення  $z_1$  досягається, коли  $\gamma \rightarrow \pi$ , і при цьому  $z_1 \rightarrow 3/2 + 2(\pi - \gamma)^2/9$  [3], то для усіх  $0 < \gamma < \pi$  функція  $g_1(r)$  обмежена у вершині конуса  $\mathcal{Q}_1$ . На межі з'єднання поверхонь  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{Q}_2$  при  $r \rightarrow c - 0$  функція  $g_1(r)$  має інтегровну особливість  $g_1(r) = O((r - c)^{-1/2})$ .

Враховуючи, що  $K_\nu(sr) \sim (sr/2)^{-|\nu|}$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $\nu \neq 0$  і  $K_0(sr) \sim \ln(sr/2)$  при  $r \rightarrow 0$ , для функції  $\Phi_1(v)$  (9') отримуємо оцінку

$$\Phi_1(v) \leq C_0 \int_0^1 x^{-|\nu|+z_1-1} dx = \frac{C_0}{-|\nu|+z_1},$$

де константа  $C_0$  не залежить від  $\nu$  і  $\gamma$ . Отже,  $\Phi_1(v)$  обмежена в смузі  $\Pi_1 : \{\operatorname{Re} |\nu| < 3/2\}$  для довільних  $c$  і  $\gamma$ . Оскільки  $\Pi \subset \Pi_1$ , то  $\Phi_1(v)$  обмежена в  $\Pi$ .

Функція  $g_2(r) \sim H_\varphi^t(r, \gamma) = O((r - c)^{1/2})$ , коли  $r \rightarrow c + 0$ , а при  $r \rightarrow \infty$  задовольняє умову граничного поглинання. Отже,  $\Phi_2(v)$ , означена (9''), є цілою функцією в усій комплексній площині  $\nu$  ( $|\nu| < \infty$ ). Зважаючи на те, що

$$K_\nu(sr) \sim \frac{1}{2} \Gamma(|\nu|) \left(\frac{sr}{2}\right)^{-|\nu|}, \quad \left|\frac{\nu}{sr}\right| \gg 1,$$

де  $\Gamma(v)$  – гамма-функція, знаходимо, що в області  $\operatorname{Re} \nu < 1/2$  і  $|\nu| \rightarrow \infty$

$$\frac{\Phi_2(v)}{\Gamma(-v)} \left(\frac{sc}{2}\right)^{-v} = O(|v|^{-3/2}). \quad (13)$$

Відомий доданок у рівнянні (8) також є регулярною функцією у смугі регулярності  $\Pi$  і при  $|v| \rightarrow \infty$  загасає експоненціально, як  $e^{-|v|\gamma}$ . Отже, рівняння (8) виконується в  $\Pi$ .

Використовуючи формулу для подання функції Макдональда через модифіковані функції Бесселя [3], функцію (9') запишемо так [6]:

$$\Phi_1(v) = \frac{1}{2} \Phi_1^+(v) \left(\frac{sc}{2}\right)^v \Gamma(-v) + \frac{1}{2} \Phi_1^-(v) \left(\frac{sc}{2}\right)^{-v} \Gamma(v). \quad (14)$$

Тут

$$\Phi_1^\pm(v) = \Gamma(1 \pm v) \left(\frac{sc}{2}\right)^{\mp v} \sqrt{s} \int_0^c g_1(r) I_{\pm v}(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (15)$$

і виконується співвідношення  $\Phi_1^+(v) = \Phi_1^-(-v)$ .

Оскільки для модифікованих функцій Бесселя справджується асимптотична оцінка

$$I_{\pm v}(sr) \sim \frac{1}{\Gamma(1 \pm v)} \left(\frac{sr}{2}\right)^{\pm v}, \quad \left|\frac{v}{sr}\right| \gg 1,$$

то для функцій (15) виконується співвідношення

$$\Phi_1^\pm(v) \leq C_1 \int_0^1 x^{\pm v + z_1 - 1} dx = \frac{C_1}{\pm v + z_1}. \quad (16)$$

Тут  $C_1$  – константа, яка не залежить від  $v$  і  $\gamma$ .

Із формули (16) випливає, що функції  $\Phi_1^\pm(v)$  є регулярними відповідно у півплощинах  $\operatorname{Re} v > -z_1$  та  $\operatorname{Re} v < z_1$  комплексної площини  $v$ .

Враховуючи тепер поведінку  $E_r(r, \gamma)$  – компоненти поля при  $r \rightarrow c - 0$ , отримуємо таку оцінку функцій  $\Phi_1^\pm(v)$  при  $|v| \rightarrow \infty$ :

$$\Phi_1^\pm(v) \leq C_2 \int_0^1 (1-x)^{-1/2} x^{\pm v - 1/2} dx = C_2 B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm v\right) = O(v^{-1/2}),$$

$$\operatorname{Re} v > -1/2, \\ \operatorname{Re} v < 1/2,$$

де  $C_2$  – константа,  $B(x, y)$  – бета-функція [3].

Далі факторизуємо функцію (10):

$$M(v) = M_+(v)M_-(v). \quad (17)$$

Тут  $M_\pm(v)$  – функції регулярні і не перетворюються в нуль відповідно у півплощинах  $\operatorname{Re} v > -1/2$  та  $\operatorname{Re} v < 1/2$ . При цьому  $M_+(v) = M_-(-v)$ , для  $|v| \rightarrow \infty$  в областях регулярності маємо  $M_\pm(v) = O(v^{-1/2})$ ,

$$M_+(v) = B_0 \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{v}{z_n}\right) e^{-\frac{v\gamma}{n\pi}}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{v}{v_n}\right) e^{-\frac{v\gamma}{n\pi}}}, \quad (18)$$

де  $B_0 = 2i [P_{-1/2}^1(\cos \gamma) / P_{-1/2}(\cos \gamma)]^{1/2}$ .

Підставимо тепер вираз (14) у рівняння (8) і помножимо отримане співвідношення на величину  $2(sc/2)^{-\nu} M_-^{-1}(\nu) \Gamma^{-1}(-\nu)$ . Як наслідок, приходимо до функціонального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} & \Phi_1^+(\nu) M_+(\nu) + \Phi_1^-(\nu) M_+(\nu) \left(\frac{sc}{2}\right)^{-2\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} - \\ & - \frac{4A_0 (sc/2)^{-\nu} K_\nu(sr_0)}{\pi \sin \gamma \Gamma(-\nu) M_-(\nu) P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)} = \\ & = \Phi_2(\nu) \frac{2(sc/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu) M_-(\nu)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Перший доданок у лівій частині рівняння (19) є функцією, регулярною у правій півплощині  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ , і прямує до нуля при  $|\nu| \rightarrow \infty$ , як  $\nu^{-1}$ . Права частина в (19) є функцією, регулярною в області  $\operatorname{Re} \nu < 1/2$ , і, оскільки справджується оцінка (13), також прямує до нуля при  $|\nu| \rightarrow \infty$ , як  $\nu^{-1}$ . Решта доданків цього рівняння є регулярними у смузі  $\Pi$  і у цій смузі прямують до нуля, коли  $|\nu| \rightarrow \infty$ , а за її межами допускають особливості типу простих полюсів. Тобто рівняння (19) є модифікованим рівнянням Вінера – Гопфа.

До рівняння (19) застосуємо процедуру факторизації відносно контуру, розміщеного у вертикальній смузі  $\Pi$ , за формулами [1]

$$[\dots]^\pm = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\pm} [\dots] \frac{d\nu}{\nu - \alpha},$$

де  $[\dots]^\pm$  – функції, регулярні відповідно у півплощинах  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ ;  $\alpha, \nu \in$

$\Pi$ ;  $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \nu$  для  $\Gamma^+$  і  $\operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \nu$  для  $\Gamma^-$ .

В отриманому інтегральному рівнянні згрупуємо доданки: функції, регулярні при  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ , перенесемо до лівої частини, а функції, регулярні при  $\operatorname{Re} \nu < 1/2$ , – до правої. У цих півплощинах при  $|\nu| \rightarrow \infty$  вони прямують до нуля, як  $\nu^{-1}$ . Оскільки у спільній смузі регулярності виконується рівність, то її права і ліва частини утворюють функцію, регулярну в усій комплексній площині, яка, згідно з теоремою Ліувілля, тотожно дорівнює нулеві в усій комплексній площині. Тоді ліва та права частини цього рівняння відповідно будуть еквівалентні інтегральним рівнянням (7). Одне з них, достатнє для розв'язку задачі, запишемо так:

$$\begin{aligned} & \Phi_1^+(\alpha) M_+(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \Phi_1^-(\nu) M_+(\nu) \left(\frac{sc}{2}\right)^{-2\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{d\nu}{\nu - \alpha} = \\ & = - \frac{2A_0}{\pi^2 i \sin \gamma} \int_{\Gamma^+} \frac{(sc/2)^{-\nu} K_\nu(sr_0)}{\Gamma(-\nu) M_-(\nu) P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)} \frac{d\nu}{\nu - \alpha}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут підінтегральна функція в інтегралі зліва має прості полюси у точках  $\nu = -n$  і  $\nu = -\nu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а в інтегралі справа – у точках  $\nu = -\nu_n$ .

Обмежимося розглядом випадку, коли  $r_0 > c$ . Тоді, деформуючи в (20) контур  $\Gamma^+$  у ліву півплощину і замінюючи інтеграли рядами лишків, отримуємо функціональне співвідношення:

$$\begin{aligned}
& \Phi_1^+(\alpha)M_+(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Phi_1^+(n)M_-(n) \left(\frac{sc}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)(n+\alpha)} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \Phi_1^+(v_n) \left(\frac{sc}{2}\right)^{2v_n}}{\Gamma(v_n)\Gamma(v_n+1) \sin(\pi v_n) [M_-^{-1}(v_n)]'(v_n+\alpha)} = \\
& = -\frac{4A_0}{\pi \sin \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{v_n}(sr_0) \left(\frac{sc}{2}\right)^{v_n}}{\Gamma(v_n)M_+(v_n)(v_n+\alpha) \frac{\partial}{\partial v} [P_{v-1/2}(\cos \gamma)]_{v_n}}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Тут  $\Phi_1^+(n)$ ,  $\Phi_1^+(v_n)$  – невідомі значення функції  $\Phi_1^+(\alpha)$  у дискретних точках. Похідну  $\frac{\partial}{\partial v} [P_{v-1/2}(\cos \gamma)]_{v=v_n}$  від функції Лежандра за індексом знаходимо за відомою формулою [3], а

$$[M_-^{-1}(v_n)]' \equiv \frac{d}{dv} [M_-^{-1}(v)]_{v=v_n} = \frac{(v_n^2 - 1/4)M_+(v_n) \partial/\partial v [P_{v-1/2}(\cos \gamma)]_{v_n}}{P_{v_n-1/2}^1(\cos \gamma)}.$$

Справджуються такі теореми.

**Теорема 1.** Для довільних параметрів крайової задачі (4), (5) функціональне співвідношення (21) забезпечує побудову регулярної в  $\text{Re } \alpha > -1/2$  функції  $\Phi_1^+(\alpha)$ , яка прямує до нуля, як  $\alpha^{-1/2}$ , коли  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , і має прості полюси на від'ємній частині дійсної осі у точках  $\alpha = -n$ ,  $\alpha = -z_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

**Д о в е д е н н я.** Покладаючи в (21)  $\alpha = p$  і  $\alpha = v_p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , приходимо до двох нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) другого роду. Далі вводимо вектори невідомих  $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ , де  $x_n = \Phi_1^+(n)M_+(n)$ ,  $y_n = \Phi_1^+(v_n)M_+(v_n)$ . Тоді  $X$ ,  $Y$  належать до гільбертового простору  $\ell_2$ , оскільки  $x_n, y_n = O(1/n)$ , коли  $n \rightarrow \infty$ . Матриці цих систем записуються як сума одиничних і компактних в  $\ell_2$  операторів. Отже, отримані НСЛАР допускають розв'язки з заданою точністю для довільних параметрів задачі (за винятком точок спектра). Твердження теореми випливають безпосередньо із формули (21).  $\blacklozenge$

**Теорема 2.** Скалярний потенціал  $U$  поля радіального електричного диполя на осі конуса  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2$  можна подати у вигляді ряду за власними функціями рівняння Гельмгольца для конічних областей відповідно з ідеально електропровідною поверхнею при  $r > c$  та ідеально магнітопровідною при  $r < c$ .

**Д о в е д е н н я.** Розглянемо випадок, коли  $r > c$ . Тоді з рівняння (7') визначаємо трансформанту скалярного потенціалу дифрагованого поля, яку підставимо у рівняння (6). З огляду на співвідношення (14) і вираз для падаючого поля (3) потенціал повного поля подамо у вигляді

$$U^t(r, \theta) = \frac{1}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma^*} v \frac{\Phi_1^+(v) \left(\frac{sc}{2}\right)^v \Gamma(-v) P_{v-1/2}(\cos \theta)}{2(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}(\cos \gamma)} I_v(sr) dv +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma^*} v \frac{\Phi_1^-(v) \left(\frac{sc}{2}\right)^{-v} \Gamma(v) P_{v-1/2}(\cos \theta)}{2(v^2 - 1/4) P_{v-1/2}(\cos \gamma)} I_v(sr) dv - \\
& - \frac{A_0}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma^*} v [P_{v-1/2}(-\cos \gamma) P_{v-1/2}(\cos \theta) - \\
& - P_{v-1/2}(\cos \gamma) P_{v-1/2}(-\cos \theta)] [\cos(\pi v) P_{v-1/2}(\cos \gamma)]^{-1} \times \\
& \times K_v(sr_0) I_v(sr) dv. \tag{22}
\end{aligned}$$

Перший інтеграл у (22) замінимо рядом лишків, замкнувши контур інтегрування у праву півплощину, де підінтегральна функція має прості полюси у точках  $v = n$ ,  $v = v_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , і при  $v = 1/2$ . Другий інтеграл у (22) подамо рядом лишків у точках  $v = -1/2$ ,  $v = -n$  і  $v = -v_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , замкнувши контур інтегрування у ліву півплощину. Оскільки  $I_n(sr) = I_{-n}(sr)$ , покажемо, що лишки у точках  $v = n$  і  $v = -n$  взаємно скорочуються, а з лишків у точках  $v = v_n$  і  $v = -v_n$ , використовуючи співвідношення

$$K_{v_n}(sr) = \frac{1}{2} \Gamma(-v_n) \Gamma(v_n + 1) [I_{v_n}(sr) - I_{-v_n}(sr)],$$

формуємо ряд з функцій Макдональда. Необхідне подання третього інтеграла в (22) отримаємо, коли у ньому переставимо аргументи модифікованої функції Бесселя і функції Макдональда і замінимо рядом лишків у точках  $v = v_n$ . Кінцевий вираз для потенціалу запишемо так:

$$\begin{aligned}
U^t(r, \theta) = & \frac{2A_0}{\sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n P_{v_n-1/2}(-\cos \gamma) I_{v_n}(sr_0) P_{v_n-1/2}(\cos \theta) K_{v_n}(sr)}{\cos(\pi v_n) \partial/\partial v [P_{v-1/2}(\cos \gamma)]_{v=v_n}} - \\
& - \frac{2}{\sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1^+(v_n) \left(\frac{sc}{2}\right)^{v_n} P_{v_n-1/2}(\cos \theta) K_{v_n}(sr)}{(v_n^2 - 1/4) \Gamma(v_n) \partial/\partial v [P_{v-1/2}(\cos \gamma)]_{v=v_n}}. \tag{23}
\end{aligned}$$

Тут перший ряд відповідає скалярному потенціалу повного поля ідеально провідного напівнескінченного конуса за умови його збудження полем радіального диполя (2), а другий – описує збурення, яке вносить у цей потенціал скінченна ідеально магнітопровідна конічна поверхня.

Зауважимо, що у виразі (23) опущено незалежні від кута  $\theta$  доданки, які відповідають полюсам підінтегральної функції у точках  $v = \pm 1/2$  і не вносять вкладу у вирази для компонент поля.

Далі знайдемо вираз для потенціалу поля в області  $r < c$ . Із формул (1) і подання (23) при  $\theta = \gamma$  отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{H_\phi^t(r, \gamma)}{i\omega\epsilon} = & - \frac{2}{\pi \sin \gamma} \frac{A_0}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{v K_v(sr_0)}{P_{v-1/2}(\cos \gamma)} I_v(sr) dv - \\
& - \frac{2}{\sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1^+(v_n) \left(\frac{sc}{2}\right)^{v_n} P_{v_n-1/2}^1(\cos \gamma)}{(v_n^2 - 1/4) \Gamma(v_n) \partial/\partial v [P_{v-1/2}(\cos \gamma)]_{v=v_n}} K_{v_n}(sr). \tag{24}
\end{aligned}$$



При виведенні виразу (24) враховано, що при  $P_{\nu_n-1/2}(\cos \gamma) = 0$  виконується рівність

$$P_{\nu_n-1/2}(-\cos \gamma)P_{\nu_n-1/2}^1(\cos \gamma) = \frac{2 \cos \pi \nu_n}{\pi \sin \gamma},$$

і перший ряд у (23) згорнуто в інтеграл.

Підставимо вираз (24) у формулу (9'') і подамо функцію  $\Phi_2(\alpha)$  в області  $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \nu \in \Pi$  так:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\alpha) = & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1^+(\nu_n) P_{\nu_n-1/2}^1(\cos \gamma) \left(\frac{sc}{2}\right)^{\nu_n}}{(\nu_n^2 - 1/4) \Gamma(\nu_n) \partial/\partial \nu [P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)]_{\nu=\nu_n}} \frac{scW[K_{\nu_n} K_{\alpha}]_{sc}}{\alpha^2 - \nu_n^2} - \\ & - \frac{4A_0}{\pi \sin \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n K_{\nu_n}(sr_0)}{\partial/\partial \nu [P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)]_{\nu=\nu_n}} \frac{scW[I_{\nu_n} K_{\alpha}]_{sc}}{\alpha^2 - \nu_n^2} - \\ & - \frac{2A_0 K_{\alpha}(sr_0)}{\pi \sin \gamma P_{\alpha-1/2}(\cos \gamma)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тут  $W[f_{\alpha} \varphi_{\nu}]_t = f_{\alpha}(t) \varphi'_{\nu}(t) - \varphi_{\nu}(t) f'_{\alpha}(t)$ , де  $f_{\alpha}(t)$ ,  $\varphi_{\nu}(t)$  – довільні функції Бесселя, а штрих означає похідну за аргументом.

Ряди у (25) збігаються абсолютно і рівномірно по  $\alpha$  ( $|\alpha| < \infty$ ). Регулярність функції  $\Phi_2(\alpha)$  забезпечується тим, що особливості другої суми у точках  $\alpha = \pm \nu_n$ , де  $n = 1, 2, \dots$ , компенсуються особливостями третього доданка формули (25) у цих точках.

Тепер трансформанту шуканого скалярного потенціалу дифрагованого поля запишемо так:

$$F(\nu) = \frac{\Phi_2(\nu)}{P_{\nu-1/2}^1(\cos \gamma)} + \frac{A_0 P_{\nu-1/2}^1(-\cos \gamma) K_{\nu}(sr_0)}{\cos(\pi \nu) P_{\nu-1/2}^1(\cos \gamma)}. \quad (26)$$

Після підстановки формули (26) в (6) і врахування виразу (25) отримаємо інтеграл уздовж контуру  $\Gamma^*$ , у якому підінтегральна функція задовольняє лему Жордана в правій півплощині. Далі замінимо цей інтеграл рядом лишків і, врахувавши формулу (3), отримаємо подання скалярного потенціалу повного поля у вигляді ряду за власними функціями рівняння Гельмгольца для конічної області з ідеально магнітопровідною поверхнею:

$$U^t(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2z_p \Psi_p P_{z_p-1/2}(\cos \theta)}{\partial/\partial z [P_{z_p-1/2}^1(\cos \gamma)]} I_{z_p}(sr). \quad (27)$$

Тут

$$\begin{aligned} \Psi_p = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1^+(\nu_n) (sc/2)^{\nu_n} P_{\nu_n-1/2}^1(\cos \gamma) scW[K_{\nu_n} K_{z_p}]_{sc}}{(\nu_n^2 - 1/4) \Gamma(\nu_n) \partial/\partial \nu [P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)] (z_p^2 - \nu_n^2)} + \\ & + \frac{4A_0}{\pi \sin \gamma \sqrt{sr}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n K_{\nu_n}(sr_0) scW[I_{\nu_n} K_{z_p}]_{sc}}{\partial/\partial \nu [P_{\nu-1/2}(\cos \gamma)] (z_p^2 - \nu_n^2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отриманням подань (23), (27) завершено доведення теореми 2.  $\blacklozenge$

**Наслідок.** Значення функції  $\Phi_1^+(\nu)$  у точках  $\nu = \nu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , забезпечує отримання розв'язку рівняння Вінера – Гопфа (8), а отже, і вихідної дифракційної задачі.

**Поле в зоні випромінювання.** При  $r \rightarrow \infty$  із формул (1) і (23) отримуємо

$$E_0^t(r, \theta) = ZH_\varphi^t(r, \theta) = D(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (29)$$

Тут  $D(\theta)$  – діаграма спрямованості конуса  $\mathcal{Q}$ :

$$D(\theta) = D_1(\theta) + D_2(\theta),$$

де

$$D_1(\theta) = -\frac{2A_0}{\sin \gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n I_{v_n}(sr_0) P_{v_n-1/2}^1(\cos \theta)}{P_{v_n-1/2}^1(\cos \gamma) \partial/\partial v [P_{v_n-1/2}^1(\cos \gamma)]}, \quad (30)$$

$$D_2(\theta) = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_1^+(v_n) \left(\frac{sc}{2}\right)^{v_n} P_{v_n-1/2}^1(\cos \theta)}{(v_n^2 - 1/4) \Gamma(v_n) \partial/\partial v [P_{v_n-1/2}^1(\cos \gamma)]_{v=v_n}}. \quad (31)$$

Формули (30), (31) дозволяють у рамках моделі Макдональда [9] записати вираз для діаграми спрямованості напівнескінченного конуса з «чорною» вершиною у вигляді

$$\hat{D}(\theta) = \frac{D_1(\theta) + D(\theta)}{2}. \quad (32)$$

**Часткові випадки.** У статичній границі ( $s \rightarrow 0$ ) функціональне рівняння (21) допускає точний розв'язок

$$\Phi_1^+(v_n) = -\frac{2A_0}{\pi \sin \gamma M_+(v_n)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(c/r_0)^{v_p}}{M_+(v_p)(v_p + v_n) \partial/\partial v [P_{v_p-1/2}^1(\cos \gamma)]}, \quad (33)$$

де ряд (33) збігається абсолютно та рівномірно відносно  $\gamma$ .

Нехай тепер  $\gamma = \pi/2$ . За цієї умови маємо  $v_n = 2n - 1/2$ . Тоді

$$M_+(v_n) = \frac{i}{\sqrt{2n}} \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(n)}, \quad (34)$$

$$P_{v_n-1/2}^1(0) = \frac{(-1)^n 2\Gamma(n + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n)}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial P_{v_n-1/2}^1(0)}{\partial v} = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} \Gamma(n)}{2\Gamma(n + 1/2)}. \quad (36)$$

Враховуючи формули (34)–(36), вираз (33) перепишемо так:

$$\Phi_1^+(v_n) = \frac{4A_0 \Gamma(n + 1)}{\pi^{3/2} (c/r_0)^{1/2} \Gamma(n + 1/2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p (c/r_0)^{2p}}{p + n - 1/2}. \quad (37)$$

Якщо  $|sc/2| < 1$ , то з використанням формул (34)–(37) для поля випромінювання (30), (31) у низькочастотній області отримуємо такі наближення:

$$D_1(\theta) = -2A_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{sr_0}{2}\right)^{2n-1/2} P_{2n-1}^1(\cos \theta)}{\Gamma(2n - 1/2)}, \quad (38)$$

$$D_2(\theta) = \frac{4A_0}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{sc}{2}\right)^{2n-1/2} P_{2n-1}^1(\cos \theta)}{(2n - 1) \Gamma(2n - 1/2)} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p (c/r_0)^{2p-1/2}}{(p + n - 1/2)} \right]. \quad (39)$$

Коли  $c/r_0 \ll 1$ , то для аналізу (38), (39) обмежимося одноمودовим наближенням:

$$D_1(\theta) = -2iI_r^e h k Z \sin \theta + O\left(\left(\frac{kr_0}{2}\right)^3\right),$$

$$D_2(\theta) = \frac{8iI_r^e h k Z}{3\pi} \left[ \left(\frac{c}{r_0}\right)^3 + O\left(\frac{c}{r_0}\right)^5 \right] \sin \theta + O\left(\left(\frac{kr_0}{2}\right)^3 \left(\frac{c}{r_0}\right)^5\right). \quad (40)$$

З урахуванням формул (40) поле, розсіяне провідною площиною з «чорним» кругом малого радіуса, запишемо у вигляді

$$\bar{D}(\theta) = -2iI_r^e h k Z \left[ 1 - \frac{2}{3\pi} \left(\frac{c}{r_0}\right)^3 \right] \sin \theta. \quad (41)$$

Формула (41) ілюструє ефект погашення поля, оскільки  $|\bar{D}(\theta)| < |D_1(\theta)|$ . Як впливає з цієї формули, рівень ефективності поглинаючого диска на площині визначається кубом відношення  $c/r_0$  і зростає з наближенням джерела до вершини.

**Висновки.** Розв'язано задачу дифракції поля радіального електричного диполя на конусі, поверхня якого сформована зі скінченної ідеально магнітопровідної і зрізаної ідеально електропровідної поверхонь. Методом Вінера – Гопфа сумісно з інтегральним перетворенням Конторовича – Лебедева отримано розв'язок, який забезпечує виконання усіх необхідних умов крайової задачі за довільних значень її параметрів. Виведено подання поля через ряди за власними функціями. Отримано точний розв'язок задачі для статичної границі і наближений у низькочастотному діапазоні. Наведено вираз для діаграми спрямованості конуса з ідеально поглинаючою вершиною. Показано, що в низькочастотному випадку при збудженні провідної площини з поглинаючим покриттям кругової форми (випадок  $\gamma = \pi/2$ ) радіальним електричним диполем ефективність поглинання визначається кубом відношення радіуса круга  $c$  до радіальної координати диполя  $r_0$ .

1. Беличенко В. П., Гошин Г. Г., Дмитриенко А. Г. и др. Математические методы в граничных задачах электродинамики. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1990. – 170 с.
2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1952. – 476 с.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1100 с.
4. Захарьев Л. Н., Леманский А. А. Рассеяние волн «черными» телами. – Москва: Сов. радио, 1972. – 288 с.
5. Конторович М. И., Лебедев Н. Н. Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем // Журн. exper. и теорет. физики. – 1938. – 8, № 10-11. – С. 1193-1206.
6. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
7. Gokhan Cinar. Wiener-Hopf analysis of plane wave diffraction by an impedance strip attached on a perfectly conducting half-plane // Electromagnetics. – 2009. – 29, No. 2. – P. 165-184. Doi:10.1080/02726340802676170.
8. Kuryliak D. B., Nazarchuk Z. T. Convolution type operators for wave diffraction by conical structures // Radio Sci. – 2008. – 43, No. 4. – 14 p. – RS4S03, Doi:10.1029/2007RS003792.
9. Macdonald H. M. The diffraction of light by an opaque prism // Proc. London Math. Soc. – 1913. – s2-12, No. 1. – P. 430-432. Doi: 10.1112/plms/s2-12.1430.
10. Nye J. F., Hannay J. H., Liang W. Diffraction by a black half-plane: theory and observation // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1995. – 449, No. 1937. – P. 515-535. Doi: 10.1098/rspa.1995.0056.
11. Yalcin U. Scattering from perfectly magnetic conducting surfaces: the extended theory of boundary diffraction wave approach // Prog. Electromagn. Res. M. – 2009. – 7. – P. 123-133. Doi:10.2528/PIERM09042210.

**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА КОНУСЕ,  
СФОРМИРОВАННОМ ИЗ ИДЕАЛЬНО МАГНИТОПРОВОДЯЩЕЙ  
И ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Решена задача дифракции поля радиального электрического диполя на конусе, поверхность которого сформирована из конечной идеально магнитопроводящей и усеченной полубесконечной идеально электропроводящей конических поверхностей. Задача решена методом Винера – Хопфа с применением интегрального преобразования Конторовича – Лебедева. В аналитическом виде точное решение получено в статическом пределе и приближенное – в низкочастотном диапазоне. Получено выражение для диаграммы направленности конуса с идеально поглощающей вершиной в рамках модели Макдональда. Выяснено влияние края поглощающего фрагмента поверхности конуса на его рассеивающие свойства.

**ELECTRIC WAVE DIFFRACTION ON THE CONE  
FORMED BY PERFECT MAGNETICALLY AND ELECTRICALLY  
CONDUCTING SURFACES**

*The problem of the electric wave diffraction by a semi-infinite cone which is formed by the perfect magnetically conducting finite cone and perfect electrically conducting truncated cone is analyzed. The Wiener – Hopf technique and Kontorovich – Lebedev integral transformation are applied for the solution of the problem. In the static limit the exact solution of the problem is obtained. Analytical representation of the approximate solution is presented for a low frequency range. The expression for the far field pattern, diffracted by cone with perfectly absorbing vertex is obtained using Macdonald model. The effect of the absorbing surface edge on the cone scattering properties is analyzed.*

Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка  
НАН України, Львів

Одержано  
19.11.12